MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

62. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE, TÜBINGEN
K. KNOPP, TÜBINGEN
R. NEVANLINNA, HELSINKI
E. SCHMIDT, BERLIN
F. K. SCHMIDT, HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT, TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

62. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 62. Bandes.

Seite

ANDRÉ, J., Projektive Ebenen über Fastkörpern 137

BAER, R., Nilgruppen 402

BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL, A problem concerning cluster sets of analytic functions 99

BARNER, M., Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen 50

BARTHEL, W., Variationsprobleme der Oberflächenfunktion in der Finslerschen Geometrie 23

BARTLE, R. G., Implicit functions and solutions of equations in groups 335

BOL, G., Zur projektiven Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung 1

BRAFMAN, F., Series of Products of Gegenbauer Polynomials 438

CARLITZ, L., Some class number relations 167

DJERASIMOVIČ, B., Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche 320

DOLD, A., Über fasernweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen 111

ELTERMANN, H., Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung 469

EWEIDA, M. T., On Newton's series of interpolation 352

FOSTER, A. L., The identities of — and unique subdirect factorization within — classes of universal algebras 171

FRÖHLICH, A., and J. C. SHEPHERDSON, On the factorisation of polynomials in a finite number of steps 331

FUHRMANN, A., Klassen ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse 211

GROTEMEYER, K. P., Die eindeutige Bestimmung einer Klasse von offenen, vollständigen Flächen durch die Metrik 17

HORNFECK, B., Berichtigung zur Arbeit: Ein Satz über die Primzahlmenge . . . 502

ITÔ, N., Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen 400

KARZEL, H., Ordnungsfunktionen in nichtdesarguesschen projektiven Geometrien . . 268

KASCH, F., Abschätzung der Dichte von Summenmengen 368

KÜNZI, H., Zwei Beispiele zur Wertverteilungslehre 94

LEICHTWEISS, K., Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie 37

LEPTIN, H., Linear kompakte Moduln und Ringe 241

Seite

MARKUS, L., Continuous matrices and the stability of differential systems 310

MEINARDUS, G., Über die Kroneckersche Grenzformel 347

MESCHKOWSKI, H., Darstellung analytischer Funktionen durch den Randwinkel des Bildbereiches 161

MÜLLER, M., Über Interpolation mittels ganzer rationaler Funktionen 292

NITSCHE, J., Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke 388

SALZMANN, H., und K. ZELLER, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen 354

SCHIEFERDECKER, E., Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen 443

STOLL, W., Über meromorphe Modifikationen. III 189

VIDAV, I., Über eine Vermutung von Kaplansky 330

Bol, G.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 1—16 (1955)

Zur projektiven Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung.

Herrn Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

Gerrit Bol.

Bekanntlich nennt man

$$\mathfrak{p}(u,v) + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{p}}(u,v) \tag{1}$$

eine infinitesimale Verbiegung der Fläche

$$\mathfrak{p}(u,v) = \{p_1(u,v), p_2(u,v), p_3(u,v)\} \tag{2}$$

des Euklidischen Raumes, wenn das Bogenelement von (1) in erster Ordnung von ε unabhängig ist. Notwendig und hinreichend dazu ist die Bedingung

$$d\mathfrak{p} \cdot d\bar{\mathfrak{p}} = 0. \tag{3}$$

Entsprechende Tangenten beider Flächen $\mathfrak{p}(u,v)$ und $\bar{\mathfrak{p}}(u,v)$ stehen dann also aufeinander senkrecht. Man kann ein solches Flächenpaar aufeinander *orthogonal bezogen* nennen. $\bar{\mathfrak{p}}(u,v)$ nennt man gelegentlich auch den *Verschiebungsvektor* der Verbiegung an der Stelle (u,v).

Schon G. Darboux hat erkannt, daß die Eigenschaften solcher infinitesimalen Flächenverbiegungen zum Teil projektiver Natur sind[1]). Später hat dies vor allem R. Sauer hervorgehoben[4]).

Bekanntlich[2]) hängen die Verbiegungen einer Fläche sehr eng zusammen mit den W-Kongruenzen, die sie berühren. G. Fubini hat gezeigt, daß sich der von ihm aufgebaute Formelapparat für die projektive Behandlung solcher Kongruenzen auch zur Behandlung von Fragen der infinitesimalen Flächenverbiegung hervorragend eignet; man gelangt so zu einem rein projektiven Aufbau der Verbiegungstheorie, der dem klassischen gegenüber manche Vorteile aufweist[3]).

Diese Zusammenhänge werden hier weiter verfolgt, wobei insbesondere eine direkte eineindeutige Beziehung zwischen den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche und den Lösungen der Fubinischen Grundgleichungen (2.8) hergestellt wird. Zwischen dem Schraubriß einer Verbiegung und der zu ihr gehörigen W-Kongruenz wird eine einfache projektive Beziehung hergeleitet, die bisher anscheinend nicht beachtet worden ist.

---

[1]) Darboux, G.: Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 73—86.

[2]) Vgl. § 1.

[3]) Fubini, G., u. E. Čech: Geometria Proiettiva Differenziale, Bd. I, Kap. V. Bologna 1926/27. Das Buch wird weiterhin GPD zitiert.

[4]) Vgl. Darboux, G.: Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 48—72. — Salkowski, G.: Affine Differentialgeometrie. Berlin 1934. — Sauer, R.: Arch. Math. 1, 89—93 (1948).

Kaum berührt wird in dieser Note die Theorie des mit einer infinitesimalen Verbiegung verknüpften DARBOUXschen Flächenkranzes. Auf die sehr wesentlichen Vereinfachungen, die sich für den Aufbau dieses Flächensystems[4]) aus unseren Betrachtungen ergeben, soll an anderer Stelle zurückgekommen werden.

§ 1. Schraubriß und W-Kongruenz.

Zu jeder Verbiegung einer Fläche gehört an jeder Stelle (u, v) eine eindeutig bestimmte Bewegung des Raumes, welche das entsprechende Flächenelement der Urfläche mit demjenigen der Verbiegung in erster Ordnung zur Deckung bringt. Eine solche Bewegung läßt sich eindeutig aufspalten in eine Rotation um den Nullpunkt und eine nachfolgende Parallelverschiebung; die letztere kann man durch den zugehörigen Translationsvektor, die erste in bekannter Weise durch einen Drehvektor längs der Achse der Drehung beschreiben.

Insbesondere gilt das auch für jede infinitesimale Verbiegung (1) der Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$. Wir stellen den Translationsvektor der zur Stelle (u, v) gehörigen Bewegung dar durch $\varepsilon\,\mathfrak{s}(u, v)$, den Rotationsvektor durch $\varepsilon\,\mathfrak{r}(u, v)$. Dann ist also

$$\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}\times\mathfrak{p}, \tag{1.1}$$

$$d\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{r}\times d\mathfrak{p} \tag{1.2}$$

und hierdurch sind die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ an jeder Stelle (u, v) eindeutig festgelegt.

Wir nennen $\mathfrak{s}(u, v)$ den *Translationsriß*, $\mathfrak{r}(u, v)$ den *Rotationsriß* der Verbiegung, und fassen beide zusammen zu dem Sechservektor

$$\mathfrak{H} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{s}], \tag{1.3}$$

den wir den *Schraubriß* der Verbiegung nennen[5]).

Wie üblich machen wir über die Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$ und ihre Darstellung die Regularitätsvoraussetzung, daß die Vektoren $\mathfrak{p}_u$ und $\mathfrak{p}_v$ linear unabhängig sein sollen. $\mathfrak{p}(u, v)$ soll dreimal, der Schraubriß $\mathfrak{H}(u, v)$ einmal stetig differenzierbar sein.

Aus (1.1) folgt durch Differentiation unter Berücksichtigung von (1.2)

$$0 = d\mathfrak{s} + d\mathfrak{r}\times\mathfrak{p} \tag{1.4}$$

und daraus durch Multiplikation mit $d\mathfrak{r}$

$$d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{s} = 0. \tag{1.5}$$

Translationsriß und Rotationsriß sind also wieder orthogonal bezogene Flächen.

Weiter erhält man aus (1.2) oder

$$\bar{\mathfrak{p}}_u = \mathfrak{r}\times\mathfrak{p}_u, \quad \bar{\mathfrak{p}}_v = \mathfrak{r}\times\mathfrak{p}_v \tag{1.6}$$

die Integrierbarkeitsbedingung

$$\mathfrak{r}_v\times\mathfrak{p}_u = \mathfrak{r}_u\times\mathfrak{p}_v. \tag{1.7}$$

[5]) Die Bezeichnungen stammen von W. BLASCHKE und R. SAUER.

Ist dieser Vektor vom Nullvektor verschieden, so steht er senkrecht auf $\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v, \mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v$, was bedeutet, daß die Vektoren $\mathfrak{r}_u$ und $\mathfrak{r}_v$ zur Tangentenebene der Fläche $\mathfrak{p}$ parallel sind. Dies gilt natürlich auch wenn beide Vektorprodukte in (1.7) verschwinden.

Weiter gilt bekanntlich der Satz:

Die Ableitung

$$d\mathfrak{F} = [d\mathfrak{r}, d\mathfrak{s}] \tag{1.8}$$

des Schraubrisses in einer beliebigen Richtung (du, dv) *stellt, falls sie nicht verschwindet, eine Tangente der Fläche* $\mathfrak{p}$ *an der Stelle* (u, v) *dar.*

Denn nach (1.4) besteht der Sechservektor

$$d\mathfrak{F} = [d\mathfrak{r}, \mathfrak{p} \times d\mathfrak{r}] \tag{1.9}$$

aus den Plückerschen Linienkoordinaten der Geraden durch $\mathfrak{p}$ in der Richtung $d\mathfrak{r}$; diese berührt aber nach dem Vorangehenden die Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$.

Ist umgekehrt einer Fläche $\mathfrak{p}(u, v)$ *durch gleiche Parameterwerte eindeutig ein zweiparametriges System von Sechservektoren* (1.3) *zugeordnet, dessen Ableitung in jeder Richtung* (du, dv) *entweder verschwindet oder eine Gerade durch den zugehörigen Flächenpunkt darstellt, so bilden diese Sechservektoren den Schraubriß einer infinitesimalen Verbiegung von* $\mathfrak{p}(u, v)$.

Die Voraussetzung bedeutet nämlich, daß (1.4) gilt. Erklärt man nun $\bar{\mathfrak{p}}(u, v)$ durch (1.1), so folgt durch Differentiation hiervon unter Berücksichtigung von (1.4), daß auch (1.2) gilt, also daß die durch $\mathfrak{F}$ dargestellte Bewegung an jeder Stelle das Flächenelement erster Ordnung von $\mathfrak{p}(u, v)$ in das entsprechende von $\mathfrak{p} + \varepsilon \bar{\mathfrak{p}}$ überführt.

Bekanntlich begründen die hervorgehobenen Sätze den projektiven Charakter der infinitesimalen Verbiegungen; die in ihnen zum Ausdruck gebrachten Eigenschaften sind ja bei Projektivitäten invariant.

Zur weiteren Klärung der Verhältnisse erinnern wir an die Beziehungen zur Theorie der W-Kongruenzen. Nach G. DARBOUX[6]) sind diese Strahlensysteme dadurch gekennzeichnet, daß die Umgebung zweiter Ordnung jedes Strahles einem linearen Komplex angehört. Wir nennen diesen Komplex den zum Strahl gehörigen *Schmiegkomplex* der Kongruenz.

Wir wollen nun zeigen:

An jeder Stelle (u, v), *an der die Verschiebung* $\bar{\mathfrak{p}}$ *nicht senkrecht auf der Fläche steht, also die* PFAFFsche *Form*

$$\bar{\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{p}$$

nicht identisch in du, dv *verschwindet, gibt es genau eine Tangente der Fläche, die dem von* $\mathfrak{F}$ *dargestellten linearen Komplex angehört. Diese Tangenten bilden ein W-Strahlensystem. Der Schraubrißvektor* $\mathfrak{F}$ *stellt an jeder Stelle* (u, v) *den Schmiegkomplex dieser Kongruenz dar*[7]).

[6]) Vgl. etwa G. BOL, Projektive Differentialgeometrie, Bd. I, § 34. Göttingen 1950, 1954. Das Buch wird weiterhin mit PD zitiert.

[7]) Auf den letztgenannten Sachverhalt, der bisher nicht beachtet zu sein scheint, stützen wir uns in erster Linie bei der folgenden Darstellung der Verbiegungstheorie.

Zunächst gehört nämlich der Strahl durch $\mathfrak{p}$ in der Richtung $\mathfrak{v}$ mit den Geradenkoordinaten

(1.10) $$\mathfrak{g} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{p} \times \mathfrak{v}]$$

dann und nur dann dem von (1.3) dargestellten linearen Komplex an, wenn

(1.11) $$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{p} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{s}\,\mathfrak{v} = 0$$ [8]).

Dafür kann man aber auch schreiben

$$\mathfrak{v}[\mathfrak{r} \times \mathfrak{p} + \mathfrak{s}] = 0,$$

also nach (1.1)

(1.12) $$\mathfrak{v}\,\bar{\mathfrak{p}} = 0.$$

Auf Grund unserer Voraussetzung gibt es aber nur eine Richtung $d\mathfrak{p}$ auf der Fläche in unserem Flächenpunkt, für die diese Bedingung erfüllt ist. Wir denken uns nun für den Augenblick die Parameter auf der Fläche so gewählt, daß die u-Kurven an jeder Stelle von der fraglichen Flächentangente berührt wird. Dann ist also

(1.13) $$\bar{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{p}_u = 0$$

und

(1.14) $$\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}_u].$$

Es soll nun gezeigt werden, daß

(1.15) $$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{g}_u = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{g}_v = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{g}_{uu} = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{g}_{uv} = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{g}_{vv} = 0.$$

Beachtet man, daß für die Differentiation der durch das Zeichen $\circ$ dargestellten Polarprodukte die übliche Regel gilt, so stellt man sofort fest, daß (1.15) gleichwertig ist mit

(1.16) $$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{g}_u = \mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g}_u = \mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g}_v = 0.$$

Daß diese Bedingungen erfüllt sind, läßt sich aber sehr leicht nachprüfen. Einerseits gilt nämlich für die Sechservektoren

(1.17) $$\mathfrak{s}_u = [\mathfrak{r}_u, \mathfrak{s}_u], \qquad \mathfrak{s}_v = [\mathfrak{r}_v, \mathfrak{s}_v]$$

nach (1.4)

(1.18) $$\mathfrak{s}_u + \mathfrak{r}_u \times \mathfrak{p} = 0, \qquad \mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{p} = 0,$$

andererseits folgt aus (1.14)

(1.19) $$\mathfrak{g}_u = [\mathfrak{p}_{uu}, \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}_{uu}], \qquad \mathfrak{g}_v = [\mathfrak{p}_{uv}, \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}_{uv} + \mathfrak{p}_v \times \mathfrak{p}_u].$$

[8]) Das Polarprodukt $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ zweier Sechservektoren $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ und $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ wird erklärt durch

$$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_1.$$

Es verschwindet dann und nur dann, wenn die von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im KLEINschen Geradenraum dargestellten Punkte polar liegen in bezug auf die absolute Quadrik Q dieses Raumes. Für die Bezeichnung vergleiche man PD I, §§ 16 bis 20.

Da $\mathfrak{g}$ durch die Beziehung $\mathfrak{s} \circ \mathfrak{g} = 0$ definiert wurde, sind nur noch die letzten 5 Relationen (1.16) nachzuprüfen. Man findet in der Tat

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{g} &= (\mathfrak{s}_u + \mathfrak{r}_u \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_u &= 0 \\
\mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g} &= (\mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_u &= 0 \\
\mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{g}_u &= (\mathfrak{s}_u + \mathfrak{r}_u \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_{uu} &= 0 \\
\mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g}_u &= (\mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_{uu} &= 0 \\
\mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{g}_v &= [\mathfrak{s}_v + \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_{uv} + (\mathfrak{r}_v, \mathfrak{p}_v, \mathfrak{p}_u) &= 0,
\end{aligned}$$

denn in der letzten Gleichung ist die Determinante

$$(\mathfrak{r}_v, \mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v) = 0, \tag{1.20}$$

weil $\mathfrak{r}_v$ zur Tangentenebene der Fläche $\mathfrak{p}$ parallel ist.

Damit ist der angekündigte Satz bewiesen; die Umgebung zweiter Ordnung des Strahles $\mathfrak{g}$ liegt im linearen Komplex $\mathfrak{s}$.

Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß unter gewissen Regularitätsbedingungen die Sechservektoren, welche die Schmiegkomplexe einer berührenden W-Kongruenz einer Fläche darstellen, sich auch umgekehrt stets so normen lassen, daß ihre Ableitungen entweder verschwinden oder Tangenten der Fläche im Berührungspunkt mit dem Kongruenzstrahl darstellen.

Denkt man sich Fläche und Kongruenz zunächst in einem projektiven Raum, so liefern dann die normierten Sechservektoren der Schmiegkomplexe für jede in diesem Raum eingeführte Euklidische Metrik den Schraubriß einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche.

Die Frage nach den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche ist so auf eine rein projektive über die W-Kongruenzen, welche die Fläche berühren, zurückgeführt.

§ 2. Die Grundgleichungen.

Im folgenden gehen wir aus von einem nirgendwo parabolisch gekrümmten Flächenstück, das auf Asymptotenlinienparameter u, v bezogen ist. Den projektiven Koordinatenvektor

$$\mathfrak{x}(u, v) = \{x_0(u, v),\ x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v)\}$$

denken wir uns so normiert, daß die sicher von Null verschiedene Determinante

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) = \varkappa \tag{2.1}$$

eine Konstante ist. $\mathfrak{x}(u, v)$ sei in dieser Darstellung zweimal stetig differenzierbar. Dann gelten Ableitungsgleichungen von der Form[9])

$$\mathfrak{x}_{uu} = \beta \mathfrak{x}_v + \pi \mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = \gamma \mathfrak{x}_u + \chi \mathfrak{x}. \tag{2.2}$$

[9]) Für die Grundformeln der projektiven Flächentheorie vergleiche man PD I §§ 28 bis 30, sowie PD II, §§ 74 bis 79, § 95.

Ist die Fläche elliptisch gekrümmt, so sei sie zunächst auf Parameter bezogen, für die die metrische zweite Fundamentalform die isotherme Gestalt hat:

$$A(\xi, \eta)\,(d\xi^2 + d\eta^2). \tag{2.3}$$

Setzt man dann

$$u = \xi + i\eta, \quad v = \xi - i\eta, \tag{2.4}$$

so haben die Ableitungsgleichungen wiederum die Gestalt (2.1) und für reelle Flächenpunkte sind u, v konjugiert komplex.

Die Schmiegtangenten unserer Fläche werden jetzt dargestellt durch die Sechservektoren

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u), \quad \mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v). \tag{2.5}$$

Nach (2.2) gelten für sie die Beziehungen

$$\mathfrak{u}_u = \beta\,\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{v}_v = \gamma\,\mathfrak{u}. \tag{2.6}$$

Hat der Sechservektor $\mathfrak{s}(u, v)$ die Eigenschaft, daß seine Ableitungen Tangenten der Fläche an der Stelle (u, v) darstellen, so wollen wir $\mathfrak{s}(u, v)$ im Sinne von § 1 einen *Schraubriß* für die Fläche nennen.

Ist $\mathfrak{s}(u, v)$ ein Schraubriß, so genügen die durch

$$b = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{u}, \quad a = -\mathfrak{s} \circ \mathfrak{v} \tag{2.7}$$

erklärten Größen a, b den Differentialgleichungen

$$a_v = -\gamma\, b, \quad b_u = -\beta\, a. \tag{2.8}$$

Da nämlich $\mathfrak{s}_u$ und $\mathfrak{s}_v$ Tangenten darstellen, ist

$$\mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{s}_u \circ \mathfrak{v} = \mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{s}_v \circ \mathfrak{v} = 0. \tag{2.9}$$

Daher folgt aus (2.6) sofort die Behauptung.

Wir nennen (2.8) die projektiven *Grundgleichungen* für die infinitesimale Flächenverbiegung und wollen den *Hauptsatz* beweisen:

Unter geeigneten Differenzierbarkeitsannahmen lassen sich die infinitesimalen Verbiegungen eines nirgendwo parabolisch gekrümmten Flächenstücks eindeutig den Lösungen der Grundgleichungen für dieses Flächenstück zuordnen.

Wir zeigen zunächst, daß nach (2.7) zu verschiedenen Schraubrissen auch verschiedene Lösungen der Grundgleichungen gehören. Wegen der Linearität genügt es zu zeigen, daß aus

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{v} = 0 \tag{2.10}$$

folgt, daß der Schraubrißvektor $\mathfrak{s}$ der Nullvektor ist.

Nun folgt aus (2.9) und (2.10), daß $\mathfrak{s}$ auch zu den Ableitungen

$$\mathfrak{u}_v = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + (\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_u), \quad \mathfrak{v}_u = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$$

von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, also zu $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv})$ und $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$ polar ist. Zu den vier Vektoren $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u)$, $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v)$, $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$, $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv})$ sind aber nur die Linearkombinationen von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$

polar, wir hätten also

$$\mathfrak{s} = c\,\mathfrak{u} + e\,\mathfrak{v}$$

und

$$\mathfrak{s}_v \equiv c(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + c(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{u}, \mathfrak{v}).$$

Da dies eine Tangente der Fläche darstellen soll, ist aber $c = 0$, und ebenso sieht man, daß $e = 0$ ist.

Um umgekehrt zu jeder Lösung von (2.8) einen Schraubriß zu finden, der zu ihr in der Beziehung (2.7) steht, berufen wir uns auf die FUBINIsche Theorie der W-Kongruenzen, welche eine Fläche berühren[10]). Diese lehrt, daß zu jeder Lösung von (2.8), bei der a und b beide von Null verschieden sind, eine W-Kongruenz gehört, deren Strahlen durch

$$\mathfrak{g} = a\,\mathfrak{u} + b\,\mathfrak{v} \tag{2.11}$$

dargestellt werden.

Mittels des in PD II, § 114 aufgestellten Formelapparates läßt sich leicht der Schmiegkomplex dieser Kongruenz bestimmen, und zwar liefert ihn die Theorie gleich in der richtigen Normierung als Schraubriß. Bei diesen Formeln wurde ein halbinvariantes Differentiationsverfahren verwendet. Nach Rücktransformation auf gewöhnliche Ableitungen findet man, wenn

$$\begin{cases} 2\,\mathfrak{a} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) - (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) & 2\,\mathfrak{b} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uv}) + (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) \\ \mathfrak{p} = (\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) & \mathfrak{q} = (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uv}) \\ L = \pi + \tfrac{1}{2}\beta_v & M = \chi + \tfrac{1}{2}\gamma_u \end{cases} \tag{2.12}$$

gesetzt wird, für den Schmiegkomplex $\mathfrak{c}$ der Kongruenz die Darstellung

$$\begin{cases} \mathfrak{c} = a\,\mathfrak{q} - a_u\,\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2}(a_{uu} - 2L\,a + \beta\gamma\,b)\,\mathfrak{v} + \\ \qquad + b\,\mathfrak{p} - b_v\,\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}(b_{vv} - 2M\,b + \beta\gamma\,a)\,\mathfrak{u} \end{cases} \tag{2.13}$$

mit den Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{c}_u = h\,\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{c}_v = k\,\mathfrak{u}. \tag{2.14}$$

Dabei ist

$$\begin{cases} 2h = a_{uuu} - 4L\,a_u - 2L_u\,a + \beta\,b_{vv} - \beta_v\,b_v + (\beta_{vv} - 4\beta M)\,b \\ 2k = b_{vvv} - 4M\,b_v - 2M_v\,b + \gamma\,a_{uu} - \gamma_u\,a_u + (\gamma_{uu} - 4\gamma L)\,a \end{cases} \tag{2.15}$$

und für die Größe

$$2G = \varkappa^{-1}\,\mathfrak{c}\circ\mathfrak{c} = -\,a\,a_{uu} + \tfrac{1}{2}a_u^2 + 2L\,a^2 + b\,b_{vv} - \tfrac{1}{2}b_v^2 - 2M\,b^2 \tag{2.16}$$

gilt

$$G_u = -\,a\,h, \qquad G_v = b\,k. \tag{2.17}$$

Diese Beziehungen lassen sich leicht, aber etwas umständlich, auch ohne den Umweg über die halbinvariante Differentiation bestätigen, wenn man

[10]) Vgl. PD II, § 114.

die aus (2.2) hervorgehenden Integrierbarkeitsbedingungen

$$(2.18)\qquad \begin{cases} 2L_v = \beta_{uu}\gamma + 2\beta\gamma_u \\ 2M_u = \gamma_{vv}\beta + 2\gamma\beta_v \\ 2\beta M_v + 4\beta_v M - \beta_{vvv} = 2\gamma L_u + 4\gamma_u L - \gamma_{uuu} \end{cases}$$

berücksichtigt[11]). Man stellt dann fest, daß für den Sechservektor $\mathfrak{c}$ aus (2.13) die Gln. (2.14) auch dann gelten, wenn a und b Null werden. Da aus (2.12)

$$(2.19)\qquad \mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{u} = b\varkappa, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{v} = -a\varkappa$$

folgt, erhält man den gesuchten, zur Lösung (a, b) von (2.8) gehörigen Schraubriß, indem man $\mathfrak{c}$ durch (2.13) erklärt und

$$(2.20)\qquad \mathfrak{s} = \varkappa^{-1}\mathfrak{c}$$

setzt.

Zu den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche gehören auch solche, bei denen die Fläche starr bewegt wird. Offenbar ist das dann und nur dann der Fall, wenn der Schraubriß von u und v unabhängig ist. Also:

Setzt man in (2.7) *für* $\mathfrak{s}$ *beliebige konstante Sechservektoren ein, so erhält man die Lösungen von* (2.8), *die zu den starren Bewegungen der Fläche gehören. Kennzeichnend für diese Lösungen ist nach* (2.14)

$$(2.21)\qquad h = k = 0.$$

Ist für eine infinitesimale Verbiegung G eine Konstante, so handelt es sich nach (2.17) stets dann um eine Bewegung, wenn a und b nicht verschwinden. Auch isolierte Nullstellen von a oder b stören natürlich nicht, da dort aus Stetigkeitsgründen immer noch (2.21) gilt. Verschwindet in einer Umgebung einer Stelle (u, v) etwa b überall, so folgt aus (2.8), daß dort $\beta a = 0$ gilt. Ist auch $a = 0$, so bleibt die Fläche in dieser Umgebung fest, also wieder starr. Eine Ausnahme tritt jedoch ein, wenn $\beta = 0$. In diesem Fall sind die u-Kurven der Fläche in der fraglichen Umgebung Geraden, und $\mathfrak{g}$ fällt längs dieser Geraden. Also:

Wenn für eine Verbiegung G *eine Konstante ist, so ist sie überall dort eine Bewegung, wo nicht der Ausnahmefall vorliegt, daß die Fläche eine Regelfläche ist und die durch* (2.11) *erklärte Gerade* $\mathfrak{g}$ *mit einer Erzeugenden der Fläche zusammenfällt.*

Bei elliptisch gekrümmten Flächen kann offenbar der Ausnahmefall nicht eintreten.

Infinitesimale Verbiegungen lassen sich bekanntlich linear zusammensetzen; sind $\mathfrak{s}_1(u, v)$ und $\mathfrak{s}_2(u, v)$ Schraubrisse, so gilt das gleiche für

$$(2.22)\qquad \lambda_1\mathfrak{s}_1 + \lambda_2\mathfrak{s}_2$$

[11]) Die letzte Gleichung wird hier nicht verwendet und ist nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Die Beziehungen (2.18) sind enthalten in (79.17) und (79.19) aus PD II, wenn die halbinvariante Differentiation sich auf die gewöhnliche reduziert, also $\lambda = \mu = 1$, $\sigma = \tau = 0$.

mit beliebigen konstanten λ_1, λ_2. Gehört zu $\mathfrak{F}_1$ die Lösung (a_1, b_1) der Grundgleichungen, zu $\mathfrak{F}_2$ die Lösung (a_2, b_2), so gehört zu (2.22) nach (2.7) die Lösung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2. \tag{2.23}$$

Ebenso setzen sich h und k linear homogen zusammen.

Zwei infinitesimale Verbiegungen unterscheiden sich dann und nur dann um eine Bewegung, wenn h und k für sie die gleichen Funktionen von u und v sind.

Vermerken wir schließlich noch, daß aus (2.14) die Integrierbarkeitsbedingungen

$$h_v = \beta k, \quad k_v = \gamma h \tag{2.24}$$

folgen.

§ 3. Spezielle Flächenklassen.

Sehen wir uns noch einige Sonderfälle an! Für die Quadriken ist $\beta = \gamma = 0$, für sie lassen sich also sämtliche Lösungen von (2.8) sofort angeben und damit sämtliche infinitesimale Verbiegungen integralfrei bestimmen. Wir kommen darauf in § 4 zurück.

Betrachten wir eine beliebige Regelfläche. Denkt man sie sich auf ihre Asymptotenlinien bezogen, so gilt bei geeigneter Normung für die Viervektoren $\mathfrak{x}(u, v)$ der Flächenpunkte eine Darstellung der Form

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{q}(v) + u\,\mathfrak{r}(v) \tag{3.1}$$

mit

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{q}', \mathfrak{r}') = \varkappa = \text{const} \tag{3.2}$$

und

$$\mathfrak{q}'' = Q\,\mathfrak{q} + R\,\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r}'' = S\,\mathfrak{q} + T\,\mathfrak{r}. \tag{3.3}$$

Q, R, S und T sind hier Funktionen von v allein[12]).

Aus (3.1), (3.3) folgt, wenn wir

$$W = \tfrac{1}{2}(Q - T), \quad S = \tfrac{1}{2}(Q + T) \tag{3.4}$$

setzen

$$\beta = \pi = L = 0, \quad \gamma = R - 2Wu - Su^2, \quad \chi = Q + Su, \quad M = j. \tag{3.5}$$

Die allgemeine Lösung von (2.8) wird dann dargestellt durch

$$b = V(v), \quad a = -u^2 \int V R\,dv + 2u \int V W\,dv + \int V S\,dv + U(u), \tag{3.6}$$

wobei $U(u)$ eine beliebige Funktion von u allein, $V(v)$ eine solche von v allein ist.

Ist hier U eine Konstante, so handelt es sich um eine infinitesimale MINDINGsche Flächenverbiegung, denn aus (3.5) und (3.6) folgt in diesem Fall

[12]) Vgl. etwa PD I, § 25. Um bei einer beliebig vorgegebenen Regelfläche zu einer solchen Darstellung zu gelangen, ist im allgemeinen die Integration einer RICCATIschen Differentialgleichung erforderlich. Dagegen läßt sich nach G. KOENIGS, Comptes Rendus **106**, 51—54 (1888) für die Gesamtheit aller auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelflächen eine integralfreie Darstellung angeben. Die Berechnung der infinitesimalen Verbiegungen daraus fordert im Einzelfall nur noch Quadraturen.

$h=0$; nach (2.14) ist dann der Schraubriß der Verbiegung längs jeder Erzeugenden der Regelfläche fest, so daß diese Geraden bei der Verbiegung starr bewegt werden.

Kennt man die MINDINGschen infinitesimalen Verbiegungen einer auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelfläche, so lassen sich offenbar die übrigen integralfrei bestimmen.

Eine andere interessante Klasse von infinitesimalen Verbiegungen einer Regelfläche sind die, für die $V=0$ ist. Die zugehörige W-Kongruenz entartet dann in die Regelfläche selbst. Die zugehörigen Verbiegungen sind dadurch ausgezeichnet, daß der Verschiebungsvektor in jedem Punkt der Fläche auf der hindurchgehenden Erzeugenden senkrecht steht. Offenbar lassen sich diese Verbiegungen bei jeder auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelfläche integralfrei bestimmen.

Jede infinitesimale Verbiegung einer Regelfläche setzt sich linear zusammen aus einer MINDINGschen *und einer der zuletzt betrachteten Art.*

Gehört die Regelfläche einer linearen Kongruenz an, so sind R, W und S konstante Vielfache der gleichen Funktion von v. Man kann dann

$$a = V(v)\,\gamma \tag{3.7}$$

setzen mit beliebigem $V(v)$ und b durch Differentiation berechnen.

Sämtliche infinitesimale Verbiegungen einer Kongruenzregelfläche lassen sich daher integralfrei darstellen[13]).

Die Flächen, für die

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{V(v)}{U(u)} \tag{3.8}$$

ist, nennt man bekanntlich isotherm-asymptotisch. Für diese Flächen folgt aus (2.24), daß für jede infinitesimale Verbiegung

$$a = U\,h, \quad b = -\,V\,k \tag{3.9}$$

eine im allgemeinen von (a, b) wesentlich verschiedene Lösung von (2.8) darstellt[14]). Wir nennen sie die aus (a, b) *derivierte* Lösung und die zugehörige Verbiegung die *derivierte Verbiegung*. Die Fläche bleibt bei ihr dann und nur dann fest, wenn (a, b) zu einer Bewegung der Fläche gehört.

Kennt man eine infinitesimale Verbiegung einer isotherm-asymptotischen Fläche, so läßt sich daraus eine im allgemeinen unendliche Folge weiterer Verbiegungen integralfrei herleiten.

Die Derivierte einer Verbiegung fällt dann und nur dann mit dieser selbst zusammen, wenn

$$h = c\,a, \quad k = -\,c\,b \tag{3.10}$$

[13]) Das gilt zunächst nur, wenn die Fläche auf Asymptotenlinienparameter bezogen vorgegeben war. Wie hier nicht gezeigt werden soll, lassen sich aber sämtliche auf Asymptotenlinienparameter bezogene Kongruenzregelflächen integralfrei in der Form

$$\mathfrak{x}(u,v) = \{vF' - 2F + uv,\ F' - u,\ v - \varepsilon u\,(vF' - 2F),\ 1 - \varepsilon u F'\} \tag{5.21}$$

mit beliebigem $F(v)$ und $\varepsilon = 0$ oder ± 1 darstellen.

mit konstantem c. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die zweite Brennfläche der zur Verbiegung gehörigen W-Kongruenz ebenfalls isotherm asymptotisch ist, diese aber keinem linearen Komplex angehört. Diese Verbiegungen und Kongruenzen hängen ab von sechs beliebigen Funktionen einer Veränderlichen[14]).

Besonderes Interesse verdienen in unserem Zusammenhang auch die projektiv abwickelbaren Flächen, vor allem ihre wichtigste Unterklasse, die R-Flächen. Zu jeder projektiven Abwicklung einer solchen Fläche gehören zwei berührende W-Kongruenzen, für die bei geeigneter Wahl der Asymptotenlinienparameter

$$b = \pm a \tag{3.11}$$

gilt. Bei dieser Normierung ist

$$\beta_v = \gamma_u , \tag{3.12}$$

und aus

$$\frac{a_u}{a} = \mp \gamma, \quad \frac{a_v}{a} = \mp \beta \tag{3.13}$$

läßt sich a mittels Quadraturen bestimmen.

Zu jeder projektiven Abwicklung einer R-Fläche gehören eindeutig zwei linear unabhängige metrische Abwicklungen, die sich mittels Quadraturen bestimmen lassen.

Aber auch in anderer Hinsicht sind unsere Flächen für die Flächenverbiegung wichtig. Bei der projektiven Abwicklung bleiben nämlich β und γ und daher auch die Lösungen von (2.7) erhalten.

Zu jeder infinitesimalen Verbiegung einer R-Fläche gehört daher eindeutig eine ebensolche Verbiegung jeder projektiven Abwicklung.

Wählt man die Parameter wie oben, so unterliegen die Flächeninvarianten L und M bei der zugehörigen projektiven Abwicklung Transformationen der Form

$$\hat{L} = L + C, \quad \hat{M} = M + C \tag{3.14}$$

mit konstantem C[15]).

Für die Invarianten h und k einer beliebigen Verbiegung gilt daher

$$\hat{h} = h - 2C(a_u + \beta b), \quad \hat{k} = k - 2C(b_v + \gamma a). \tag{3.15}$$

Zu jeder Bewegung der R-Fläche gehören daher für ihre projektiven Abwicklungen infinitesimale Verbiegungen, die keine Bewegungen sind. Diese lassen sich integralfrei berechnen, wenn die Parameterdarstellung der projektiven Abwicklung, bezogen auf u und v, bekannt ist.

Denn die zu Bewegungen gehörigen Lösungen von (2.8) erhält man ja aus der Parameterdarstellung der R-Fläche, wenn man in (2.7) für $\mathfrak{d}$ einen konstanten Vektor einsetzt.

[14]) Vgl. GPD I, § 51 und auch PD II, § 115, Aufgabe 1.
[15]) Vgl. etwa PD II, § 119.

Nach (3.15) sind h und k bei der Projektivabwicklung dann und nur dann invariant, wenn

$$a_u + \beta b = 0, \quad b_v + \gamma a = 0. \tag{3.16}$$

Zusammen mit (2.8) bilden diese Gleichungen wegen (3.12) ein vollständig integrierbares System. Da diesem die Lösungen (3.11) von (2.8) genügen, sind sämtliche Lösungen Linearkombinationen von diesen, denn sie hängen nur von zwei Parametern (den Anfangswerten a und b) ab.

Nur für die Verbiegungen, die nach dem erstgenannten Satz zu den projektiven Abwicklungen der R-Fläche gehören und für die daraus zusammengesetzten, sind h und k bei diesen invariant.

Ist unsere R-Fläche gleichzeitig isotherm-asymptotisch, so folgt übrigens aus (3.15) und (3.9), daß bei unserer Parameterwahl für jede Verbiegung auch

$$\mathring{a} = U(a_u + \beta b), \quad \mathring{b} = -V(b_v + \gamma a) \tag{3.17}$$

eine Lösung von (2.8) darstellt. So ergibt sich für diese Flächen eine neue Möglichkeit, aus einer bekannten Verbiegung ohne Integrationen neue zu bekommen.

Insbesondere liegt der letztgenannte Fall vor bei den Flächen, die die für Nichtregelflächen höchstmögliche Vielfachheit von ∞^3 projektiven Verbiegungen zulassen, denn diese sind bekanntlich sämtlich isotherm asymptotisch.

Von besonderem Interesse sind in diesem Zusammenhang die Koinzidenzflächen. Für sie sind bei geeigneter Wahl der Asymptotenlinienparameter β und γ Konstanten, jede hyperbolisch gekrümmte unter ihnen läßt sich auf die Rotationsfläche

$$x_3(x_1^2 + x_2^2) = 1, \tag{3.18}$$

jede elliptisch gekrümmte auf die CAYLEYsche Fläche

$$x_1 x_2 x_3 = 1 \tag{3.20}$$

projektiv abwickeln. Zu diesen Flächen gehören auch sämtliche Tetraedralflächen mit Gleichungen der Form

$$x_1^p x_2^q x_3^r = 1; \quad p, q, r \text{ konstant}. \tag{3.21}$$

Für a folgt in diesem Fall aus (2.8) die Differentialgleichung

$$a_{uv} = K a, \quad K = \text{const}, \tag{3.22}$$

die bei elliptisch gekrümmten Flächen die Form

$$\Delta a = K a, \quad K = \text{const} \tag{3.23}$$

annimmt. Δ ist hier der LAPLACEsche Operator.

Bekanntlich läßt sich die allgemeine Integration einer Gleichung vom LAPLACEschen Typus, also auch eines Gleichungssystems vom Typus der Grundgleichungen (2.8), mittels Quadraturen durchführen, wenn die zugehörige LAPLACE-Kette abbricht[16]). Nun hat (2.8) im wesentlichen die gleiche Gestalt

wie (2.6); der Unterschied in den Vorzeichen läßt sich beseitigen, indem man etwa $\mathfrak{v}$ durch $-\mathfrak{v}$ ersetzt. Wir können also auch die von den Flächen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ im Geradenraum erzeugte LAPLACE-Kette betrachten, das ist die GODEAUX-Kette der Fläche[16]).

Für jede Fläche mit abbrechender GODEAUX-*Kette lassen sich sämtliche infinitesimale Verbiegungen mittels Quadraturen bestimmen.*

Hierzu gehören Flächenklassen, die von beliebig vielen beliebigen Funktionen einer Veränderlichen abhängen. Die einfachste Unterklassen bilden die Regelflächen, die nächste enthält die Flächen, bei denen die Tangenten der Asymptotenlinien einer Schar jeweils einem linearen Komplex angehören.

Schließlich sei noch der Satz erwähnt:

Kennt man eine infinitesimale Verbiegung einer Brennfläche einer W-Kongruenz, so läßt sich daraus mittels einer Quadratur eine solche der anderen Brennfläche herleiten[17]).

§ 4. Verbiegung der Quadriken.

Zum Schluß sei noch gezeigt, daß unsere projektive Betrachtungsweise auch zur Verbiegungstheorie der Quadriken einen besonders bequemen Zugang liefert. Wir gehen aus von der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(u,v) = \{1, u, v, uv\} \tag{4.1}$$

für die Fläche mit der Gleichung

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0. \tag{4.2}$$

Da hier

$$\mathfrak{x}_u = \{0,1,0,v\}, \quad \mathfrak{x}_v = \{0,0,1,u\}, \quad \mathfrak{x}_{uv} = \{0,0,0,1\}, \tag{4.3}$$

ist $\varkappa = 1$ und findet man

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \{1,0,v,\ v^2,\ \ 0,\ -v\} \\ \mathfrak{v} &= \{0,1,u,\ \ 0,\ -u^2,\ \ u\} \\ 2\mathfrak{a} &= \{0,0,1,2v,\ \ 0,\ -1\} \\ 2\mathfrak{b} &= \{0,0,1,\ \ 0,\ -2u,\ \ 1\} \\ \mathfrak{p} &= \{0,0,0,\ \ 1,\ \ \ 0,\ \ 0\} \\ \mathfrak{q} &= \{0,0,0,\ \ 0,\ -1,\ \ 0\} \end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

Da $\mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{x}_{vv} = 0$ ist, folgt weiter

$$\beta = \gamma = 0, \quad \pi = \chi = 0, \quad L = M = 0. \tag{4.5}$$

[16]) Vgl. PD II, §§ 128—129.

[17]) Vgl. etwa GPD I, § 50. Der Satz hängt mit BIANCHIS Vertauschungstheorem für die berührenden W-Kongruenzen einer Fläche zusammen.

(2.8) nimmt also hier die Form an

$$a_v = b_u = 0; \tag{4.6}$$

a hängt also nur von u, b nur von v ab.

Nach (2.13), (2.20) ist

$$\begin{cases} 2\mathfrak{s} = \{b_{vv}, a_{uu}, u\,a_{uu} - a_u + v\,b_{vv} - b_v,\ v^2 b_{vv} - 2v\,b_v + 2b, \\ \qquad -u^2 a_{uu} + 2u\,a_u - 2a,\ u\,a_{uu} - a_u - v\,b_{vv} + b_v\}, \end{cases} \tag{4.7}$$

und aus (2.15), (2.16) findet man

$$2G = -\,a\,a_{uu} + \tfrac{1}{2}a_u^2 + b\,b_{vv} - \tfrac{1}{2}b_v^2, \tag{4.8}$$

$$h = \tfrac{1}{2}a_{uuu}, \quad k = \tfrac{1}{2}b_{vvv}. \tag{4.9}$$

Aus (4.7) sieht man, daß — wie schon DARBOUX hervorgehoben hat — jede infinitesimale Verbiegung einer Quadrik mit reellen Geraden sich linear zusammensetzen läßt aus zwei speziellen, für die die zugehörige W-Kongruenz in eine Geradenschar der Quadrik ausartet.

Faßt man x_1, x_2, x_3 als Cartesische Koordinaten auf, so geben die Formeln die allgemeinste Verbiegung des hyperbolischen Paraboloids $z = x\,y$; sie hat den Drehriß

$$\mathfrak{r} = \{b_{vv}, a_{uu}, u\,a_{uu} - a_u + v\,b_{vv} - b_v\} \tag{4.10}$$

und den Translationsriß

$$\mathfrak{s} = \{v^2 b_{vv} - 2v\,b_v + 2b,\ -u^2 a_{uu} + 2u\,a_u - 2a,\ u\,a_{uu} - a_u - v\,b_{vv} + b_v\}. \tag{4.11}$$

Beide sind Translationsflächen mit ebenen erzeugenden Kurven, die eine Parameterdarstellung von der Gestalt

$$\{f', t\,f' - f, 0\} \tag{4.12}$$

mit beliebigem $f(t)$ besitzen. Die Parameterkurven der Fläche (4.10) erhält man nämlich, wenn man für f entweder a_u oder b_v einsetzt; für die von (4.11) ist

$$f = -\,2a + u\,a_u, \quad f = -\,2b + v\,b_v. \tag{4.13}$$

Um zu den infinitesimalen Verbiegungen der Einheitskugel zu gelangen, wählen wir u und v konjugiert komplex und führen die Koordinatentransformation durch

$$2\check{x}_0 = x_0 + x_3,\ 2\check{x}_1 = x_1 + x_2,\ 2i\,\check{x}_2 = x_1 - x_2,\ 2\check{x}_3 = x_0 - x_3. \tag{4.14}$$

Die Gl. (4.2) geht dabei über in

$$0 = -\,x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{4.14}$$

a und b sind jetzt differenzierbare Funktionen einer komplexen Veränderlichen, also reguläre analytische Funktionen. Damit wir reelle Schraubrisse erhalten, müssen die beiden ersten Komponenten von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ in (4.10) und (4.11) jeweils konjugiert komplex, die dritten Komponenten reell sein. Daher

müssen a und b für konjugierte komplexe u und v konjugiert komplex sein:

$$a = f(u), \quad b = \bar{f}(\bar{u}). \tag{4.15}$$

Zu jeder infinitesimalen Verbiegung eines Teiles einer Kugelfläche gehört eine im entsprechenden Gebiet der komplexen u-Ebene reguläre analytische Funktion $f(u)$ und umgekehrt.

Die Verbiegung ist nach (4.9) *dann und nur dann eine Bewegung, wenn f ein quadratisches Polynom ist.*

Setzt man

$$u = \xi + i\eta, \tag{4.16}$$

so sind ξ und η bekanntlich Cartesische Koordinaten der stereographischen Projektion der Kugel (4.14) aus dem Nordpol auf die Äquatorebene.

Dem Nordpol entspricht dabei der Punkt $u = \infty$ der u-Ebene.

Jede ganze Funktion liefert eine infinitesimale Verbiegung der im Nordpol punktierten Kugelfläche.

Ebenso leicht beweist man, daß die volle Kugelfläche infinitesimal unverbiegbar ist:

Jede infinitesimale Verbiegung der Kugelfläche mit differenzierbarem Schraubriß ist eine Bewegung.

Denn nach (2.7) gehört zu ihr eine für endliche u überall reguläre Funktion $a = f(u)$. Da aber die Komponenten des Schraubrisses beschränkt sind, gilt das nach (4.10) auch für f_{uu}, also f''. Diese zweite Ableitung ist daher konstant, es ist $f''' = h = 0$ und unsere Verbiegung ist eine Bewegung, wie gezeigt werden sollte.

Diese Sätze gelten natürlich auch für projektiv gleichwertige Flächen, es folgt die Unverbiegbarkeit des Ellipsoids und die Verbiegbarkeit des punktierten Ellipsoids, des elliptischen Paraboloids und von jeder Schale des zweischaligen Hyperboloids.

Aus (4.10) folgt weiter der Satz:

Wenn bei einer infinitesimalen Verbiegung von einem Teilstück eines elliptischen Paraboloids die Stellen, an denen der Drehvektor zur Achse der Fläche parallel ist, einen zum Flächenstück gehörigen Häufungspunkt besitzen, so ist die Verbiegung eine Bewegung[18]).

Denn an diesen Stellen ist $a_{uu} = b_{vv} = 0$, es handelt sich also um Nullstellen von f''; wenn diese sich aber irgendwo häufen, so verschwindet diese Funktion aber bekanntlich überall in ihrem Definitionsgebiet.

Natürlich kann man leicht weitere Starrheitssätze dieser Art formulieren und beweisen.

[18]) Ähnliche Sätze bei MINAGAWA, T., u. T. RADO: Osaka Math. J. 4, 241—285 (1952). Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich Herrn K. GROTEMEYER. Die dort zugrunde gelegten Gln. (6), (7), (8) gelten für beliebige Parameter und entsprechen für Asymptotenlinienparametern unsern Gln. (2.8). Bei ihrer Verwendung kommt man mit zweimaliger stetiger Differenzierbarkeit der Fläche aus, verzichtet aber auf projektive Invarianz des Formelapparates.

Für die Geradenkoordinaten folgen aus (4.14) die Transformationsformeln

$$(4.17)\qquad \begin{cases} 4\check{g}_{01} = g_{01} + g_{02} + g_{31} - g_{23} \\ 4i\check{g}_{02} = g_{01} - g_{02} + g_{31} + g_{23} \\ 2\check{g}_{03} = -g_{03} \\ 4i\check{g}_{23} = -g_{01} + g_{02} + g_{31} + g_{23} \\ 4\check{g}_{31} = g_{01} + g_{02} - g_{31} + g_{23} \\ 2i\check{g}_{12} = -g_{12}. \end{cases}$$

Wendet man sie auf den Schraubriß (4.7) an, so erhält man für den Drehriß und den Translationsriß der allgemeinsten Verbiegung von Kugelflächenstücke die Darstellung

$$(4.18)\qquad \mathfrak{r} = \begin{cases} \Re\left[-f + uf' + \frac{1-u^2}{2}f''\right] \\ \Re\left[i\left(f - uf' + \frac{1+u^2}{2}f''\right)\right] \\ \Re[f' - uf'']\,, \end{cases}$$

$$(4.19)\qquad \check{\mathfrak{s}} = \begin{cases} \Re\left[i\left(f - uf' + \frac{-1+u^2}{2}f''\right)\right] \\ \Re\left[f - uf' + \frac{1+u^2}{2}f''\right] \\ \Re[i(-f' + uf'')]\,. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich die bekannte Tatsache, daß beide Risse assoziierte Minimalflächen sind; man erhält $\check{\mathfrak{s}}$, indem man in der Darstellung von $\mathfrak{r}$ die Funktion f durch if ersetzt.

Wir erwähnen diese Tatsache hier, weil sie sich verallgemeinern läßt auf die Relativgeometrie in bezug auf einen konvexen Eichkörper nach E. MÜLLER und W. SÜSS.

Zu jeder Euklidischen Verbiegung eines Teiles der Eichfläche gehört ein Paar von adjungierten Relativminimalflächen in bezug auf diese Eichfläche, das sich integrallos durch Größen der Eichfläche darstellen läßt, wenn man die zugehörige Lösung der Grundgleichungen (2.8) *für die Eichfläche kennt.*

Auf diese Dinge, die in engstem Zusammenhang mit dem zur Verbiegung gehörigen DARBOUXschen Flächenkranz stehen, gehen wir hier nicht näher ein; wir erwähnen nur, daß die fraglichen Paare von Relativminimalflächen, wenn man ihre Koordinaten zum Sechservektor des Schraubrisses zusammenfaßt, invariant sind bei projektiver Abbildung des Eichkörpers.

Freiburg i. B., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. November 1954.)

GROTEMEYER, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 17—22 (1955)

Die eindeutige Bestimmung einer Klasse von offenen, vollständigen Flächen durch die Metrik.

Herrn WILHELM SÜSS zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

K. P. GROTEMEYER.

1. Nach G. HERGLOTZ [*1*] sind zwei dreimal stetig differenzierbare[1]), isometrische Eiflächen im dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 kongruent oder symmetrisch. Man kann daher die Frage stellen, ob es konvexe Flächen gibt, die sich ins Unendliche erstrecken („unendliche Eiflächen") und durch die Metrik eindeutig bestimmt sind. Wir wollen dabei zunächst Flächen betrachten, die im „Endlichen" weder einen Rand noch eine Singularität besitzen, die dreimal stetig differenzierbar und positiv gekrümmt sind. Kurz gesagt wollen wir offene, vollständige[2]), dreimal stetig differenzierbare Flächen mit positiver GAUSSscher Krümmung K im E_3 betrachten.

2. Ganz ähnlich wie J. HADAMARD [*4*] die möglichen Gestalten der geschlossenen (vollständigen) Flächen mit $K>0$ im E_3 als „Eiflächen" beschrieben hat, so lassen sich auch, wie J. J. STOKER [*5*] gezeigt hat, die gestaltlichen Verhältnisse der offenen, vollständigen konvexen Flächen im E_3 beschreiben[3]). Danach besitzt nämlich jede Fläche der genannten Klasse in mindestens einer Richtung eine einwertige Projektion. [Wählt man diese Richtung als z-Richtung eines x, y, z-Koordinatensystems im E_3, so läßt sich jede Fläche der genannten Klasse in der Form $z=f(x, y)$ darstellen mit eindeutigem $f(x, y)$.] Ferner liegt das sphärische Normalenbild einer solchen Fläche $\mathfrak{H}$ ganz auf einer Halbkugel; woraus man leicht auf

$$\iint^{(\mathfrak{H})} K\, do \leq 2\pi$$[4])

schließen kann.

---

[1]) Nach A. WINTNER [*2*] läßt sich diese Differenzierbarkeitsvoraussetzung verringern. Die gleiche von A. WINTNER angewandte Methode dürfte auch bei anderen Kongruenzsätzen von isometrischen Flächen zum Ziele führen.

[2]) Vgl. dazu H. HOPF u. W. RINOW [*3*]. Eine Fläche heißt vollständig, wenn es auf derselben keine divergente und beschränkte Punktfolge gibt.

[3]) STOKER klassifiziert die gestaltlichen Verhältnisse aller vollständigen, konvexen Flächen im E_3. Er gewinnt dadurch das HADAMARDsche Resultat mit.

[4]) Man erkennt übrigens leicht, daß dann und nur dann für eine Fläche $\mathfrak{H}$ der oben definierten Klasse $\iint^{(\mathfrak{H})} K\, do = 2\pi$ ist, falls in der für $\mathfrak{H}$ möglichen Darstellung $z=f(x, y)$ $\sqrt{x^2+y^2}\cdot z^{-1}\to 0$ für alle Wege, die sich auf der Fläche $\mathfrak{H}$ ins Unendliche erstrecken.

3. Wir wollen jetzt folgenden Kongruenzsatz beweisen:

Satz A: *Es sei* $\mathfrak{U}$ *eine offene, vollständige Fläche, die dreimal stetig differenzierbar ist und positive* GAUSSsche *Krümmung* K *besitzt. Ferner sei*

$$\iint\limits^{(\mathfrak{U})} K\,do = 2\pi.$$

Dann ist jede zu $\mathfrak{U}$ *isometrische Fläche* $\mathfrak{U}^*$, *die ebenfalls dreimal stetig differenzierbar ist, zu* $\mathfrak{U}$ *kongruent oder symmetrisch.*

Beweis[5]). Es sei $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor und ξ der Normaleneinheitsvektor der Fläche $\mathfrak{U}$. ξ weise in das „Innere" von $\mathfrak{U}$. (Dann ist neben K auch die mittlere Krümmung H positiv; d.h. der Tensor B_{ik} der zweiten Fundamentalform von $\mathfrak{U}$ ist positiv definit.) Ferner soll $\mathfrak{e}$ der Einheitsvektor in Richtung der einwertigen Projektion sein. Wir können daher auf Grund des STOKERschen Ergebnisses das Vorzeichen von $\mathfrak{e}$ so wählen, daß

$$(\mathfrak{e}\,\xi) \geq 0 \tag{1}$$

wird auf der Fläche $\mathfrak{U}$.

Aus $\iint\limits^{(\mathfrak{U})} K\,do = 2\pi$ folgt, daß das sphärische Normalenbild von $\mathfrak{U}$ von einem Großkreis berandet wird[6]). Als isometrisches dreimal stetig differenzierbares Bild von $\mathfrak{U}$ ist auch die Fläche $\mathfrak{U}^*$ eine offene, vollständige Fläche[7]), und auch das sphärische Normalenbild dieser Fläche wird von einem Großkreis berandet. Wir wollen jetzt den Integralsatz

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,\xi\,do = \oint \{(a-a^*)\,\dot{\mathfrak{x}} + (b-b^*)\,\eta\}\,ds \tag{2}$$

anwenden. Vgl. [7], [9]. Dazu legen wir zunächst die Tangentialebene T_0 an die Fläche $\mathfrak{U}$, die den Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ besitzt. Mit T_z bezeichnen wir diejenige Ebene, die parallel zu T_0 ist im Abstande $z \geq 0$ und $\mathfrak{U}$ trifft. Das Flächenstück von $\mathfrak{U}$, welches zwischen T_0 und T_z liegt, heiße $\mathfrak{U}_z$. Die ebene Randkurve von $\mathfrak{U}_z$ werde mit $\partial\mathfrak{U}_z$ bezeichnet. Auf dieses Flächenstück $\mathfrak{U}_z$[8]) und das diesem Gebiet isometrisch entsprechende Gebiet auf der Fläche $\mathfrak{U}^*$ wenden wir jetzt (2) an, nachdem man den Integralsatz skalar mit $\mathfrak{e}$ multipliziert hat:

$$\iint\limits^{(\mathfrak{U}_z)} \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,(\mathfrak{e}\,\xi)\,do = \oint\limits^{\partial\mathfrak{U}_z} (b-b^*)\,(\mathfrak{e}\,\eta)\,ds. \tag{3}$$

---

[5]) Wegen der Bezeichnungsweise sei auf [6], [7], [8] verwiesen.

[6]) $\mathfrak{e}$ steht senkrecht auf der Ebene dieses Großkreises und liegt dadurch bis auf das Vorzeichen fest.

[7]) $\mathfrak{U}^*$ besitzt die gleichen Eigenschaften wie $\mathfrak{U}$. Daher läßt sich auf $\mathfrak{U}^*$ ebenfalls die Normalenrichtung so festlegen, daß B^*_{ik}, der Tensor der zweiten Fundamentalform von $\mathfrak{U}^*$ positiv definit wird.

[8]) $\mathfrak{U}_z$ ist im Sinne von [8] eine ebenrandige Mütze. Man kann daher $\mathfrak{U}$ auch als eine „unendliche Mütze" auffassen.

Für das links stehende Oberflächenintegral wollen wir $G(\mathfrak{U}_z)$ und für das Randintegral I_z schreiben. Da auf $\mathfrak{U}$ stets $K>0$ ist, so ist wegen $\|A_{ik}\| \leq 0$ [7] und nach (1)

$$G(\mathfrak{U}_z) \leq 0; \quad I_z \leq 0. \tag{4}$$

Es sei jetzt $0 \leq z_1 \leq z$, und $\mathfrak{U}_z - \mathfrak{U}_{z_1}$ bezeichne das zwischen T_z und T_{z_1} gelegene Flächenstück von $\mathfrak{U}$. Dann ist wie in (4)

$$G(\mathfrak{U}_z - \mathfrak{U}_{z_1}) = I_z - I_{z_1} \leq 0; \tag{5}$$

woraus nach (4) folgt:

$$I_z \leq I_{z_1} \leq 0 \quad \text{mit} \quad (0 \leq z_1 \leq z). \tag{6}$$

Wir wollen jetzt das folgende Lemma benutzen:

Lemma: *Es gilt* $I_z \to 0$ *bei* $z \to \infty$.

Nach Gl. (6) folgt dann das Verschwinden von I_z für alle $z \geq 0$. Es ist also auch

$$G(\mathfrak{U}_z) = \iint^{(\mathfrak{U}_z)} \frac{\|A_{ik}\|}{g} (\mathfrak{e}\,\xi)\, do = 0$$

für alle $z \geq 0$. Die $\mathfrak{U}_z$ erschöpfen aber für $z \to \infty$ die Fläche $\mathfrak{U}$. Daher ist, weil der Integrand nirgends positiv ist, $\|A_{ik}\| = 0$ auf $\mathfrak{U}$. Dann ist aber notwendig sogar $A_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik} = 0$, woraus die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ folgt. Damit ist der Satz A bewiesen.

Beweis des Lemmas. Es ist

$$0 \leq -I_z = -\oint^{\partial \mathfrak{U}_z} (b - b^*)\,(\mathfrak{e}\,\eta)\, ds.$$

$\mathfrak{e}$ fällt mit der Binormalen $\mathfrak{b}$ von $\partial \mathfrak{U}_z$ zusammen:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{b} = \frac{1}{|k|}\{b\,\eta + c\,\xi\} = -\sin\varphi\,\eta + \cos\varphi\,\xi$$

vgl. [8]. $|k| \sin\varphi = -b \geq 0$; $|k| \cos\varphi = c \geq 0$. [Weil B_{ik} und B^*_{ik} positiv definit sind, ist $b \leq 0$, $b^* \leq 0$. Aus (1) folgt $c \geq 0$.]

Wir können daher schreiben:

$$0 \leq -I_z = \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} (b - b^*) \sin\varphi\, ds. \tag{7}$$

Führen wir jetzt noch die Bogenlänge σ^* des sphärischen Normalenbildes von $\mathfrak{U}^*$ ein: $\frac{d\sigma^*}{ds} = |\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}|$, dann folgt aus (7)

$$0 \leq -I_z \leq \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* - \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} |k| \sin^2\varphi\, ds$$

oder

$$0 \leq -I_z \leq \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* - \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} |k|\, ds + \oint^{\partial \mathfrak{U}_z} |k| \cos^2\varphi\, ds.$$

Nun ist $\oint_{\partial \mathfrak{U}_z} |k|\, ds = 2\pi$ und wegen $c = |k| \cos\varphi \geqq 0$ folgt

$$0 \leqq -I_z \leqq \oint_{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* - 2\pi + \oint_{\partial \mathfrak{U}_z} c\, ds. \tag{8}$$

Benutzen wir jetzt noch die Formel von GAUSS-BONNET für unser Flächenstück $\mathfrak{U}_z$:

$$\iint_{(\mathfrak{U}_z)} K\, do = 2\pi - \oint_{\partial \mathfrak{U}_z} c\, ds,$$

so erhalten wir schließlich

$$0 \leqq -I_z \leqq \oint_{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* - \iint_{(\mathfrak{U}_z)} K\, do. \tag{9}$$

Da das sphärische Normalenbild der Fläche $\mathfrak{U}^*$ von einem Großkreis berandet wird, so gilt

$$\lim_{z\to\infty} \oint_{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* = 2\pi.^{9})$$

Weiter ist ja

$$\lim_{z\to\infty} \iint_{(\mathfrak{U}_z)} K\, do = 2\pi.$$

Aus (9) erhalten wir daher

$$I_z \to 0 \quad \text{bei} \quad z \to \infty. \tag{10}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

4. Der vorliegende Satz A ist unter zusätzlicher Bedingung[10]) mit gänzlich anderen Methoden zuerst von A. D. ALEKSANDROV und A. V. POGORELOV [*10*] für Rotationsflächen der hier betrachteten Flächenklasse bewiesen worden. Später hat dann POGORELOV den Satz unter Beibehaltung der zusätzlichen Bedingung bei schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und beliebigen Flächen der hier behandelten Klasse bewiesen. Allerdings sind diese Untersuchungen recht umfangreich. Vgl. [*11*].

5. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die hier behandelten „unendlichen Eiflächen" mit 2π als curvatura integra im Gegensatz zu den „endlichen Eiflächen" im allgemeinen infinitesimal verbiegbar sind. Das zeigt schon das elliptische Paraboloid $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Die infinitesimale Verbiegung führt hier

---

[9]) Man kann übrigens leicht zeigen, daß

$$2\pi \sqrt{1 - \min_{\partial \mathfrak{U}_z} (\mathfrak{e}^* \xi^*)^2} \leq \oint_{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* \leq 2\pi$$

ist, woraus ebenfalls sofort $\lim_{z\to\infty} \oint_{\partial \mathfrak{U}_z} d\sigma^* = 2\pi$ abzulesen ist.

[10]) Diese läßt sich in der hier benutzten Bezeichnungsweise so darstellen:

$$\oint_{\partial \mathfrak{U}_z} ds \cdot \left\{ 2\pi - \iint_{(\mathfrak{U}_z)} K do \right\} \to 0 \quad \text{bei} \quad z \to \infty.$$

auf die Potentialgleichung $\zeta_{xx}+\zeta_{yy}=0$[11]). Jeder in der ganzen x, y-Ebene regulären, nicht konstanten Lösung entspricht eine nicht triviale infinitesimale Verbiegung des Paraboloids.

6. Naturgemäß stellt sich jetzt die Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit durch die Metrik von offenen, vollständigen Flächen mit positiver Gaussscher Krümmung, für die $\iint K\,do<2\pi$ ist. Von diesen Flächen hat Olovjanišnikov [*14*] gezeigt, daß sie ohne zusätzliche Bedingungen nicht eindeutig bestimmt sind. Er gab sogar den „Willkürgrad" beim Aufbau einer zu einer gegebenen isometrischen Fläche dieser Klasse an. Als wesentlichstes Hilfsmittel wird dabei der *Grenzkegel*[12]) benutzt, der wegen $\iint K\,do<2\pi$ sicher nicht entartet ist. Der Willkürgrad beim Aufbau einer, zu einer gegebenen isometrischen Fläche, besteht nun im wesentlichen darin, daß man eine konvexe Kegelfläche vorschreiben darf und dazu dann eine zur gegebenen isometrische Fläche konstruieren kann, die diesen Kegel als Grenzkegel besitzt. Allerdings kann dieser Kegel nicht gänzlich willkürlich vorgeschrieben werden, sondern er muß so beschaffen sein, daß sein sphärisches Normalenbild (d.i. eine Kurve) auf der Kugel ein Gebiet begrenzt, das den gleichen Inhalt besitzt wie das sphärische Normalenbild der gegebenen Fläche, also gleich $\iint K\,do$ ist. Dieses Ergebnis von Olovjanišnikov gibt natürlich jetzt Veranlassung, die Frage zu stellen, ob eine solche Fläche durch den Grenzkegel eindeutig bestimmt ist. (Das heißt: Sind zwei isometrische Flächen der betrachteten Klasse mit kongruenten Grenzkegeln selbst kongruent oder symmetrisch?) Auf diese und ähnliche Fragen soll im Rahmen einer etwas größeren Untersuchung eingegangen werden.

7. Ganz ähnlich wie bei Kongruenzaussagen für andere Flächenklassen[13]) kann man auch hier den Satz A ausdehnen auf solche konvexen Flächen, die sich ins „Unendliche" erstrecken und im „Endlichen" von endlich vielen Rembsschen Rändern[14]) berandet werden. Allerdings müssen dann auch hier wieder die Fernpunkte der Flächen auf dem sphärischen Normalenbild einem Großkreis entsprechen. Für isometrische Rembssche Ränder verschwindet nämlich das Randintegral des Herglotzschen und das Randintegral des hier verwandten Integralsatzes.

---

[11]) ζ ist die z-Komponente des Deformationsvektors $\delta\mathfrak{x}$ beim infinitesimalen Verbiegungsprozeß: $\zeta=(\mathfrak{e}\,\delta\mathfrak{x})$. — Setzt man dagegen voraus, daß ζ beschränkt sein soll auf der gesamten Fläche, so folgt aus einem Satz von S. Bernstein [*12*], daß alle offenen, vollständigen Flächen mit $K>0$ die über der ganzen x, y-Ebene definiert sind, gegenüber diesen infinitesimalen Verbiegungen starr sind. Dieses Ergebnis stammt von J. J. Stoker [*13*].

[12]) Es sei $\mathfrak{P}$ eine unbeschränkte Fläche der betrachteten Klasse. Q sei ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}_n$ ist die durch zentrale Homothetie mit dem Zentrum Q und dem Ähnlichkeitsverhältnis $1/n$ aus $\mathfrak{P}$ hervorgehende Fläche. Man erkennt leicht, daß $\mathfrak{P}_n$ bei $n\to\infty$ in eine konvexe Kegelfläche, den sog. Grenzkegel übergeht.

[13]) Man denke etwa an den Kongruenzsatz für Eiflächen.

[14]) Das sind Randkurven eines Flächenstückes, längs denen der Flächennormalenvektor konstant ist. Längs einem Rembsschen Rand ist also stets $a=0$, $b=0$. Vgl. [*15*].

Literatur.

[1] Herglotz, G.: Über die Starrheit der Eiflächen. Abh. math. Sem. Hans. Univ. **15**, 127—129 (1943). — [2] Wintner, A.: On isometric surfaces. Amer. J. of Math. **74**, 198—214 (1952). — [3] Hopf, H., u. W. Rinow: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Math. Helv. **3**, 209—225 (1931). — [4] Hadamard, J.: Bull. Soc. Math. de France **31**, 300—301 (1903). — [5] Stoker, J. J.: Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume. Comp. Math. **3**, 55—89 (1936). — [6] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 4. Aufl., Bd. I. Berlin 1945. — [7] Grotemeyer, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253—268 (1952). — [8] Grotemeyer, K. P.: Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen. Math. Z. **59**, 278—289 (1953). — [9] Grotemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand. Math. Z. **58**, 41—45 (1953). — [10] Aleksandrov, A. D., u. A. V. Pogorelov: Die eindeutige Bestimmtheit der konvexen Rotationsflächen. Mat. Sbornik, n. S. **26** (68), 183—204 (1948). — [11] Pogorelov, A. V.: Eindeutige Bestimmtheit konvexer Flächen. (Russisch.) Trudy Matem. Instit. Steklova. Moskau-Leningrad 1949. — [12] Bernstein, S.: Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Z. **26**, 551—558 (1927). — [13] Stoker, J. J.: Open convex surfaces which are rigid. Studies and Essays presented to R. Courant, S. 407 ff. New York 1948. — [14] Olovjanišnikov, S. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen. (Russisch.) Mat. Sbornik, n. S. **18** (60), 429—440 (1946). — [15] Rembs, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Ber. Akad. Wiss. Berlin **1930**, 123—133.

Institut für Geometrie der Technischen Universität Berlin.

(Eingegangen am 20. Oktober 1954.)

BARTHEL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 23—36 (1955)

Variationsprobleme der Oberflächenfunktion in der Finslerschen Geometrie.

Herrn WILHELM SÜSS zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

WOLDEMAR BARTHEL.

Einleitung.

In seiner Dissertation „Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen" und in späteren Arbeiten hat P. FINSLER die geometrische Methode in den Vordergrund seiner Untersuchungen gestellt. So wird zunächst aus der *allgemeinen Metrik* eine *Winkelmessung* abgeleitet und mit diesen beiden Begriffen die Krümmung einer Kurve definiert. Die Flächenkrümmungen werden hiernach auf die Krümmungen gewisser Flächenkurven zurückgeführt.

Später hat H. BUSEMANN aus der allgemeinen Längenmessung des FINSLERschen Raumes einen *Inhaltsbegriff* abgeleitet, der allerdings nicht rein differentialgeometrischer Natur ist, da die Indikatrix in ihrer ganzen Ausdehnung benötigt wird. Das Inhaltsmaß erlaubt nun eine sehr einfache Verallgemeinerung der *Sinusfunktion*, wodurch wiederum die Grundlage für Krümmungsuntersuchungen von Kurven und Flächen gegeben ist. Während diesen Betrachtungen im MINKOWSKIschen Raum (vgl. [6] und [11]) keine prinzipiellen Schwierigkeiten entgegenstehen, sind beim Übergang zur FINSLERschen Geometrie noch weitgehende Modifikationen nötig. Natürlich läßt sich die erste Kurvenkrümmung in einfacher Weise festlegen, da eine Klasse von Kurven, denen man die Krümmung Null zuschreiben kann, unmittelbar gegeben ist, nämlich die Extremalen der Längenmessung (vgl. [8] und [12]). Will man jedoch die Flächenkrümmung entsprechend erklären, so fehlen jene Flächen, die wie die Ebenen des MINKOWSKIschen Raumes als Norm für die Krümmungsdefinition dienen können. Diese Flächenklasse muß vielmehr erst festgelegt werden, was aber bereits die Wahl einer *Parallelverschiebung von Flächenelementen* für einen Spezialfall bedeutet.

Bei der Festlegung einer Parallelverschiebung erweist es sich als notwendig, streng zwischen dem Vergleich von *Vektoren* und dem von *Hyperflächenelementen* zu unterscheiden (vgl. [12]). Man wird also eine Vergleichsmöglichkeit für ein Vektorfeld X^i oder für ein Feld von Hyperflächenelementen, dargestellt als Vektordichten $\mathfrak{p}_i$ vom Gewicht (-1), durch *je ein invariantes Differential*

$$D X^i = d X^i + X^k \gamma_k{}^i{}_h(x, X)\, d x^h \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D}\,\mathfrak{p}_i = d\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k \Gamma_i^k{}_h(x, \mathfrak{p})\, d x^h$$

definieren, das in den gewöhnlichen Differentialen linear ist. Die Forderung der *Inhaltsinvarianz bei Parallelverschiebung* eines Vektors oder eines Hyperflächenelementes koppelt zwar die $\gamma_k^i{}_h$ mit der Längenfunktion und die $\Gamma_i^k{}_h$ mit der Oberflächenfunktion, bestimmt aber diese Koeffizienten noch nicht vollständig. Ein solches Differential von *Vektoren* wurde durch E. CARTAN in [4] aufgestellt. Ebenso gehört das in [9] eingeführte Vektordifferential zu der genannten Form. Dagegen besitzen die von E. CARTAN in [3] und F. ALARDIN in [5] benutzten Differentiale einer *Vektordichte* $\mathfrak{p}_i$, die dort allerdings in Vektorform $p_i = \sqrt{g(x, \mathfrak{p})}\, \mathfrak{p}_i$ geschrieben wird, die Gestalt

$$\mathfrak{D}\, p_i = \left(\delta_i^k - p_i C^k(x, \mathfrak{p})\right) d p_k - p_k \Gamma_i^k{}_h(x, \mathfrak{p})\, d x^h.$$

Wie man erkennt, reduziert sich bei verschwindendem Zusatzterm $p_k \Gamma_i^k{}_h\, d x^h$ das invariante Differential nicht auf das gewöhnliche. Dies wird wohl durch das in [12] angegebene Differential

$$\mathfrak{D}\, p_i = d p_i - p_k \Gamma_i^k{}_h(x, \mathfrak{p})\, d x^h$$

vermieden, aber die Vektorschreibweise $p_i = \mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{p}_i$ des Hyperflächenelementes bringt dennoch ein fremdes Element in die Betrachtungen.

In der vorliegenden Note soll ein FINSLER*scher Raum* dadurch erklärt werden, daß man *in einer Punkt-Mannigfaltigkeit die Inhaltsmessung für jede Dimension in allgemeiner Weise vorgibt.* Dies liegt nahe, weil die auf dem BUSEMANNschen Inhaltsbegriff beruhenden Untersuchungen weitgehend von dessen spezieller Konstruktion unabhängig sind. Die Inhaltsdefinition von BUSEMANN zeichnet also eine besondere Klasse von FINSLERschen Räumen aus; im allgemeinen wird jedoch zwischen den verschieden-dimensionalen Inhalten eine andere oder auch keine Bindung bestehen. Da sich unsere Darstellungen im wesentlichen mit der Oberflächenfunktion befassen sollen, werden ausschließlich die hierfür notwendigen Grundbegriffe entwickelt, nämlich die *invariante Differentiation längs eines Feldes von Hyperflächenelementen*, die aber zunächst nur bis auf einen schiefsymmetrischen Tensor $\Sigma_i^k{}_h(x, \mathfrak{p})$ bestimmt ist. Nunmehr können wir die Normalkrümmung eines Hyperflächenstreifens betrachten, die — unter einer schwachen Einschränkung für $\Sigma_i^k{}_h$ — eine *geometrische Darstellung der Hauptkrümmungen einer Hyperfläche* ermöglicht. Wieder unter allgemeinen Voraussetzungen untersuchen wir die auf der Oberflächenfunktion beruhenden Variationsprobleme und kommen so zu Bedingungen für die *Minimalhyperflächen*, die Lösungen des *isoperimetrischen Problems* sowie für die *Extremalen der Kurvenduallänge*. Schließlich sollen die Gleichungen in $\Sigma_i^k{}_h$ für die *Extremaleigenschaft der geodätischen Hyperflächen und der dualgeodätischen Linien* aufgestellt[1]) und eine Parallelverschiebung angegeben werden, die diese Eigenschaften besitzt und auch die oben erwähnte geometrische Deutung der Hauptkrümmungen

[1]) Unter anderen Voraussetzungen ist der Autoparallelismus der Extremalkurven zuerst von F. ALARDIN in [5] untersucht worden, während das allgemeine Prinzip der *gleichzeitigen* Extremaleigenschaft von Autoparallel*hyperflächen* und Autoparallel*kurven* in [9] und [10] behandelt wurde.

gestattet. Bei dieser Spezialisierung sind dann die Minimalhyperflächen und die Hyperflächen des isoperimetrischen Problems durch das Verschwinden bzw. die Konstanz der mittleren Krümmung gekennzeichnet[2]).

1. Definition des FINSLERschen Raumes.

Ein FINSLERscher *Raum* $\mathfrak{F}_n$ sei erklärt als n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit, in der für ein glattes p-dimensionales Flächenstück $x(u) \equiv x(u^1, \ldots, u^p)$ der *p-Inhalt* durch

$$J^{(p)} = \int F^{(p)}\left(x(u), \frac{\partial x}{\partial u^\varrho}(u)\right) du^1 \ldots du^p \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

gemessen wird. Dabei sollen die n Skalarfelder $F^{(p)}(x, X_\varrho)$ zunächst folgende Eigenschaften besitzen:

I. $F^{(p)}(x, X_\varrho) \geq 0$, wobei Gleichheit nur für linear abhängige Vektoren X_ϱ besteht.

II. $F^{(p)}(x, U_\varrho^\sigma X_\sigma) = |\|U_\varrho^\sigma\|| F^{(p)}(x, X_\varrho)$.

III. $F^{(p)}$ ist dreimal stetig differenzierbar.

Hieraus folgt: Die Inhaltsfunktionen behalten ihren Wert bei Vertauschung zweier ihrer Vektoren sowie bei Addition des Vielfachen eines ihrer Vektoren zu einem anderen, außerdem sind sie in jedem Vektor positiv homogen erster Ordnung, und es gilt

$$\frac{\partial F^{(p)}}{\partial X_\varrho^i} X_\sigma^i = F^{(p)} \delta_\sigma^\varrho.$$

Speziell für die Volumenfunktion erhalten wir

$$F^{(n)}(x, X_r) = \mathfrak{F}(x) \,|\|X_1 \ldots X_n\||,$$

wobei sich $\mathfrak{F}(x)$ bei Koordinatentransformationen wie eine Skalardichte vom Gewicht $(+1)$ verhält.

Von der Längen- und Oberflächenfunktion soll eine weitere Eigenschaft vorausgesetzt werden. Faßt man

$$F^{(n-1)}(x, X_\varrho) = f(x, \mathfrak{p})$$

als Funktion der kovarianten Vektordichte $\mathfrak{p}_i = \|\delta_i^k X_1^k \ldots X_{n-1}^k\|$ vom Gewicht (-1) auf und führt man die Fundamentalgrößen

$$g_{ik}(x, X) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(1)}(x, X)^2}{\partial X^i \partial X^k}; \qquad \mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, \mathfrak{p})^2}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k}$$

ein, so verlangen wir noch

IV. $g_{ik}(x, X)\, \xi^i \xi^k > 0$ für $\xi^i \neq 0$; $\mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p})\, \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_k > 0$ für $\mathfrak{P}_i \neq 0$.

Der MINKOWSKIsche *Sinus* zwischen zwei Vektorräumen in demselben Raumpunkt x des $\mathfrak{F}_n$ ist definiert durch

$$Sm(x; A_\alpha, B_\beta) = \frac{F^{(d)}(x; A_1, \ldots, A_d)\, F^{(s)}(x; A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b)}{F^{(a)}(x; A_1, \ldots, A_a)\, F^{(b)}(x; B_1, \ldots, B_b)},$$

[2]) Eine Skizze der vorliegenden Betrachtungen gaben wir in [13] und [14].

wenn der d-dimensionale Durchschnitt der beiden Vektorräume von $A_1 = B_1, \ldots, A_d = B_d$ und ihre s-dimensionale Summe von $A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b$ aufgespannt wird sowie die Dimensionszahlen der Bedingung $\mathrm{Min}(a, b) = d + 1$ genügen. Für $s = n$ können wir dem Sinus in üblicher Weise ein Vorzeichen zuordnen.

2. Differentiation längs eines Feldes von Hyperflächenelementen.

Zu der Tensordichte $\mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p})$ vom Gewicht $(+2)$ können wir, weil ihre Determinante nach IV positiv ist, durch $\mathfrak{G}^{ik}\mathfrak{G}_{jk} = \delta^i_j$ die kovariante Tensordichte $\mathfrak{G}_{jk}(x, \mathfrak{p})$ vom Gewicht (-2) einführen. Diese Fundamentaltensordichten erlauben es, durch Herauf- und Herunterziehen der Indizes den Raum der kovarianten Vektordichten vom Gewicht (-1) mit dem der kontravarianten Vektordichten vom Gewicht $(+1)$ in jedem einzelnen Raumpunkt zu identifizieren. Ein Hyperflächenelement des $\mathfrak{F}_n$ kann also jeweils durch eine dieser beiden Größen charakterisiert werden. Eine entsprechende Identifizierung gilt natürlich auch für die Tensorräume in jedem Hyperflächenelement $(x, \mathfrak{p})$.

Nunmehr soll zwischen den Räumen der Vektordichten in benachbarten Raumpunkten ein Zusammenhang und damit für ein Feld von Vektordichten eine *invariante Differentiation* definiert werden, die bezüglich der Oberflächenfunktion $f(x, \mathfrak{p})$ metrisch ist. Hierfür ist der Ansatz

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{p}_i = d\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k \Gamma^k_{i\,h}(x, \mathfrak{p})\, dx^h \tag{2.1}$$

notwendig, wobei die Koeffizienten $\Gamma^k_{i\,h}(x, \mathfrak{p})$ in $\mathfrak{p}$ homogen nullter Ordnung sind. Da diese Koeffizienten aber von der zu differenzierenden Vektordichte $\mathfrak{p}$ abhängen, kann jenes Differential nicht der Differentiationsregel für Produkte von Vektordichten genügen. Erweitert man hingegen diese Differentiation auf Tensorfelder (definiert längs eines Feldes von Hyperflächenelementen), so läßt sich in üblicher Weise ein Differentialkalkül entwickeln, der allgemeine Produkte von Tensoren nach der Produktregel zu differenzieren gestattet. Das Differential aller Tensoren ist dann festgelegt durch das einer kovarianten Tensordichte $\mathfrak{T}_i(x, \mathfrak{p})$ vom Gewicht (-1), das wir ansetzen in der Form

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{T}_i(x, \mathfrak{p}) = d\mathfrak{T}_i - \mathfrak{T}_k\left(\Gamma^k_{i\,h}\, dx^h + \frac{1}{f}\,\mathfrak{A}_i^{k\,h}\, d\mathfrak{p}_h\right). \tag{2.2}$$

Hierbei muß $\mathfrak{A}_i^{k\,h}(x, \mathfrak{p})$ eine in $\mathfrak{p}$ von nullter Ordnung homogene *Tensordichte* sein, für die $\mathfrak{A}_i^{k\,h}(x, \mathfrak{p})\,\mathfrak{p}_h = 0$ ist. Da dieser Ansatz speziell für Vektordichten in (2.1) übergehen soll, ist noch $\mathfrak{p}_k \mathfrak{A}_i^{k\,h}(x, \mathfrak{p}) = 0$ zu verlangen.

Um die Koeffizienten des invarianten Differentials festzulegen, fordern wir zunächst, daß die oben erwähnte Identifizierung der Tensorräume bei Differentiation invariant bleibt:

Postulat I: $\qquad \mathfrak{D}\,\mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p}) = 0.$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial \mathfrak{G}^{ik}}{\partial x^h} = -2\Gamma^{(ik)}_{\quad h}, \qquad f\frac{\partial \mathfrak{G}^{ik}}{\partial \mathfrak{p}_h} = -2\mathfrak{A}^{(ik)\,h}. \tag{2.3}$$

Überschiebt man diese Gleichungen mit $\mathfrak{G}_{ik}$, so folgt noch

$$(2.4)\quad \Gamma^k_{kh} = -(n-1)\,\partial_h \log\sqrt{\mathfrak{G}}, \qquad \mathfrak{A}^h \equiv \mathfrak{A}_k{}^{kh} = \overset{*}{-}(n-1)\,f\frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}_h}\log\sqrt{\mathfrak{G}},$$

wobei $\mathfrak{G}(x,\mathfrak{p}) = \|\mathfrak{G}^{rs}\|^{\frac{1}{n-1}}$ eine Skalardichte vom Gewicht $(+2)$ darstellt. Während jedoch $\mathfrak{A}^h$ eine Tensordichte ist, besitzt Γ^k_{kh} nicht die Tensoreigenschaft.

Bezeichnet man die Hyperflächenelemente eines Feldes als parallel, wenn ihr Differential verschwindet, so drückt unsere erste Forderung speziell auch die *Invarianz des Inhaltes eines Hyperflächenelementes gegenüber Parallelverschiebung* aus, wie man unmittelbar aus der Darstellung

$$f(x,\mathfrak{p})^2 = \mathfrak{G}^{ik}(x,\mathfrak{p})\,\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k$$

für die Oberflächenfunktion erkennt.

Die notwendigen Eigenschaften der Koeffizienten $\mathfrak{A}^{ikh}$ werden erfüllt, wenn man setzt:

Postulat II: $$\mathfrak{A}^{[ik]h} = 0.$$

Dann folgt nämlich aus (2.3b) die endgültige Bestimmung dieser Tensordichte

$$(2.5)\quad \mathfrak{A}^{ikh} = -\frac{f}{2}\frac{\partial \mathfrak{G}^{ik}}{\partial \mathfrak{p}_h} = -\frac{f}{4}\frac{\partial^3 f^2}{\partial \mathfrak{p}_i\,\partial \mathfrak{p}_k\,\partial \mathfrak{p}_h}.$$

Um die verbleibende Unbestimmtheit der Koeffizienten Γ^k_{ih} genauer charakterisieren zu können, ersetzen wir in (2.2) das gewöhnliche Differential $d\mathfrak{p}_h$ durch das Differential $\mathfrak{D}\mathfrak{N}_h$ der normierten Vektordichte $\mathfrak{N}_h = \frac{\mathfrak{p}_h}{f}$. Dies ergibt

$$(2.6)\quad \mathfrak{D}\mathfrak{T}_i(x,\mathfrak{p}) = d\mathfrak{T}_i - \mathfrak{T}_k(\Gamma^*{}^k_{ih}\,dx^h + \mathfrak{A}_i{}^{kh}\,\mathfrak{D}\mathfrak{N}_h),$$

wenn man $\Gamma^*{}^k_{ih} = \Gamma^k_{ih} + \mathfrak{A}_i{}^{kr}\Gamma^0_{rh}$ setzt und der Index Null eine Überschiebung mit $\mathfrak{N}_i$ bezeichnet. Die *Transformationsweise dieser gesternten Koeffizienten* beim Übergang zu neuen Koordinaten $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ mit $\Delta = \|x^{i'}_i\| \neq 0$ erkennt man leicht aus der Tatsache, daß $d\mathfrak{T}_i - \mathfrak{T}_k\Gamma^*{}^k_{ih}\,dx^h$ eine Tensordichte vom Gewicht (-1) sein muß:

$$(2.7)\quad \Gamma^*{}^{k'}_{i'h'} = x^i_{i'}\,x^{k'}_k\,x^h_{h'}\,\Gamma^*{}^k_{ih} - x^i_{i'}\,x^h_{h'}\,x^{k'}_{ih} + \delta^{k'}_{i'}\,x^h_{h'}\,\partial_h \log|\Delta|.$$

Daraus folgt speziell

$$2.8)\quad \Gamma^*{}^{k'}_{k'h'} = x^h_{h'}\left(\Gamma^*{}^k_{kh} + (n-1)\,\partial_h \log|\Delta|\right),$$

so daß die Größe

$$(2.9)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Sigma^k_{ih} = \Gamma^*{}^k_{[ih]} - \frac{1}{n-1}\delta^k_{[i}\Gamma^*{}^r_{|r|h]} \\ \qquad = \Gamma^*{}^k_{[ih]} + \delta^k_{[i}\left(\partial_{h]}\log\sqrt{\mathfrak{G}} - \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^*{}^0_{|r|h]}\right) \end{cases}$$

einen *Tensor* darstellt, der schließlich die Eigenschaft $\Sigma_0{}^k{}_k = \Gamma^*{}_0{}^k{}_k$ besitzt. In diesem schiefsymmetrischen Tensor $\Sigma_i{}^k{}_k$ drückt sich jetzt die noch bestehende Freiheit in der Wahl der invarianten Differentiation aus.

3. Normalkrümmung eines Hyperflächenstreifens.

Zur Untersuchung der Hyperflächenkrümmung muß eine Klasse von Hyperflächen ausgezeichnet werden, die analog den Hyperebenen des MINKOWSKIschen Raumes als Norm für das Krümmungsmaß dienen. Wir wählen hierzu jene Hyperflächen, für welche die Tangentialelemente bei Parallelverschiebung längs der Hyperfläche ineinander übergehen. Diese sog. *geodätischen Hyperflächen* sind also durch $\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}_i(u) \equiv 0$ gekennzeichnet. Im allgemeinen braucht zwar durch ein festes Hyperflächenelement keine geodätische Hyperfläche zu existieren, aber man kann — und dies genügt für unsere Zwecke — durch jedes Hyperflächenelement wenigstens eine Hyperfläche legen, die dort noch in zweiter Ordnung geodätisch ist:

$$\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}_i(u + du) = 0 + (du). \tag{3.1}$$

Unter einem *Hyperflächenstreifen* soll eine einparametrige Schar von Hyperflächenelementen $\left(x^i(s), \mathfrak{N}_i(s)\right)$ verstanden werden, bei der jedes Element die zugehörige Tangente der Streifenkurve enthält:

$$\mathfrak{N}_i\, x'^i = 0. \tag{3.2}$$

Ähnlich wie die Kurvenkrümmung auf dem Begriff der geodätischen Linien begründet ist, wollen wir mittels der geodätischen Hyperflächen die *Normalkrümmung eines Hyperflächenstreifens* definieren. Hierzu betrachten wir im Punkt $x(s)$ die geodätische Tangentialhyperfläche $\mathfrak{T}_s$ des Streifens und *in* ihr die geodätische Tangente $\mathfrak{t}_s$ an die Streifenkurve (geodätisch im Sinne der Metrik von $\mathfrak{T}_s$). Bezeichne ξ den Schnittpunkt von $\mathfrak{t}_s$ und $\mathfrak{T}_{s+\Delta s}$, so werde die Normalkrümmung des Hyperflächenstreifens erklärt durch

$$\lambda(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{Sm(\xi; \mathfrak{t}_s, \mathfrak{T}_{s+\Delta s})}{\Delta s}. \tag{3.3}$$

Zur Umformung dieser geometrischen Krümmungsdefinition formulieren wir zunächst die angegebene Konstruktion analytisch: $\mathfrak{T}_s$ werde durch die Gleichung $z^i(s; u^\varrho)$ gegeben und ihr zugehöriges normiertes Tangentialelement mit $\mathfrak{M}_i(s; u^\varrho)$ bezeichnet. Dann gilt

$$\mathfrak{M}_i(s; 0) = \mathfrak{N}_i(s) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_\alpha \mathfrak{M}_i(s; 0) = 0.$$

Wird ferner $\mathfrak{t}_s$ durch $y^i(s; \sigma)$ dargestellt, wo σ Bogenlängenparameter der Kurve ist, so haben wir noch

$$y^i(s; \sigma) = z^i\left(s; u^\varrho(\sigma)\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial y^i}{\partial \sigma}(s; 0) = x'^i(s).$$

Der Schnittpunkt ξ von $\mathfrak{t}_s$ und $\mathfrak{T}_{s+\Delta s}$ ist jetzt bestimmt durch

$$\xi^i = y^i(s; \Delta\sigma) = z^i(s + \Delta s; \Delta u^\varrho).$$

Nunmehr können wir den Grenzwert (3.3) berechnen. Wegen

$$\frac{\partial y^i}{\partial \sigma}(s;\Delta\sigma) = x'^i(s) + \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial \sigma}(s;0)\frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \cdots$$

$$\mathfrak{M}_i(s+\Delta s;\Delta u^\varrho) = \mathfrak{N}_i(s) + \frac{d}{ds}\mathfrak{N}_i(s)\,\Delta s + \mathfrak{M}_{i\alpha}(s;0)\,\Delta u^\alpha + \cdots$$

erhält man für den MINKOWSKIschen Sinus

$$Sm(\xi; t_s, \mathfrak{T}_{s+\Delta s}) = \mathfrak{F}(\xi)\frac{\partial y^i}{\partial \sigma}(s;\Delta\sigma)\,\mathfrak{M}_i(s+\Delta s;\Delta u^\varrho)$$

$$= \mathfrak{F}(\xi)\Big(x'^i(s)\frac{d}{ds}\mathfrak{N}_i(s)\,\Delta s + x'^i\mathfrak{M}_{i\alpha}(s;0)\Delta u^\alpha + \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial \sigma}(s;0)\mathfrak{M}_i(s;0)\frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \cdots\Big)$$

$$= \mathfrak{F}(\xi)\,x'^i\Big(\frac{d}{ds}\mathfrak{N}_i\,\Delta s - \mathfrak{N}_k\Gamma^k_{ih}z^h_\alpha(s;0)\Big(-\Delta u^\alpha + \frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma}\Delta\sigma\Big) + \cdots\Big).$$

Jetzt verbinden wir ξ und $x(s+\Delta s)$ auf der Hyperfläche $z^i(s+\Delta s, u^\varrho)$ durch eine Kurve $\tilde{u}^\varrho(\tilde{\sigma})$, welche die Streifenkurve berührt. Ist auch $\tilde{\sigma}$ Bogenlängenparameter, so folgt $\Delta u^\varrho = -\frac{\partial \tilde{u}^\varrho}{\partial \tilde{\sigma}}\Delta\tilde{\sigma} + \cdots = -\frac{\partial u^\varrho}{\partial \sigma}\Delta\tilde{\sigma} + \cdots$, und wegen $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma+\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta s} = 1$ erhalten wir schließlich

$$\lambda(s) = \mathfrak{F}(x)\,x'^i\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{N}_i}{ds}. \tag{3.4}$$

Ein Hyperflächenstreifen mit verschwindender Normalkrümmung heißt *asymptotischer Streifen*[3]. Fassen wir nun $\bar{\lambda} = \mathfrak{F}(x)\,x'^i\mathfrak{N}'_i$ als Normalkrümmung des gegebenen Streifens im MINKOWSKIschen Tangentialraum des Punktes x auf und $\bar{\lambda}_a = \mathfrak{F}(x)\,x'^i\mathfrak{N}_k\Gamma^k_{ih}x'^h$ als Normalkrümmung eines asymptotischen Streifens durch dasselbe Streifenelement, ebenfalls in der lokalen Geometrie gemessen, dann besagt die gewonnene Darstellung

$$\lambda = \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_a. \tag{3.5}$$

4. Hauptkrümmungen einer Hyperfläche.

Als *begleitendes n-Bein* einer Hyperfläche $x(u^\varrho)$ wählen wir die Größen

$$x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \qquad \mathfrak{N}^i = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_i} \quad \text{oder} \quad X^\alpha_i = \frac{1}{F^{(n-1)}}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\alpha}, \qquad \mathfrak{N}_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{f}, \tag{4.1}$$

zwischen denen die Relationen

$$x^i_\alpha\mathfrak{N}_i = 0, \quad \mathfrak{N}^i\mathfrak{N}_i = 1, \quad x^i_\alpha X^\beta_i = \delta^\beta_\alpha, \quad \mathfrak{N}^i X^\beta_i = 0$$

bestehen. Mittels des Hyperflächentensors

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta}(u) = \mathfrak{G}^{ik}(x,\mathfrak{p})\,X^\alpha_i X^\beta_k$$

[3]) Es sei bemerkt, daß im Gegensatz zur RIEMANNschen und MINKOWSKIschen Differentialgeometrie im $\mathfrak{F}_3$ asymptotische Streifen und Schmiegstreifen nicht mehr identisch sind [vgl. auch W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 4. Aufl. (1945) S. 72].

erhält man für die Fundamentaltensordichte die Zerlegung

$$\mathfrak{G}^{ik} = \mathfrak{G}^{\varrho\sigma}\, x^i_\varrho\, x^k_\sigma + \mathfrak{N}^i\, \mathfrak{N}^k. \tag{4.2}$$

Durch Überschieben mit $\mathfrak{G}_{jk} X^\tau_i$ folgt daraus $X^\tau_j = \mathfrak{G}_{jk} \mathfrak{G}^{\tau\sigma}\, x^k_\sigma$, und dies wiederum ergibt für den inversen Hyperflächentensor $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(u) = \mathfrak{G}_{ik}(x, \mathfrak{p})\, x^i_\alpha\, x^k_\beta$.

Die WEINGARTENschen *Ableitungsgleichungen* der Hyperfläche besitzen jetzt die Form

$$\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i = -\,\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha(u)\, x^i_\beta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}_i = -\,\mathfrak{B}_{\beta\alpha}(u)\, X^\beta_i, \tag{4.3}$$

wobei allerdings der Hyperflächentensor $\mathfrak{B}_{\beta\alpha} = \mathfrak{G}_{\beta\varrho}\, \mathfrak{B}^\varrho{}_\alpha$ nicht mehr symmetrisch ist:

$$\mathfrak{B}_{(\beta\alpha)} = \mathfrak{N}_i (x^i_{\beta\alpha} + \Gamma^*_{(\beta}{}^i{}_{\alpha)}), \qquad \mathfrak{B}_{[\beta\alpha]} = \tfrac{1}{2} \Sigma^0_{\beta\alpha}. \tag{4.4}$$

Um zu geometrischen Betrachtungen überzugehen, definieren wir die *Hauptkrümmungsrichtungen* $\dot{u}^\varrho$ sowie die *Hauptkrümmungen* $1/R$ der Hyperfläche durch das Eigenwertproblem

$$(\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i)\, \dot{u}^\alpha = -\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{R}\, x^i_\alpha\, \dot{u}^\alpha.$$

Die Hauptkrümmungen genügen dann der Gleichung

$$\left\| \mathfrak{B}_{\beta\alpha} - \frac{1}{R}\, \mathfrak{F}\, \mathfrak{G}_{\beta\alpha} \right\| = 0,$$

welche wegen der positiven Definitheit des induzierten Hyperflächentensors $\mathfrak{G}_{\beta\alpha}$ speziell für *symmetrisches* $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ nur reelle Wurzeln besitzt. In diesem Fall, auf den wir später noch näher zu sprechen kommen, gehen die WEINGARTENschen Ableitungsgleichungen bei Einführung von Krümmungslinienparametern in die *Formeln von* RODRIGUES über

$$\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i = -\,\frac{\mathfrak{F}}{R^{(\alpha)}}\, x^i_\alpha. \tag{4.5}$$

Bevor wir zur Diskussion der Hyperflächenkrümmung kommen, soll noch der Begriff des *sphärischen Bildes einer Hyperfläche* in einem ihrer Punkte erläutert werden. Hierbei handelt es sich um eine Abbildung der Umgebung eines Punktes der Hyperfläche auf die Einheitssphäre[4]) im MINKOWSKIschen Tangentialraum dieses Punktes. Sie wird erzeugt durch Parallelverschiebung des Hyperflächenelementes $\mathfrak{N}^i$ nach dem benachbarten Punkt, wobei natürlich die Normierung von $\mathfrak{N}^i$ erhalten bleibt. Das lokale sphärische Bild der Hyperfläche besitzt dann die Gestalt

$$n^i(u, du) = \frac{1}{\mathfrak{F}} \left(\mathfrak{N}^i(u) + \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i(u)\, du^\alpha + (du)^2 \right), \tag{4.6}$$

so daß seine Tangentenrichtungen durch

$$\frac{\partial n^i}{\partial\, du^\alpha} \equiv n^i_\alpha = \frac{1}{\mathfrak{F}}\, \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{N}^i + (du)$$

[4]) Vgl. hierzu [11] S. 368 und S. 372.

und seine zweite Grundform durch den symmetrischen Tensor

$$b_{\alpha\beta}\langle n\rangle \equiv n^i_{\alpha\beta} N_i = -\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}^i \mathcal{D}_\beta \mathfrak{N}_i + (du)$$

dargestellt werden.

Die *Normalkrümmung eines Streifens auf einer Hyperfläche* läßt sich leicht durch die Größen der Hyperfläche ausdrücken. Aus (3.4) erhält man nämlich

$$\lambda(u, \dot{u}) = -\frac{\mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{B}_{\alpha\beta}(u)\, \dot{u}^\beta \dot{u}^\alpha}{F^{(1)}(u, \dot{u})^2}, \tag{4.7}$$

wobei $F^{(1)}(u, \dot{u}) \equiv F^{(1)}\left(x(u), x_\alpha(u)\, \dot{u}^\alpha\right)$ die induzierte Längenfunktion der Hyperfläche bezeichnet. Diese Gleichung stellt ein Analogon zu dem Ausdruck [*12*] (3.3) für die Normalkrümmung einer Hyperflächenkurve dar[5]). Während aber dort der Zähler $b(u, \dot{u})$ nur homogen zweiter Ordnung in $\dot{u}^\varrho$ ist, erhalten wir jetzt im Zähler eine quadratische Form in diesen Variablen.

Um eine *geometrische Deutung der Hauptkrümmungen* einer Hyperfläche herleiten zu können, spezialisieren wir uns auf den Fall eines *symmetrischen* Hyperflächentensors $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ und führen Krümmungslinienparameter ein. Dann folgt aus den Formeln von RODRIGUES einerseits

$$F^{(1)}(x^i; n^i_\alpha)^2 = \frac{1}{(R^{(\alpha)})^2} F^{(1)}(x^i; x^i_\alpha)^2$$

sowie durch Überschieben mit $\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}_i$

$$b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle = -\frac{\mathfrak{F}}{R^{(\alpha)}} \mathfrak{B}_{\alpha\alpha}\langle x\rangle .$$

Außerdem besitzen die Streifenkrümmungen auf der Hyperfläche und ihrem sphärischen Bild in Richtung der α-ten Krümmungslinie nach (4.7) die Werte

$$\lambda^{(\alpha)}\langle x\rangle = -\frac{\mathfrak{F}\, \mathfrak{B}_{\alpha\alpha}\langle x\rangle}{F^{(1)}(x^i; x^i_\alpha)^2} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^{(\alpha)}\langle n\rangle = -\frac{b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle}{F^{(1)}(x^i; n^i_\alpha)^2}.$$

Daraus erhält man für die Hauptkrümmungen der Hyperfläche die Beziehung

$$\frac{1}{R^{(\alpha)}} = -\frac{\lambda^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\lambda^{(\alpha)}\langle n\rangle}, \tag{4.8}$$

Wie wir in [*12*] Nr. 3 und 4 darlegten, läßt sich im FINSLERschen Raum die Hyperflächenkrümmung nicht mehr durch die Gleichung [*11*] (5.17) auf die Krümmung gewisser Hyperflächenkurven zurückführen. Aber der Begriff der Streifenkrümmung erlaubt, eine analoge relativgeometrische Relation herzuleiten und damit den Hauptkrümmungen der Hyperfläche eine geometrische Interpretation zu geben.

5. Minimalhyperflächen und isoperimetrisches Problem.

Zur Untersuchung der auf der Oberflächenmessung begründeten Variationsprobleme erscheint es zweckmäßig, zunächst die erste Variation

$$\delta F^{(n-1)} = \left(\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho}\right)\delta x^i + \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\left(\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho}\delta x^i\right) \tag{5.1}$$

[5]) Im Spezialfall des RIEMANNschen und MINKOWSKIschen Raumes besteht natürlich die Gleichung $-\lambda = \varkappa\, Sm\ (x; \mathfrak{S}, \mathfrak{T})$.

der Oberflächenfunktion durch Größen des Raumes und der Hyperfläche auszudrücken. Für das erste Glied ergibt sich dabei

$$\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho} = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}(f X^\varrho_i)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^k} x^k_\varrho X^\varrho_i\right) - \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_k}\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x^s_\sigma} x^s_{\sigma\varrho} X^\varrho_i - f\frac{\partial X^\varrho_i}{\partial u^\varrho}.$$

Berücksichtigt man (4.2) und die Identität $\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x^s_\sigma} = \mathfrak{p}_k X^\sigma_s - \mathfrak{p}_s X^\sigma_k$ [6]), so folgt

$$= \frac{\partial f}{\partial x^k}\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}^k\mathfrak{p}_k X^\sigma_s x^s_{\sigma\varrho} X^\varrho_i - f\frac{\partial X^\varrho_i}{\partial u^\varrho}.$$

Wegen $f = \sqrt{\mathfrak{G}^{rs}\mathfrak{p}_r\mathfrak{p}_s}$ gilt nun

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{1}{2f}\frac{\partial \mathfrak{G}^{rs}}{\partial x^k}\mathfrak{p}_r\mathfrak{p}_s = -f\Gamma^0_{0k},$$

und weiterhin besteht die Zerlegung

$$-\frac{\partial X^\varrho_i}{\partial u^\tau} = (x^s_{\mu\tau} X^\varrho_s) X^\mu_i + \left(\frac{\partial \mathfrak{N}^s}{\partial u^\tau} X^\varrho_s\right)\mathfrak{N}_i = x^s_{\mu\tau} X^\varrho_s X^\mu_i - (\mathfrak{B}^\varrho{}_\tau + \Gamma^\varrho_{0\tau})\mathfrak{N}_i,$$

so daß wir schließlich haben

$$\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\varrho} = -f(\Gamma^0_{0i} + \Gamma^\varrho_{0\varrho} + \mathfrak{B}^\varrho{}_\varrho)\mathfrak{N}_i$$
$$= -f(\mathfrak{B}^\varrho{}_\varrho + \Gamma^k_{0k})\mathfrak{N}_i = -f(\mathfrak{B}^\varrho{}_\varrho + \Sigma_0{}^k{}_k)\mathfrak{N}_i.$$

Führt man noch die übliche Umformung des zweiten Gliedes in (5.1) durch [7]), dann erhalten wir für die *erste Variation der Oberfläche* allgemein

$$(5.2)\quad \begin{cases} \delta J^{(n-1)} = -\int (\mathfrak{B}^\varrho{}_\varrho + \Sigma_0{}^k{}_k)(\mathfrak{N}_i \delta x^i)\, dJ^{(n-1)} + \\ \qquad + \oint \left\| \mathfrak{N}^k \delta x^k \frac{\partial x^k}{\partial w^1} \cdots \frac{\partial x^k}{\partial w^{n-2}} \right\| dw^1 \ldots dw^{n-2}. \end{cases}$$

Jetzt läßt sich sofort die Bedingung für die *Minimalhyperflächen* angeben, d. h. für die Extremalen der Oberfläche bei festem $(n-2)$-dimensionalen Rand:

$$(5.3)\quad \mathfrak{B}^\varrho{}_\varrho + \Sigma_0{}^k{}_k = 0.$$

Wie man aus (5.2) erkennt, sind die Minimalhyperflächen aber auch Extremalen bezüglich der Schar von Parallelhyperflächen, welche durch Abtragen einer konstanten Distanz auf der Hyperflächentransversalen

$$\delta x^i = \text{const}\,\frac{\mathfrak{N}^i}{\mathfrak{F}}$$

definiert sind [8]).

[6]) Vgl. etwa [9] (8.7).

[7]) Vgl. die entsprechende Rechnung in [9] S. 28 und 29.

[8]) Diese Eigenschaft der Minimalhyperflächen ist das Analogon zu einem Satz von J. STEINER (Ges. Werke II, S. 176). — Zum Distanzbegriff vgl. [11] S. 367.

Wir kommen nun zur Behandlung des *isoperimetrischen Problems*[9]), d.h. wir suchen eine notwendige Bedingung für jene geschlossenen Hyperflächen, die verglichen mit den Nachbarhyperflächen von gleicher Oberfläche ein größtes Volumen einschließen. Eine Hyperfläche $x(u^\varrho)$, welche diese Extremaleigenschaft besitzt, kann man etwa durch Einführung von Polarkoordinaten in eine Hyperflächenschar $x = x(r; u^1, \ldots, u^{n-1})$ einbetten, so daß die Funktionaldeterminante positiv ist und die ursprüngliche Hyperfläche durch $r = 1$ dargestellt wird. Dann haben wir für das Volumen $J^{(n)}(r)$ die Differenz

$$J^{(n)}(1+h) - J^{(n)}(1) = \oint \int_1^{1+h} \mathfrak{F}(x) \left\| \frac{\partial x^i}{\partial r}\, x_1^i \ldots x_{n-1}^i \right\| dr\, du^1 \ldots du^{n-1}$$

und damit die Variation

$$\delta J^{(n)} = \frac{\partial J^{(n)}}{\partial r}\Big|_1 \delta r = \oint \mathfrak{F}(x) \frac{\partial x^i}{\partial r}\Big|_1 \delta r\, \mathfrak{p}_i\, du^1 \ldots du^{n-1}$$

$$\delta J^{(n)} = \oint \mathfrak{F}(x)\, (\mathfrak{N}_i\, \delta x^i)\, dJ^{(n-1)}. \tag{5.4}$$

Weil nun für unsere geschlossene Hyperfläche aus $\delta J^{(n-1)} = 0$ auch $\delta J^{(n)} = 0$ folgen soll, muß schließlich

$$\mathfrak{B}^\varrho{}_\varrho + \Sigma_0^k{}_k = \mathfrak{F}(x) \cdot \text{const} \tag{5.5}$$

sein.

6. Variation der Duallänge von Kurven.

Für eine Kurve $x(t)$ können wir jedem Tangentenvektor $\dot{x}(t)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(x)\, \dot{x}^i = \mathfrak{p}^i \tag{6.1}$$

ein Hyperflächenelement $\mathfrak{p}_i(x, \dot{x})$ zuordnen, zu dem die Kurventangente transversal ist. Dies ist eindeutig möglich, weil die Funktionaldeterminante

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}_j}\, \mathfrak{p}^i \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}_j}\, \mathfrak{G}^{ik}(x, \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}_k \right\| = \|\mathfrak{G}^{ij}\| \neq 0$$

ist. Der Kurvenpunkt $x + dx$ besitzt nun von dem Hyperflächenelement $\mathfrak{p}(x, \dot{x})$ nach [11] (3.10) die Distanz

$$d^* s \equiv \frac{\mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{p}_i}{f(x, \mathfrak{p})}\, dx^i = \frac{\mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{p}_i}{f(x, \mathfrak{p})}\, \dot{x}^i\, dt = f(x, \mathfrak{p})\, dt. \tag{6.2}$$

Die hierdurch längs einer Kurve definierte Größe $^*s$ wollen wir ihre *Duallänge* nennen.

Unsere anfangs festgelegte Abbildung zwischen den Vektoren $\dot{x}$ und den Vektordichten $\mathfrak{p}$ erlaubt es, die von $(x, \mathfrak{p})$ abhängigen Größen auch als Funktionen von $(x, \dot{x})$ zu betrachten. Zur Unterscheidung soll in diesem zweiten Fall eine Differentiation nach x^i mit $\frac{\delta}{\delta x^i}$ bezeichnet werden.

[9]) Für zweidimensionale FINSLER-Räume vgl. BUSEMANN [8] S. 288.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der *ersten Variation der Duallänge* einer Kurve über:

$$\delta f = \left(\frac{\delta f}{\delta x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta x^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\right). \tag{6.3}$$

Benutzt man die Darstellung $f = \sqrt{\mathfrak{F}^2 \mathfrak{G}_{rs}(x, \mathfrak{p})\dot{x}^r \dot{x}^s}$, so folgt zunächst

$$\frac{\delta f}{\delta x^i} = \frac{1}{2f}\left(2\mathfrak{F}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x^i}\mathfrak{G}_{rs}\dot{x}^r\dot{x}^s + \mathfrak{F}^2\frac{\partial \mathfrak{G}_{rs}}{\partial x^i}\dot{x}^r\dot{x}^s + \mathfrak{F}^2\frac{\partial \mathfrak{G}_{rs}}{\partial \mathfrak{p}_j}\frac{\delta \mathfrak{p}_j}{\delta x}\dot{x}^r\dot{x}^s\right) = f(\partial_i \log \mathfrak{F} + \Gamma^0_{0i}).$$

Wegen $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{N}_i$ erhalten wir weiterhin

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} = f\,\mathfrak{N}_i\,\partial_0 \log \mathfrak{F} + \mathfrak{F}\frac{d}{dt}\mathfrak{N}_i.$$

Beachtet man noch die aus (2.9) folgende Identität

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} + \Sigma^0_{0i} - 2\left(\partial_{[i}\log\sqrt{\mathfrak{G}} - \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]},$$

dann ergibt sich schließlich für die Variation der Duallänge

$$\delta^* s = -\int_{t_1}^{t_2}\left\{\mathfrak{F}\frac{\mathcal{D}}{dt}\mathfrak{N}_i + f\Sigma^0_{i0} - 2f\left(\partial_{[i}\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]}\right\}\delta x^i\,dt + \mathfrak{F}\mathfrak{N}_i\,\delta x^i\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{6.4}$$

Aus dieser Darstellung gewinnt man unmittelbar die Bedingung für die *Extremalkurven der Duallänge* zwischen zwei festen Punkten:

$$\mathfrak{F}\frac{\mathcal{D}}{dt}\mathfrak{N}_i = f\left\{\Sigma^0_{0i} + 2\left(\partial_{[i}\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]}\right\}. \tag{6.5}$$

Jene Kurven, bei denen die zugeordneten normalen Hyperflächenelemente $\mathfrak{p}(x, \dot{x})$ bei Parallelverschiebung längs der Kurve ineinander übergehen, nennen wir *dual-geodätische Linien*. Sie sind also durch $\frac{\mathcal{D}}{dt}\mathfrak{N}_i = 0$ gekennzeichnet.

7. Extremaleigenschaft der geodätischen Hyperflächen und dual-geodätischen Linien.

Außer bei der Einführung der Krümmungslinienparameter in Nr. 3 blieb in den bisherigen Untersuchungen der schiefsymmetrische Tensor $\Sigma^k_{ik}(x, \mathfrak{p})$ völlig unbestimmt und damit die invariante Differentiation in gewisser Weise willkürlich. Wir fragen uns jetzt zunächst, ob diese Differentiation so gewählt werden kann, daß die *geodätischen Hyperflächen* zu den Minimalhyperflächen gehören und gleichzeitig die *dual-geodätischen Linien* mit den Extremalkurven der Duallänge identisch sind. Diese Eigenschaften drücken sich nach (5.3) und (6.5) in den Bedingungen aus:

$$\begin{cases} \Sigma^k_{0k} = 0 \\ \Sigma^0_{i0} = 2\left(\partial_{[i}\log\dfrac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \dfrac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_{k]}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Man erkennt unmittelbar, daß das

Postulat III: $$\Sigma_i^h{}_h = 2\left(\partial_{[i}\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{r[i}\right)\mathfrak{N}^h\mathfrak{N}_{h]}$$

diesen Gleichungen genügt. Die Tensoreigenschaft dieses speziellen Ansatzes ist erfüllt, weil sich bereits die Größe

$$\partial_i\log\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} + \frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r\Gamma^0_{ri} = \partial_i\log\mathfrak{F} + \frac{1}{n-1}\Gamma^*{}^r_{ri}$$

nach (2.8) wie ein Tensor verhält.

Nunmehr haben wir die n^3 Gleichungen aus (2.3a) und aus dem letzten Postulat nach den Koeffizienten Γ_{ihk} aufzulösen. Dieses System läßt sich in der Form

$$\Gamma_{[i|k|h]} = -\Phi_{[i|k|h]} - \Psi_{[i|k}{}^r\Gamma_{r0|h]}, \qquad \Gamma_{(ik)h} = \tfrac{1}{2}\partial_h\mathfrak{G}_{ik} \tag{7.2}$$

schreiben, wenn man die Abkürzungen

$$\begin{cases} \Phi_{ihk} = (\mathfrak{G}_{ik} - \mathfrak{N}_i\mathfrak{N}_k)\,\partial_h\log\sqrt{\mathfrak{G}} + \mathfrak{N}_i\mathfrak{N}_k\,\partial_h\log\mathfrak{F} \\ \Psi_{ik}{}^r = -(\mathfrak{G}_{ik} - \mathfrak{N}_i\mathfrak{N}_k)\frac{1}{n-1}\mathfrak{A}^r + \mathfrak{A}_{ik}{}^r \end{cases} \tag{7.3}$$

benutzt, die nur bekannte Größen enthalten. Wir machen den Ansatz

$$\Gamma_{ihk} = \{_{ihk}\} + 2\Phi_{h[ki]} + S_{ihk}, \tag{7.4}$$

wobei das CHRISTOFFEL-Symbol $\{_{ihk}\} = \frac{1}{2}(\partial_h\mathfrak{G}_{ik} + \partial_i\mathfrak{G}_{kh} - \partial_k\mathfrak{G}_{hi})$ natürlich den Gleichungen

$$\{_{[i|k|h]}\} = 0, \qquad \{_{(ik)h}\} = \tfrac{1}{2}\partial_h\mathfrak{G}_{ik}$$

genügt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (7.2) gewinnt man das einfachere Gleichungssystem

$$S_{[i|k|h]} = -\Psi_{[i|k}{}^r\Gamma_{r0|h]}, \qquad S_{(ik)h} = 0, \tag{7.5}$$

welches sich in üblicher Weise lösen läßt[10]), da für die symmetrische Größe $\Psi_{ik}{}^r$ die Beziehungen $\Psi_{i0}{}^r = 0$ und $\Psi_{ik}{}^0 = 0$ gelten. Man erhält also

$$S_{i0h} = S_{h0i} \quad \text{und} \quad 0 = S_{00h} = S_{h00} = S_{0h0}.$$

Weiterhin folgt

$$S_{ihk} + S_{khi} + S_{hik} = 0$$

und damit

$$S_{hik} = 2\Psi_{[i|k}{}^r\Gamma_{r0|h]}. \tag{7.6}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich schließlich

$$S_{h0k} = -\Psi_{hk}{}^r(\{_{r00}\} + \partial_r\log\mathfrak{F}), \tag{7.7}$$

[10]) Vgl. etwa die sich an [12] (5.9) anschließenden Rechnungen.

womit unsere Aufgabe gelöst ist; denn nach (7.4), (7.6) und (7.7) sind die Koeffizienten Γ_{ikh} *eindeutig* bestimmt[11]).

Tatsächlich läßt sich aus der speziellen Forderung III für den Tensor Σ_i^{kh} die invariante Differentiation eindeutig festlegen, und für die zugehörige Parallelverschiebung haben sowohl die geodätischen Hyperflächen als auch die dual-geodätischen Linien die Extremaleigenschaft. Insbesondere ist dann der Hyperflächentensor $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ symmetrisch, so daß in jedem Hyperflächenpunkt genau $(n-1)$ linear unabhängige Hauptkrümmungsrichtungen existieren, in denen die Hyperfläche die Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{R^{(\alpha)}} = -\frac{\lambda^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\lambda^{(\alpha)}\langle n\rangle}$$

besitzt. Die Minimalhyperflächen sind schließlich durch das Verschwinden der mittleren Krümmung

$$H \equiv \frac{1}{n-1}\Sigma\frac{1}{R^{(\alpha)}} = 0$$

gekennzeichnet, während für die Lösungshyperflächen des isoperimetrischen Problems

$$H = \text{const}$$

eine notwendige Bedingung darstellt.

Literatur.

[1] FINSLER, P.: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Diss. Göttingen 1918. — [2] FINSLER, P.: Über die Krümmungen der Kurven und Flächen. IX. Convegno Volto, Acc. d'Italia 1940. — [3] CARTAN, E.: Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. Paris: Hermann 1933. — [4] CARTAN, E.: Les espaces de Finsler. Paris: Hermann 1934. — [5] ALARDIN, F.: L'autoparallélisme des courbes extrémales dans les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. J. Math. pur. appl. IX **27**, 255—336 (1948). — [6] BUSEMANN, H.: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950). — [7] BUSEMANN, H.: The geometry of Finsler spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **57**, 5—16 (1950). — [8] BUSEMANN, H.: On geodesic curvature in two-dimensional Finsler spaces. Ann. di Mat. IV **31**, 281—295 (1950). — [9] BARTHEL, W.: Über die Minimalflächen in gefaserten Finslerräumen. Ann. di Mat. IV **36**, 1—33 (1954). — [10] BARTHEL, W.: Über das Verhältnis der Vektorübertragung zu den Variationsproblemen in Cartanschen Räumen. Rend. Circ. Mat. di Palermo II **3**, 270—281 (1954). — [11] BARTHEL, W.: Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie. Math. Z. **58**, 358—375 (1953). — [12] BARTHEL, W.: Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen. Arch. Math. **4**, 346—365 (1953). — [13] BARTHEL, W.: Über Minkowskische und Finslersche Geometrie. Convegno di Geometria Differenziale 1953, Cremonese, Roma, 71—76, 1954. — [14] BARTHEL, W.: Zur Flächentheorie in Finslerschen Räumen. Proc. Internat. Congr. Math. II, 194—196, 1954.

[11]) Bei den in [3], [5] und [9] benutzten invarianten Differentiationen mußte zusätzlich das Nichtverschwinden einer gewissen Determinante gefordert werden. Dies entfällt hier vollkommen.

Saarbrücken, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 2. November 1954.)

LEICHTWEISS, K.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 37—49 (1955)

Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie.

Herrn WILHELM SÜSS zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

KURT LEICHTWEISS.

Bekanntlich bewies H. W. E. JUNG zum ersten Male, daß jeder konvexe Körper im n-dimensionalen, euklidischen Raum vom Durchmesser d sich stets in eine Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\,d$, aber im allgemeinen in keine kleinere Kugel einbetten läßt [1], [2], [3]. F. BOHNENBLUST [4] fand als Analogon zu diesem Satz in der Minkowski-Geometrie, daß ebenso jeder konvexe Körper im n-dimensionalen Minkowskischen Raum vom Minkowski-Durchmesser d stets in ein homothetisches Bild seines als zentralsymmetrisch vorausgesetzten Eichkörpers eingebettet werden kann, welches um den Faktor $\frac{n}{n+1}\,d$ vergrößert ist. Auch hier ist $\frac{n}{n+1}\,d$ der bestmögliche Faktor. BOHNENBLUSTs Beweisführung ist im wesentlichen algebraischer Natur; auf die Diskussion aller Fälle, wo der Faktor $\frac{n}{n+1}\,d$ nicht unterboten werden kann, geht er nicht ein. Dies soll nun im Rahmen eines rein geometrischen Beweises des BOHNENBLUSTschen Satzes nachgeholt werden, wobei sich auch eine Charakterisierung der n-Simplizes in der Minkowski-Geometrie ergeben wird. Der Eichkörper braucht dabei nicht notwendig zentralsymmetrisch zu sein. Außerdem wird noch eine zur BOHNENBLUSTschen gewissermaßen duale Abschätzung gegeben, welche den größtmöglichen Vergrößerungsfaktor eines in einem konvexen Körper liegenden homothetischen Bildes des (nicht notwendig zentralsymmetrischen) Eichkörpers mit der (geeignet definierten) Minkowskischen Dicke des konvexen Körpers in Verbindung bringt und als Analogon zu den Ungleichungen von P. STEINHAGEN [5], [6] gelten kann.

Sei M_n der n-dimensionale Minkowskische Raum mit dem konvexen Eichkörper $\mathfrak{E}$, gegeben durch die Ungleichung: $F(x_1, \ldots, x_n) = F(\mathfrak{x}) \leq 1\ (F > 0)$, wobei F positiv homogen vom ersten Grade in den Variablen x ist. Zu jedem Vektor $\mathfrak{x}$ des M_n gibt es einen gleichgerichtet parallelen Eichvektor $\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{x}}{F(\mathfrak{x})}$ vom Nullpunkt zum Rand von $\mathfrak{E}$; und verbindet $\mathfrak{x}$ etwa die Punkte P und Q von M_n, so wird die Minkowskische Länge $d(P, Q)$ von P nach Q wie folgt definiert: $d(P, Q) = d(\mathfrak{x}) = F(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{e}|}$ [1]). In M_n liege ein beschränkter, abgeschlossener, konvexer Körper $\mathfrak{K}$ vom Minkowski-Durchmesser d, welcher

[1]) Mit Absolutstrichen bezeichnen wir im folgenden die euklidischen Längen.

zweckmäßigerweise durch $d = \underset{P,Q \in \mathfrak{K}}{\text{Max}}\, d(P, Q)$ definiert ist. Wir behaupten jetzt als erstes:

Satz 1. *$\mathfrak{K}$ läßt sich in ein um $\frac{n}{n+1} d$ vergrößertes homothetisches Bild von $\mathfrak{E}$ einbetten; oder analytisch ausgedrückt: Es gibt einen Punkt Z von M_n mit $d(Z, P) \leq \frac{n}{n+1} d$ für alle P aus $\mathfrak{K}$*[2]).

Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Lemma 1. *Seien ε_1 und ε_2 zwei parallele Stützebenen an einen n-dimensionalen, konvexen Körper $\mathfrak{K}$*[3]) *und ε_s die zu ihnen parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene durch den Schwerpunkt S von $\mathfrak{K}$. Sind dann a_1 und a_2 die Abstände von ε_1 und ε_2 von ε_s, so gilt: $\frac{a_1}{a_2} \leq n$. Ein Gleichheitszeichen kann hier nur erreicht werden, wenn $\mathfrak{K}$ Projektionskegel eines auf ε_2 liegenden, $(n-1)$-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{L}$ von einem auf ε_1 liegenden Zentrum C ist.*

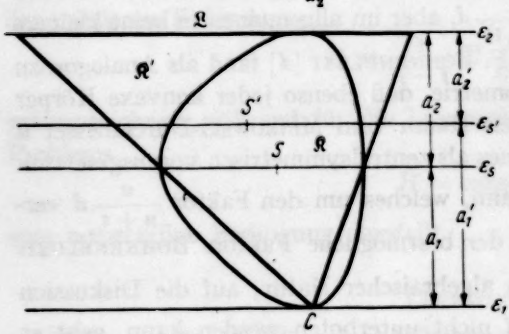


Fig. 1.

Um dies zu zeigen, schneiden wir $\mathfrak{K}$ mit ε_s und projizieren den dadurch erhaltenen Körper $\overline{\mathfrak{K}}$ von einem Randpunkt C von $\mathfrak{K}$ auf ε_1 aus auf ε_2. Durch den Schwerpunkt S' des so erhaltenen Projektionskegels $\mathfrak{K}'$ legen wir die zu ε_s parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene $\varepsilon_{s'}$, welche von ε_1 und ε_2 die Abstände a_1' und a_2' habe. Dann ist bekanntlich $\frac{a_1'}{a_2'} = n$, und wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ gilt: $a_1 \leq a_1'$, $a_2 \geq a_2'$. Es ist also $\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{a_1'}{a_2'} = n$. Offensichtlich gilt hierbei nur dann ein Gleichheitszeichen, wenn $\mathfrak{K}$ mit dem Projektionskörper $\mathfrak{K}'$ identisch ist, w. z. b. w.

Lemma 2. *Für die Abschnitte s_1 und s_2 einer durch den Schwerpunkt S eines n-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ gehenden und durch S geteilten Sehne gilt allgemein: $\frac{s_1}{s_2} \leq \text{Max}\, \frac{a_1}{a_2}$, wobei a_1 und a_2 die in Lemma 1 definierten Größen sind.*

Schneidet nämlich die durch S gehende Sehne den Rand von $\mathfrak{K}$ in A und B, so daß wir etwa $|SA| = s_1$, $|SB| = s_2$ annehmen können, so errichten wir durch B eine Stützebene ε_2 an $\mathfrak{K}$. ε_1 sei die dazu parallele andere Stützebene an $\mathfrak{K}$ und ε_s die durch S gehende, zu ε_1 parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene. Bezeichnen wir endlich mit A' den Schnittpunkt der (verlängerten)

[2]) Dieser Satz gilt auch, wenn $\mathfrak{K}$ nicht konvex ist, da sich beim Übergang von $\mathfrak{K}$ zu seiner konvexen Hülle d und Vergrößerungsfaktor nicht ändern.

[3]) Konvexe Körper seien in Zukunft stets abgeschlossen und beschränkt.

Sehne mit ε_1, so gilt nach Lemma 1 wegen $|SA| \leq |SA'|$: $\frac{s_1}{s_2} = \frac{|SA|}{|SB|} \leq \frac{|SA'|}{|SB|} = \frac{a_1}{a_2}$; d.h. a fortiori: $\frac{s_1}{s_2} \leq \mathrm{Max}\,\frac{a_1}{a_2}$ [4]), w. z. b. w.

Beweis von Satz 1. Wir können annehmen, $\mathfrak{K}$ sei n-dimensional, denn für einen niedriger dimensionalen Körper gilt eine schärfere, also um so mehr dieselbe Ungleichung. Aus Lemma 1 und Lemma 2 folgt nun sofort für einen n-dimensionalen konvexen Körper $\mathfrak{K}$: $\frac{s_1}{s_2} \leq n$ oder $\frac{1}{n} + 1 \leq \frac{s_1 + s_2}{s_1}$; d.h. $s_1 \leq \frac{n}{n+1}(s_1 + s_2)$ oder $|SA| \leq \frac{n}{n+1}|BA|$. Sei nun P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}$. Eine durch S und P gehende Sehne schneide den Rand von $\mathfrak{K}$ in A und B derart, daß etwa P auf der Strecke SA liegt. Dann gilt: $d(S, P) = \frac{|SP|}{|e|} \leq \frac{|SA|}{|e|} \leq \frac{n}{n+1}\frac{|BA|}{|e|} = \frac{n}{n+1}d(B, A) \leq \frac{n}{n+1}d$. Der Schwerpunkt S ist also ein „Zentrum" Z der in unserem Satz verlangten Art, welcher jetzt vollständig bewiesen ist, w. z. b. w.

Der Vergrößerungsfaktor $\frac{n}{n+1}d$ von Satz 1 kann nun nicht verkleinert werden, so daß wir also die Ungleichung des Satzes 1 als Analogon der Jung-schen Ungleichung in der Minkowski-Geometrie ansprechen können. Dies zeigt folgendes Beispiel: Es sei $\mathfrak{K}$ ein n-Simplex $\mathfrak{S}$; die (nach außen weisenden) Normalen auf seinen $(n-1)$-dimensionalen Seiten seien mit $\mathfrak{n}_i$ und die zu diesen Richtungen gehörenden Breiten von $\mathfrak{S}$ mit b_i bezeichnet; weiter seien E_i seine Ecken und σ_i die E_i gegenüberliegenden $(n-1)$-Seiten ($i = 0, 1, \ldots, n$; $b_i > 0$). Wir bilden den Vektor- oder Breitenkörper $\mathfrak{S}_B$ von $\mathfrak{S}$, welcher bekanntlich als geometrischer Ort der Endpunkte aller derjenigen am Nullpunkt angetragenen Vektoren definiert ist, welche jeweils die Differenz der Ortsvektoren zweier Punkte von $\mathfrak{S}$ sind. Nun folgt aus der Schwerpunktsdarstellung eines beliebigen Punkts von $\mathfrak{S}$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ mittels der E_i mit den Ortsvektoren $\mathfrak{x}_i$: $\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathfrak{x}_i \left(\lambda_i \geq 0;\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right)$. Ebenso gilt für einen beliebigen anderen Punkt von $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{y} = \sum_{k=0}^{n} \mu_k \mathfrak{x}_k \left(\mu_k \geq 0;\ \sum_{k=0}^{n} \mu_k = 1\right)$. Hieraus folgt also für den (beliebigen) Punkt von $\mathfrak{S}_B$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x} - \mathfrak{y}$: $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathfrak{x}_i - \sum_{k=0}^{n} \mu_k \mathfrak{x}_k = \sum_{i,k=0}^{n} \lambda_i \mu_k (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k)$, wobei $\lambda_i \mu_k \geq 0$ und $\sum_{i,k=0}^{n} \lambda_i \mu_k = 1$ ist. Ganz $\mathfrak{S}_B$ liegt also in der konvexen Hülle seiner Punkte $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k$ und ist, da es selbst konvex ist, deshalb ein Polyeder mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit den $n(n+1)$ verschiedenen Ecken $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k$ $(i \neq k)$. Es wird nämlich von den zur Richtung von $-\mathfrak{n}_i$ orientiert orthogonalen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen im Abstand b_i vom Nullpunkt gestützt, deren $\mathfrak{S}_B$ enthaltende Halbräume ein n-Simplex $\mathfrak{T}$ zum Durchschnitt haben. Nehmen wir an, der Schwerpunkt von $\mathfrak{S}$ falle mit dem Nullpunkt zusammen, was von nun an immer vorausgesetzt sei, so ist $\mathfrak{T}$ das $-(n+1)$-fach vergrößerte Bild von $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}_B$ ist in $\mathfrak{T}$ enthalten, und der Rand von $\mathfrak{S}_B$ hat mit dem Rand von $\mathfrak{T}$ genau die $n+1$

[4]) Den Beweis dieses Lemmas hat mir Herr Süss mitgeteilt.

verschiedenen $(n-1)$-Simplizes τ_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ gemein, welche durch die Endpunkte der am Nullpunkt angetragenen Vektoren $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}$ ($\mathfrak{x}$ sei der Ortsvektor eines beliebigen Punktes von σ_i) beschrieben werden. $\mathfrak{F}$ sei ein $\mathfrak{S}_B$ enthaltender und in $\mathfrak{T}$ enthaltener, sonst aber beliebiger, konvexer Körper. Dann enthält auch der Rand von $\mathfrak{F}$ die $(n-1)$-Simplizes τ_i. Wir legen jetzt den konvexen Körper $\mathfrak{E} = \frac{1}{l}\mathfrak{F}$ $(l>0)$, d.h. den um den positiven Faktor l^{-1} gestreckten Körper $\mathfrak{F}$ [5]) als Eichkörper einer Minkowskischen Maßbestimmung zugrunde. Sind dann P und Q zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{S}$ mit den Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so wird ihr Minkowskischer Abstand voneinander: $d(P, Q) = \frac{|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{e}|} \leq l$; denn wegen $\mathfrak{y}-\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B \subseteq \mathfrak{F} = l \cdot \mathfrak{E}$ ist $|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}| \leq l|\mathfrak{e}|$. Ist speziell $P \in \sigma_i$, $Q = E_i$, so ist $\mathfrak{y}-\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i - \mathfrak{x} \in \tau_i$, d.h. der Endpunkt von $\mathfrak{y}-\mathfrak{x}$ gehört dem Rand von $\mathfrak{F}$ an. Jetzt gilt: $|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}| = l \cdot |\mathfrak{e}|$ und damit $d(P, Q) = l$. l ist also Durchmesser von $\mathfrak{S}$ in bezug auf die durch $\mathfrak{E}$ induzierte Minkowskische Maßbestimmung.

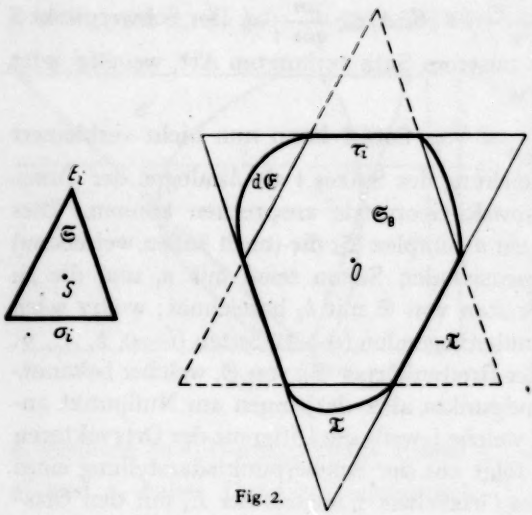


Fig. 2.

Wir wollen nun zeigen, daß kein Punkt Z von M_n mit $d(Z, P) < \frac{n}{n+1} l$ für alle P von $\mathfrak{S}$ existiert. Zu diesem Zwecke nehmen wir einmal an, es gebe einen solchen Punkt Z mit dem Ortsvektor $\mathfrak{z}$. Dann muß Z in denjenigen offenen Halbräumen liegen, welche durch die durch den Schwerpunkt S von $\mathfrak{S}$ gehenden, zu den σ_i parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen begrenzt werden und E_i enthalten $(i=0, 1, \ldots, n)$. Anderenfalls wäre nämlich $\frac{d(Z, E_i)}{d(F_i, E_i)} = \frac{|Z E_i|}{|F_i E_i|} \geq \frac{n}{n+1}$, wenn F_i der Schnittpunkt der durch E_i und Z gehenden Geraden mit der durch σ_i gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene ist. Dies steht aber wegen der aus $l\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{T}$ folgenden Ungleichung $d(F_i, E_i) \geq l$ mit der Voraussetzung $\frac{d(Z, E_i)}{l} < \frac{n}{n+1}$ im Widerspruch. Aus der eben abgeleiteten Bedingung für die Lage von Z folgt nun $S \neq Z$, und für den Vektor $\mathfrak{z}$ ergibt sich: $\mathfrak{z} \neq 0$ und $\mathfrak{z}\,\mathfrak{n}_i < 0$ $(i=0, 1, \ldots, n)$. Dies bedeutet aber geometrisch, daß die Endpunkte aller Vektoren $\mathfrak{n}_i$ in einer offenen Halbkugel der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel gelegen sind, was mit der bekannten Beziehung $\sum_{i=0}^{n} O(\sigma_i) \cdot \mathfrak{n}_i = 0$ für $\mathfrak{S}$ im Widerspruch steht, wobei $O(\sigma_i)$ die (positiven)

[5]) Der Nullpunkt von M_n sei das Zentrum der Streckung von $\mathfrak{F}$.

Inhalte der σ_i bedeuten. Die Annahme der Existenz von Z hat sich also als falsch erwiesen.

Hiermit haben wir durch Angabe eines Beispiels bewiesen, daß der Vergrößerungsfaktor von Satz 1 allgemein nicht verkleinert werden kann. Fragt man sich nun nach allen den Fällen, wo der kleinstmögliche Vergrößerungsfaktor oder „Umkugelradius" genau gleich $\frac{n}{n+1} \cdot d$ ist, so zeigt sich, daß dies auch nur im Falle unseres Beispiels zutrifft; wir behaupten nämlich:

Satz 2. *Ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in einem n-dimensionalen Minkowskischen Raum M_n mit dem konvexen Eichkörper $\mathfrak{E}$, ist d der Minkowskische Durchmesser von $\mathfrak{K}$ und existiert kein Punkt Z von M_n mit $d(Z, P) < \frac{n}{n+1} \cdot d$ für alle P von $\mathfrak{K}$, d.h. ist der Umkugelradius von $\mathfrak{K}$ gleich $\frac{n}{n+1} d$, so ist $\mathfrak{K}$ ein n-Simplex $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{E}$ ist von folgender Art: $d \cdot \mathfrak{E}$ enthält den Breitenkörper $\mathfrak{S}_B$ von $\mathfrak{S}$ und ist in demjenigen $-(n+1)$-fach vergrößerten, homothetischen Bild von $\mathfrak{S}$ enthalten, dessen Schwerpunkt mit dem Nullpunkt des M_n zusammenfällt*[6]). *Das Zentrum jeder Umkugel von $\mathfrak{S}$ ist der Schwerpunkt von $\mathfrak{S}$, sie ist also in diesem Falle eindeutig bestimmt*[7]).

Beweis. Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, der Schwerpunkt $\mathfrak{K}$ falle mit dem Nullpunkt von M_n zusammen, da sich die Minkowskische Länge einer gerichteten Strecke bei einer Translation nicht ändert. Ebenso dürfen wir annehmen, $\mathfrak{K}$ sei n-dimensional, denn für ein niedriger dimensionales $\mathfrak{K}$ ist nach Satz 1 der Vergrößerungsfaktor sicher kleiner als $\frac{n}{n+1} d$. Ist nun $\mathfrak{n}$ die (nach außen weisende) Normale und $h = h(\mathfrak{n})$ $(h > 0)$ die Stützfunktion von $\mathfrak{K}$, so betrachten wir den Durchschnitt $\mathfrak{K}^*$ aller abgeschlossenen Halbräume, welche durch

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{n} \leq h(\mathfrak{n}) - \frac{1}{n+1}\big(h(\mathfrak{n}) + h(-\mathfrak{n})\big) \equiv p(\mathfrak{n})$$

definiert sind. $\mathfrak{K}^*$ ist konvex, abgeschlossen und enthält sicher S wegen $p(\mathfrak{n}) = \frac{1}{n+1}\big(n\,h(\mathfrak{n}) - h(-\mathfrak{n})\big) \geq 0$ (wie leicht aus Lemma 1 folgt), ist also nicht leer. Natürlich ist $\mathfrak{K}^*$ in $\mathfrak{K}$ enthalten. Wir beweisen nun zunächst:

Lemma 3. *$\mathfrak{K}^*$ enthält entweder nur S allein, oder es enthält innere Punkte.*

Dazu untersuchen wir im nichttrivialen Falle $n > 1$ die wegen der Stetigkeit von $p(\mathfrak{n})$ abgeschlossene Menge N der Endpunkte aller im Nullpunkt angetragenen Normalenvektoren $\mathfrak{n}$, für welche $p(\mathfrak{n}) = 0$ ist. Es können drei Fälle eintreten:

1. N liegt auf einer offenen Halbkugel der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel S_{n-1},

[6]) $\mathfrak{E}$ ist in diesem Extremfall also nicht eindeutig bestimmt, da für $n > 1$ das n-Simplex $-(n+1)\,\mathfrak{S}$ mit $n+1$ Ecken von dem Polyeder $\mathfrak{S}_B$ mit $n(n+1)$ Ecken verschieden sein muß.

[7]) Man kann durch Angabe von Beispielen zeigen, daß $\mathfrak{K}$ im allgemeinen mehrere Umkugeln besitzt.

2. N liegt auf einer abgeschlossenen, aber keiner offenen Halbkugel von S_{n-1},

3. N liegt auf keiner abgeschlossenen Halbkugel von S_{n-1}.

Im ersten Fall überzeugt man sich leicht, daß $\mathfrak{R}^*$ innere Punkte enthalten muß. $\mathfrak{R}^*$ enthält nämlich sicher den Kugelsektor mit inneren Punkten, welcher Durchschnitt aller derjenigen abgeschlossenen Halbräume ist, welche durch $\mathfrak{x}\mathfrak{n} \leq 0$ für $\mathfrak{n}\mathfrak{w} \geq \delta$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{n} \leq c$ für $\mathfrak{n}\mathfrak{w} < \delta$ bei passend gewählten $\mathfrak{w}$, δ und c mit $\mathfrak{w}^2 = 1$, $\delta > 0$ und $c > 0$ definiert sind.

Im zweiten Fall müßte eine Teilmenge N' von N auf einer $(n-2)$-dimensionalen, in der S_{n-1} gelegenen Einheitskugel S_{n-2}, aber auf keiner offenen Halbkugel von S_{n-2} liegen, da sonst N schon auf einer offenen Halbkugel von S_{n-1} gelegen wäre. Dieser zweite Fall kann nicht eintreten, wie die folgende Überlegung zeigt: Setzen wir nämlich die Existenz eines solchen N' voraus und projizieren $\mathfrak{R}$ durch Parallelprojektion orthogonal auf die durch S_{n-2} gehende $(n-1)$-dimensionale Ebene ε, so erhalten wir als Projektion einen $(n-1)$-dimensionalen, konvexen Körper $\mathfrak{R}_1$, welcher den Nullpunkt als inneren Punkt enthält und die folgende Eigenschaft besitzt: Die zu den Richtungen $\mathfrak{n}'$ und $-\mathfrak{n}'$ ($\mathfrak{n}'$ sei der Ortsvektor eines beliebigen Punktes von N') gehörenden Stützebenen von $\mathfrak{R}$ projizieren sich in zwei parallele Stützebenen von $\mathfrak{R}_1$ derart, daß die in ε liegende und dazu parallele, durch den Nullpunkt gehende $(n-2)$-dimensionale Ebene von diesen beiden Stützebenen die Abstände $h(\mathfrak{n}')$ und $h(-\mathfrak{n}')$ besitzt, welche wegen

$$p(\mathfrak{n}') = \frac{1}{n+1}\left(n\,h(\mathfrak{n}') - h(-\mathfrak{n}')\right) = 0$$

im Verhältnis $1:n$ zueinander stehen. Sei nun S_1 der Schwerpunkt von $\mathfrak{R}_1$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}_1$. Dann folgt aus Lemma 1 wegen der Dimensionszahl $n-1$ von $\mathfrak{R}_1$, daß S_1 in dem durch $\mathfrak{x}\mathfrak{n}' < 0$ gegebenen offenen Halbraum von ε liegt. Es gilt also für alle $\mathfrak{n}'$: $\mathfrak{x}_1\mathfrak{n}' < 0$; d.h. N' liegt gegen Annahme auf einer offenen Halbkugel von S_{n-2}. Dieser Widerspruch schließt den Fall 2 aus.

Im dritten Fall endlich kann $\mathfrak{R}^*$ nur S allein enthalten. Enthielte nämlich $\mathfrak{R}^*$ noch den Punkt $A \neq S$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{a} \neq 0$, so bestünden für die Ortsvektoren $\mathfrak{n}$ aller Punkte von N die Beziehungen: $\mathfrak{a}\mathfrak{n} \leq p(\mathfrak{n}) = 0$, d.h. N wäre gegen Voraussetzung in einer abgeschlossenen Halbkugel von S_{n-1} enthalten. Hiermit haben wir den Beweis unseres Lemmas vollständig erbracht; wir merken noch an, daß im dritten Falle N mindestens $n+1$ verschiedene Punkte enthalten muß. Bestünde nämlich N aus den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \leq n$), so läge N auf derjenigen Halbkugel von S_{n-1}, welche von dem Schnitt von einer durch den Nullpunkt und durch $A_2, \ldots, A_k$ gehenden, $(n-1)$-dimensionalen Ebene mit S_{n-1} begrenzt wird und den Punkt A_1 enthält, w. z. b. w.

Lemma 4. *$\mathfrak{R}^*$ enthält dann und nur dann S als einzigen Punkt, wenn $\mathfrak{R}$ ein n-Simplex ist.*

Für $n = 1$ ist dies trivial; zum Beweise für $n > 1$ nehmen wir erstens an, $\mathfrak{R}^*$ enthielte S als einzigen Punkt. Dann gibt es nach dem beim Beweis von

Lemma 3 Gesagten $n+1$ verschiedene Einheitsvektoren $\mathfrak{n}_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ mit $p(\mathfrak{n}_i)=0$, d. h. mit $\frac{h(-\mathfrak{n}_i)}{h(\mathfrak{n}_i)}=n$. Nach Lemma 1 ist deshalb $\mathfrak{R}$ Projektionskegel eines in der zu $\mathfrak{n}_i$ orientiert orthogonalen Stützebene ε_i von $\mathfrak{R}$ liegenden, $(n-1)$-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{L}_i$ von einem nicht auf ε_i liegendem Zentrum C_i aus. Nun gilt $C_i \in \mathfrak{L}_k$ für alle $i \neq k$ $(i, k=0, 1, \ldots, n)$. Wäre dies nämlich nicht so, so hätte die $(n-1)$-dimensionale Stützebene ε_k von $\mathfrak{R}$ wegen $\mathfrak{n}_i \neq \mathfrak{n}_k$ und damit $\varepsilon_i \neq \varepsilon_k$ nur Punkte des höchstens $(n-2)$-dimensionalen Durchschnitts von $\mathfrak{L}_i$ und ε_k mit $\mathfrak{R}$ gemein, was einen Widerspruch mit der Tatsache ergibt, daß ε_k mit $\mathfrak{R}$ genau $\mathfrak{L}_k$ gemein hat und $\mathfrak{L}_k$ $(n-1)$-dimensional ist. Die Ecken C_i sind alle linear unabhängig. Wäre nämlich etwa C_0 von $C_1, C_2, \ldots, C_n$ linear abhängig, so läge es sicher auf jeder durch die letzteren Punkte gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene, also insbesondere auf ε_0 gegen Voraussetzung über C_0. Alle Punkte C_i spannen also ein n-Simplex $\mathfrak{S}$ auf, welches in $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Da aber andererseits durch die Punkte C_0, $C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_n$ von $\mathfrak{S}$ die Stützebenen ε_i von $\mathfrak{R}$ gehen, muß $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{S}$ identisch sein.

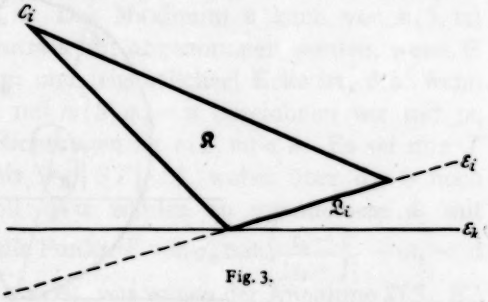


Fig. 3.

Umgekehrt kann der zu einem n-Simplex $\mathfrak{S}$ gehörende Körper $\mathfrak{R}^*$ keine inneren Punkte enthalten, da sonst nach dem Beweis von Lemma 3 die Menge N auf einer offenen Halbkugel von S_{n-1} gelegen wäre. Da aber N gerade aus den Endpunkten der nach außen weisenden Normalenvektoren $\mathfrak{n}_i$ der Seiten σ_i von $\mathfrak{S}$ besteht $(i=0, 1, \ldots, n)$, wie sich aus Lemma 1 ergibt, würde dies mit der bekannten Beziehung $\sum O(\sigma_i) \cdot \mathfrak{n}_i = 0$, $O(\sigma_i) > 0$ im Widerspruch stehen (vgl. S. 40). Für ein n-Simplex ist also $\mathfrak{R}^* = S$, w. z. b. w.

Schluß des Beweises von Satz 2. Wir haben beim Beweis von Lemma 3 und Lemma 4 nur benutzt, daß $\mathfrak{R}$ ein beliebiger, n-dimensionaler, konvexer Körper ist, ohne das spezielle Verhalten von $\mathfrak{R}$ in bezug auf die Minkowski-Metrik von M_n weiter auszunützen. Dies werden wir jetzt tun müssen, um den Satz 2 zu beweisen. Wir haben dazu viererlei zu zeigen: a) $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}$, b) $d \cdot \mathfrak{F} \geqq \mathfrak{S}_B$, c) $d \cdot \mathfrak{F} \leqq -(n+1)\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$, d) $Z = S$.

a) Nach Lemma 3 und Lemma 4 ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}$, wenn wir bewiesen haben, daß $\mathfrak{R}^*$ keine inneren Punkte enthält. Wir führen diesen Beweis indirekt und nehmen einmal an, $\mathfrak{R}^*$ enthielte den inneren Punkt I. Ist jetzt P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}$, so schneiden wir die von I aus nicht durch P gehende Halbgerade einer durch I und P gehenden Geraden mit dem Rand von $\mathfrak{R}$. Durch den so erhaltenen Schnittpunkt B legen wir die Stützebene ε_2 an $\mathfrak{R}$. Weiter seien A und A' die Schnittpunkte der von I aus entgegengesetzt laufenden Halbgeraden mit dem Rand von $\mathfrak{R}$ und der anderen, zu ε_2 parallelen Stützebene ε_1 an $\mathfrak{R}$. Wir bezeichnen diejenige zwischen ε_1 und ε_2 liegende und zu ε_1 parallele $(n-1)$-dimensionale Ebene, deren Abstände a_1 und a_2

von ε_1 und ε_2 sich wie $n:1$ verhalten, mit ε_3, und den Schnittpunkt von ε_3 mit der Strecke $A'B$ mit D. Nach Definition von $\mathfrak{K}^*$ liegt D zwischen B und I und ist von I verschieden, da I ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}^*$ sein sollte. Nun gilt: $|IA| \leqq |IA'| < |A'D|$ und $|IB| > |BD|$; also $\frac{|IB|}{|IA|} > \frac{|BD|}{|A'D|} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{n}$ oder $\frac{|IB|}{|IA|} + 1 = \frac{|BA|}{|IA|} > \frac{n+1}{n}$ oder $|IA| < \frac{n}{n+1}|BA|$. Wegen $|IP| \leqq |IA|$ ist deshalb $|IP| < \frac{n}{n+1}|BA|$ und somit $d(I,P) < \frac{n}{n+1} d(B,A) \leqq \frac{n}{n+1} \cdot d$ (da $\overrightarrow{IP}$ und $\overrightarrow{BA}$ gleichgerichtete Vektoren sind, zu welchen derselbe Eichvektor gehört). Dies steht mit unserer Voraussetzung über die

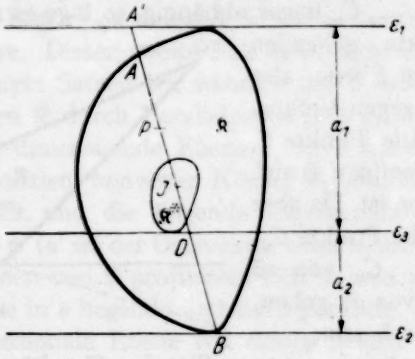


Fig. 4.

Extremeigenschaft von $\mathfrak{K}$ in Satz 2 im Widerspruch. Also ist unsere Annahme, $\mathfrak{K}^*$ enthielte innere Punkte, falsch; und es ist in der Tat $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}$.

b) Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes R aus $\mathfrak{S}_B$ hat die Gestalt $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}$, wobei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Ortsvektoren zweier Punkte P und Q von $\mathfrak{S}$ sind. Ist $\mathfrak{e}$ der zu $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}$ gehörende Eichvektor, so folgt aus $d(P,Q) = \frac{|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}|}{|\mathfrak{e}|} \leqq d$: $|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| \leqq d|\mathfrak{e}|$. R ist also auf der Verbindungsstrecke vom Nullpunkt zum Endpunkt des Vektors $d\mathfrak{e}$ gelegen und gehört hiermit auch zu $d \cdot \mathfrak{E}$, da ja $\mathfrak{E}$ und damit $d \cdot \mathfrak{E}$ sternförmig um den Nullpunkt angeordnet sind. Damit ist $d\mathfrak{E} \supseteqq \mathfrak{S}_B$ gezeigt.

c) Wir bezeichnen die Verbindungssehnen vom Schwerpunkt S von $\mathfrak{S}$ mit dessen Ecken E_i mit s_i und die Schnittpunkte von s_i mit den $(n-1)$-dimensionalen, E_i gegenüberliegenden Seiten σ_i von $\mathfrak{S}$ mit S_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Um nun die Beziehung $d\mathfrak{E} \subseteqq -(n+1)\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$ zu zeigen, ist es jetzt nur noch nötig, für alle i die Gleichungen $d(S_i, E_i) = d$ zu beweisen. Diese Gleichungen sind nämlich gleichbedeutend mit $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{f}_i = d\mathfrak{e}_i$, wenn $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{f}_i$ die Ortsvektoren von E_i und S_i sind und $\mathfrak{e}_i$ der $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{f}_i$ gleichgerichtete Eichvektor ist. Nehmen wir dies einmal als bewiesen an, so ist der durch den Endpunkt von $d \cdot \mathfrak{e}_i$ dargestellte Randpunkt U_i von $d \cdot \mathfrak{E}$ Schwerpunkt, also innerer Punkt des durch die Endpunkte der Ortsvektoren $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k$ $(k \neq i)$ aufgespannten $(n-1)$-Simplexes τ_i, dessen Eckpunkte sämtlich $\mathfrak{S}_B$, also wegen $\mathfrak{S}_B \subseteqq d \cdot \mathfrak{E}$ ebenfalls

$d \cdot \mathfrak{E}$ angehören. Dies ist nur möglich, wenn jede Stützebene von dem konvexen $d \cdot \mathfrak{E}$ durch U_i mit der durch τ_i gehenden Ebene η_i zusammenfällt. Diese Stützebenen η_i von $d \cdot \mathfrak{E}$ begrenzen aber nach früheren Betrachtungen gerade das n-Simplex $\mathfrak{T} = -(n+1)\mathfrak{S}$, d.h. es ist in der Tat $d \cdot \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{T}$.

Wir müssen jetzt schließlich noch den Beweis von $d(S_i, E_i) = d$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ nachholen. Zu diesem Zwecke nehmen wir einmal an, es sei etwa $d(S_0, E_0) = d_0 < d$, und fassen einen im Innern von $\mathfrak{S}$ gelegenen, beliebigen Punkt P ins Auge, durch welchen wir in Richtung des beliebigen Einheitsvektors $\mathfrak{m}$ eine (orientierte) Gerade legen, welche den Rand von $\mathfrak{S}$ zuerst in A und dann in B schneide. Wir untersuchen nun die Funktion: $v(P, \mathfrak{m}) = \frac{|PA|}{|PB|}$. Sie ist offenbar in P und $\mathfrak{m}$ stetig und wohldefiniert. Nach Lemma 1 und Lemma 2 gilt für $P = S$: $v(S, \mathfrak{m}) \leqq n$. Das Maximum n kann von $v(S, \mathfrak{m})$ wegen der Beweise dieser beiden Lemmas nur angenommen werden, wenn $\mathfrak{S}$ Projektionskörper mit A als Zentrum und (eigentlicher) Ecke ist, d.h. wenn $A = E_i$ ist. Die $n+1$ Richtungen mit $v(S, \mathfrak{m}) = n$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Für alle anderen Richtungen ist $v(S, \mathfrak{m}) < n$. Es sei nun T ein Punkt auf der Strecke SS_0 mit $0 < |ST| < \delta$, wobei über $\delta > 0$ noch folgendermaßen verfügt werden soll: Wir wählen zu irgendeinem d_1 mit $d_0 < d_1 < d$ ein solches $\Delta > 0$, daß für alle Punkte F von σ_0 mit $\left| \frac{\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{f}}{|\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{f}|} - \mathfrak{m}_0 \right| < \Delta$ ($\mathfrak{f}$ ist der Ortsvektor von F) $d(F, E_0) < d_1$ ist, was wegen der Annahme $d(S_0, E_0) = d_0 < d$ stets möglich ist. Sei weiter n_1 eine reelle Zahl mit $n_1 > n$ und $\frac{n_1}{n_1 + 1} d_1 < \frac{n}{n+1} d$. Schließlich bezeichnen wir mit n_2 das Maximum von $v(S, \mathfrak{m})$ für den abgeschlossenen Bereich aller $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_i| \geqq \Delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Dann gibt es wegen $n_2 < n$ sicher ein $n_3 > n_2$ mit $n_1 - n > n - n_3$ und $n_3 < n$. Jetzt sei endlich $\delta > 0$ so klein gewählt, daß $|v(T, \mathfrak{m}) - v(S, \mathfrak{m})| < n - n_3$ gleichmäßig für alle $\mathfrak{m}$ gilt. Nun wird für alle $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_i| \geqq \Delta$:

$$(1) \quad v(T, \mathfrak{m}) \leqq v(S, \mathfrak{m}) + |v(T, \mathfrak{m}) - v(S, \mathfrak{m})| < n_2 + (n - n_3) = n - (n_3 - n_2) < n$$

und für die $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_i| < \Delta$:

$$(2) \quad v(T, \mathfrak{m}) \leqq v(S, \mathfrak{m}) + |v(T, \mathfrak{m}) - v(S, \mathfrak{m})| < n + (n - n_3) < n_1.$$

Weiter gilt für alle $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_{i'}| < \Delta$ $(i' = 1, 2, \ldots, n)$:

$$(3) \quad v(T, \mathfrak{m}) \leqq v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'}),$$

wobei $\overline{\mathfrak{m}}_{i'}$ die Richtung des von T nach $E_{i'}$ zeigenden Vektors besitzt, wenn nur von vorneherein Δ und δ hinreichend klein gewählt waren. Der Ort aller Punkte A mit $\frac{|TA|}{|TB|} = v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'})$ und $B \in \sigma_{i'}$ ist nämlich ein Teil der zu $\sigma_{i'}$ parallelen Stützebene durch $E_{i'}$ an $\mathfrak{S}$. Andererseits ist aber

$$(4) \quad v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'}) < n,$$

wie man folgendermaßen einsieht: Da der geometrische Ort aller Punkte, welche die durch $E_{i'}$ gehenden Sehnen von $\mathfrak{S}$ im Verhältnis $1 : n$ teilen, die

zu $\sigma_{i'}$ parallele, durch S gehende, $(n-1)$-dimensionale Ebene $\pi_{i'}$ ist, ist $v(T, \overline{\mathfrak{m}}_{i'}) = \frac{|TE_{i'}|}{|TG_{i'}|} < n$ ($G_{i'}$ sei der Schnittpunkt der durch T und $E_{i'}$ gehenden Geraden mit $\sigma_{i'}$) mit der Tatsache gleichbedeutend, daß T in dem durch $\pi_{i'}$ begrenzten, $E_{i'}$ enthaltenden offenen Halbraum liegt, was nach Definition von T auch zutrifft, da T auf der Strecke SS_0 liegt und S_0 diesem Halbraum angehört. Die Ungleichungen (1), (2), (3) und (4) lauten zusammengefaßt: $v(T, \mathfrak{m}) < n_1$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$ und $v(T, \mathfrak{m}) < n$ für alle übrigen $\mathfrak{m}$; oder wegen $v(T, \mathfrak{m}) = \frac{|TA|}{|TB|}$: $d(T,A) < \frac{n_1}{n_1+1} d(B,A)$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$ und $d(T,A) < \frac{n}{n+1} d(B,A)$ für alle übrigen $\mathfrak{m}$. Nun sieht man aber leicht auf eine zur vorigen Betrachtung analoge Weise: $d(B,A) \leq d(F, E_0)$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$, wenn die von B nach A und von $F \in \sigma_0$ nach E_0 führenden Vektoren beide parallel zu $\mathfrak{m}$ sind; d.h. nach Erklärung von Δ ist $d(B,A) \leq d(F, E_0) < d_1$. Für die übrigen $\mathfrak{m}$ gilt trivialerweise $d(B, A) \leq d$, sodaß wegen der Definition von n_1 folgende Ungleichungen richtig sind: $d(T, A) < \frac{n_1}{n_1+1} d_1 < \frac{n}{n+1} d$ für $|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0| < \Delta$ und $d(T,A) < \frac{n}{n+1} d$ für die übrigen $\mathfrak{m}$. Ist P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{S}$ und A der Schnittpunkt einer von T aus durch P gehenden Halbgeraden mit dem Rand von $\mathfrak{S}$, so folgt aus den obigen Ungleichungen allgemein: $d(T, P) \leq d(T,A) < \frac{n}{n+1} d$ im Gegensatz zur Voraussetzung über $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ von Satz 2. Hiermit ist unsere Annahme $d(S_0, E_0) < d$ zu einem Widerspruch geführt und somit $d\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{T}$ bewiesen.

d) Wäre das Zentrum Z einer Umkugel vom Radius $\frac{n}{n+1} d$ von $\mathfrak{S}$ von dem Schwerpunkt S von $\mathfrak{S}$ verschieden, so hätten wir, wie sich nach einer leichten Modifikation des Beweisgangs von S. 40 zeigt, für die Ortsvektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{z}$ von S und Z und die (nach außen weisenden) Normalenvektoren $\mathfrak{n}_i$ der $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{S}$ die Beziehungen $(\mathfrak{z} - \mathfrak{f})\,\mathfrak{n}_i \leq 0$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Somit wären wegen $\mathfrak{z} - \mathfrak{f} \neq 0$ die Endpunkte der $\mathfrak{n}_i$ auf einer abgeschlossenen Halbkugel der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel S_{n-1} enthalten, und nach dem zweiten Teil des Beweises von Lemma 3 wären dann diese Punkte schon auf einer offenen Halbkugel von S_{n-1} enthalten, was nach dem am Schluß von Lemma 4 Gesagten unmöglich ist. Also ist in der Tat $Z = S$.

Damit ist der Beweis von Satz 2 vollendet, w. z. b. w.

Bemerkungen.

1. Um $\mathfrak{R}$ durch den Extremfall des Analogons der JUNGschen Ungleichung in der Minkowski-Geometrie nach Satz 2 als Simplex zu kennzeichnen, war die Voraussetzung der Konvexität von $\mathfrak{R}$ wesentlich, der Extremfall tritt nämlich (unter Zugrundelegung desselben Eichkörpers) auch ein, wenn etwa $\mathfrak{R}$ nur aus den Eckpunkten des entsprechenden Simplexes besteht.

2. Wir haben die Voraussetzung der Konvexität vom Eichkörper $\mathfrak{E}$ bisher nur beim Beweis von $d \cdot \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{T}$ beim Vorliegen des Extremfalls benutzt; alle

übrigen Überlegungen, insbesondere Satz 1 und die Charakterisierung eines konvexen $\mathfrak{K}$ als Simplex beim Extremfall gelten auch für ein sternförmig um den Nullpunkt gelagertes $\mathfrak{E}$.

3. Auch für ein zentralsymmetrisches $\mathfrak{E}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, d.h. für eine symmetrische Minkowskische Metrik kann der Extremfall erreicht werden; wir brauchen in unserem Beispiel dazu nur etwa $d \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{S}_B$ zu setzen. Dies ist für $n = 2$ sogar die einzig mögliche Art für $\mathfrak{E}$ im Extremfall, während für $n > 2$ mehrere Möglichkeiten für $\mathfrak{E}$ bestehen. So können wir zum Beispiel $d \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{U}$ setzen, wobei $\mathfrak{U}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{T}$ und $-\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{U}$ ist, wie man nachrechnen kann, für alle $n > 2$ von $\mathfrak{S}_B$ verschieden.

4. Wenn $\mathfrak{E}$ eine gewöhnliche n-dimensionale Vollkugel ist, d.h. bei der euklidischen Metrik kann der Extremfall für $n > 1$ nicht mehr erreicht werden, da ja beim Extremfall nach Satz 2 der Rand von $d \cdot \mathfrak{E}$ die ebenen $(n-1)$-Simplizes τ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ enthalten muß. Hier gilt die für $n > 1$ schärfere JUNGsche Ungleichung, daß der Umkugelradius nicht größer als $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \cdot d$ sein kann [1], [2], [3]. Der Extremfall der JUNGschen Ungleichung, welcher eintritt, wenn $\mathfrak{K}$ ein regelmäßiges Simplex ist, kennzeichnet ein (als konvex vorausgesetztes) $\mathfrak{K}$ nicht als derartige Figur; er liegt nämlich z.B. bei $n = 2$ für alle zwischen einem gleichseitigen Dreieck und dem ihm umschriebenen REULEAUX-Dreieck liegenden konvexen $\mathfrak{K}$ vor.

Wir wenden uns jetzt noch kurz zu dem zu unserem bisherigen Problem dualen Problem der Abschätzung des Radius einer Minkowskischen „Inkugel" eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ zu. Als eine Inkugel bezeichnen wir dabei ein maximal vergrößertes, homothetisches Bild des Eichkörpers $\mathfrak{E}$ des Minkowskischen Raumes, welches in $\mathfrak{K}$ liegt; und als den Radius dieser Inkugel definieren wir wie früher das zugehörige Vergrößerungsverhältnis. Um nun diesen Radius abschätzen zu können, müssen wir noch folgende Definitionen vorausschicken: Der Minkowskische Abstand der $(n-1)$-dimensionalen Ebene ε_2 von der zu ε_2 parallelen $(n-1)$-dimensionalen Ebene ε_1 im n-dimensionalen Minkowskischen Raum ist das Minimum der Minkowskischen Längen aller von einem festen Punkt A_1 von ε_1 nach allen Punkten von ε_2 führenden Strecken. Diese Definition ist eine sinnvolle Verallgemeinerung der euklidischen Abstandsdefinition, und der so definierte Abstand ist zwar unsymmetrisch, er ist aber translationsinvariant und hängt nicht von der Wahl von A_1 ab. Er ist gleich dem euklidischen Abstand von ε_1 und ε_2, dividiert durch den euklidischen Abstand $h(\varepsilon)$ derjenigen zu ε_1 parallelen Stützebene ε an $\mathfrak{E}$ vom Nullpunkt, bei welcher das vom Nullpunkt auf sie gefällte Lot die Richtung des von A_1 auf ε_2 gefällten Lots besitzt. Weiter definieren wir den in Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ gemessenen Minkowskischen Abstand der beiden zu $\mathfrak{n}$ orthogonalen Stützebenen von $\mathfrak{K}$ als die in Richtung von $\mathfrak{n}$ gemessene Minkowskische Breite $e(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{K}$ und nennen das Minimum aller $e(\mathfrak{n})$ die Minkowskische Dicke e von $\mathfrak{K}$. Jetzt gilt der zu Satz 1 duale

Satz 3. *Der Inkugelradius eines n-dimensionalen, konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ im Minkowskischen Raum M_n ist nicht kleiner als $\frac{e}{n+1}$, wenn e die Minkowskische Dicke von $\mathfrak{K}$ ist.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Schwerpunkt S von $\mathfrak{K}$ mit dem Nullpunkt 0 von M_n zusammenfällt. Wir betrachten nun das um $\frac{e}{n+1}$ mit dem Nullpunkt als Zentrum vergrößerte Bild $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{E}$. Ist dann $\mathfrak{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor und ε diejenige Stützebene von $\mathfrak{E}$, bei welcher das vom Nullpunkt auf sie gefällte Lot die Richtung von $\mathfrak{n}$ besitzt, so gilt für die Stützfunktion $g(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{G}$: $g(\mathfrak{n}) = \frac{e}{n+1} h(\varepsilon)$; und für die Stützfunktion $h(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{K}$ folgt aus Lemma 1 wegen $S = 0$:

$$\frac{h(-\mathfrak{n})}{h(\mathfrak{n})} \leq n \text{ oder } h(\mathfrak{n}) \geq \frac{1}{n+1}\left(h(\mathfrak{n}) + h(-\mathfrak{n})\right) = \frac{e(\mathfrak{n})}{n+1} \cdot h(\varepsilon) \geq \frac{e}{n+1} h(\varepsilon) = g(\mathfrak{n}).$$

Hieraus ergibt sich natürlich $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{G} = \frac{e}{n+1}\mathfrak{E}$, w. z. b. w.

Über mögliche Extremfälle bei der Abschätzung von Satz 3 gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in einem n-dimensionalen Minkowskischen Raum M_n mit dem konvexen Eichkörper $\mathfrak{E}$, ist e die Minkowskische Dicke von $\mathfrak{K}$ und ist der Inkugelradius von $\mathfrak{K}$ genau gleich $\frac{e}{n+1}$, so ist $\mathfrak{K}$ ein n-Simplex $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{E}$ ist von folgender Art: $e \cdot \mathfrak{E}$ ist im Breitenkörper $\mathfrak{S}_B$ von $\mathfrak{S}$ enthalten und wird von allen $(n-1)$-dimensionalen Seiten desjenigen $(n+1)$-fach vergrößerten, homothetischen Bildes von $\mathfrak{S}$ berührt, dessen Schwerpunkt mit dem Nullpunkt des M_n zusammenfällt. Das Zentrum jeder Inkugel von $\mathfrak{S}$ ist der Schwerpunkt von $\mathfrak{S}$, sie ist also in diesem Fall eindeutig bestimmt*[8]).

Der Beweis dieses Satzes läßt sich mit Hilfe von Lemma 1, Lemma 3 und Lemma 4 auf eine analoge und teilweise sogar einfachere Weise wie der Beweis von Satz 2 erbringen. Wir wollen deshalb diesen Beweis nicht im einzelnen darstellen, sondern nur noch die folgende Tatsache anführen, welche für den Beweis, daß $e \cdot \mathfrak{E}$ die $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $(n+1)\mathfrak{S}$ berührt, von Wichtigkeit ist: Eine Inkugel eines n-Simplex $\mathfrak{S}$ berührt jede $(n-1)$-dimensionale Seite von $\mathfrak{S}$[9]). Wäre dies nämlich nicht der Fall, berührte die Inkugel etwa die Seite σ_i von $\mathfrak{S}$ nicht, so können wir durch eine Streckung der Inkugel mit dem Zentrum E_i (E_i sei die σ_i gegenüberliegende Ecke von $\mathfrak{S}$) dieselbe in ein vergrößertes, in $\mathfrak{S}$ liegendes, homothetisches Bild von $\mathfrak{E}$ überführen, was einen Widerspruch mit der Definition einer Inkugel ergibt.

Wir bemerken noch am Schluß, daß auch im Extremfall $\mathfrak{E}$ zentralsymmetrisch, d.h. die Minkowski-Metrik symmetrisch sein kann (man setze etwa $e\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_B$), und zwar ist auch hier $\mathfrak{E}$ nicht eindeutig bestimmt. Wenn $\mathfrak{E}$ eine

[8]) $\mathfrak{K}$ besitzt im allgemeinen mehrere Inkugeln.

[9]) Das Beispiel eines stumpfwinkligen Dreiecks in einer euklidischen Metrik zeigt, daß umgekehrt nicht jede Ecke von $\mathfrak{S}$ auf dem Rande seiner Umkugel liegen muß.

n-dimensionale, euklidische Vollkugel, d.h. wenn die Metrik euklidisch ist, so kann unser Extremfall nur für $n=1$ und $n=2$ erreicht werden, wo bei $n=2$ $\mathfrak{S}$ dann speziell ein gleichseitiges Dreieck sein muß. Dies rechnet man aus den Bedingungen in Satz 4 nach. Für $n \geq 3$ muß also für den euklidischen Inkugelradius r eines konvexen Körpers eine schärfere Abschätzung gelten. Dies ist in der Tat der Fall, denn nach P. STEINHAGEN [5] und H. GERICKE [6] gilt $r \geq \frac{\sqrt{n+2}}{2(n+1)}\, e$ für ein gerades n und $r \geq \frac{e}{2\sqrt{n}}$ für ein ungerades n.

Literatur.

[1] JUNG, H. W.: Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt. Crelles J. **123**, 241—257 (1901). — [2] SÜSS, W.: Durchmesser und Umkugel bei mehrdimensionalen Punktmengen. Math. Z. **40**, 315—316 (1936). — [3] BLUMENTHAL, L. M. u. G. E. WAHLIN: On the spherical surface of smallest radius enclosing a bounded subset of n-dimensional euclidean space. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 771—777 (1941). — [4] BOHNENBLUST, F.: Convex regions and projections in Minkowski spaces. Ann. of Math. **39** 301—308 (1938). — [5] STEINHAGEN, P.: Über die größte Kugel in einer konvexen Punktmenge. Hamb. Abh. **1**, 15—26 (1922). — [6] GERICKE, H.: Über die größte Kugel in einer konvexen Punktmenge. Math. Z. **40**, 317—318 (1936).

Freiburg i. B., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. November 1954.)

BARNER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 50—93 (1955)

Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*).

Herrn WILHELM SÜSS zum 60. Geburtstag am 7. März 1955 gewidmet.

Von

MARTIN BARNER.

Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen begegnet man bei den verschiedensten Fragen der projektiven Differentialgeometrie. Auch für sich betrachtet stellen sie ein reizvolles geometrisches Gebilde dar. Dies liegt hauptsächlich an dem engen Zusammenhang mit den einparametrigen Quadrikscharen: Hüllt eine Quadrikschar eine Regelfläche ein, so berühren die Geraden der einen Erzeugendenschar der Quadrik an jeder Stelle auf der Regelfläche die Kurven einer Doppelverhältnisschar — und umgekehrt. Analytisch sind die Doppelverhältnisscharen in einem beliebigen Bezugssystem durch eine RICCATIsche Differentialgleichung gegeben.

Denkt man sich die Erzeugenden der Regelfläche durch die krummlinigen Asymptotenlinien projektiv aufeinander abgebildet, so definiert die Doppelverhältnisschar in diesem binären Gebiet eine projektive Bewegung[1]). Deutet man das binäre Gebiet nach HESSE als Kegelschnitt einer Hilfsebene, so führt die projektive Bewegung auf eine hyperbolische Bewegung[1]) in dieser Hilfsebene, wenn man den Kegelschnitt als Maßkegelschnitt betrachtet. In der Hilfsebene überblickt man die invarianten Eigenschaften einer Doppelverhältnisschar und kann unterscheiden, inwiefern diese auch bei asymptotenlinienerhaltenden Abbildungen bzw. bei Projektivabwicklung der Regelfläche erhalten bleiben.

Der erste Teil dieser Arbeit gibt zunächst einen direkten analytischen Aufbau der Theorie der Doppelverhältnisscharen [1][2]). Nach einer ersten geometrischen Deutung der gewonnenen Formeln [2] wird die zugehörige hyperbolische Bewegung in der Hilfsebene betrachtet und die Beziehungen zwischen beiden geometrischen Gebilden hergeleitet [3].

Der zweite Teil zeigt in einzelnen, lose miteinander verknüpften Abschnitten und Unterabschnitten geometrische Ergebnisse auf, wobei auch das analytische Rüstzeug ergänzt wird [4a; 6d, e; 8a]. Es kann sich dabei nur

---

*) Herrn G. BOL habe ich für sein großes Interesse an den vorliegenden Untersuchungen zu danken Verschiedene Zusammenhänge und Ergebnisse gehen auf ihn zurück. Weitere Ergebnisse finden sich in seiner Projektiven Differentialgeometrie, Teil 3 (im Erscheinen).

Über die Grundgedanken dieser Arbeit habe ich auf der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in München 1952 berichtet.

[1]) Im kinematischen Sinne.

[2]) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf Abschnitte und Teilabschnitte dieser Arbeit.

um eine Auswahl handeln. Manche Formeln sind, um weitere Anwendungen zu gestatten, in größerer Allgemeinheit abgeleitet als sie verwendet werden (insbesondere [7]).

Eine Klassifikation bezüglich des Zerfallens der charakteristischen Kurve der zugehörigen Quadrikschar [4] führt auf den wichtigen Sonderfall der schichtbildenden Doppelverhältnisscharen: Die charakteristische Kurve der Quadrikschar ist ein Vierseit [5].

Abschnitt 6 behandelt auffallende Eigenschaften der ebenen hyperbolischen Bewegung und den Zusammenhang mit der Geometrie der Doppelverhältnisscharen. Insbesondere wird nach Doppelverhältnisscharen gefragt, die invariant mit einem Kurvenpaar verknüpft sind [6e].

Die Kurven vierter Ordnung erster Art auf der zugehörigen Quadrik bilden sich auf Kegelschnitte der Hilfsebene ab [7f]. So gibt es auch invariant mit der Figur verknüpfte Kegelschnitte der Ebene [7d, e], die nicht wie die anderen zunächst in die Betrachtung eintretenden Größen invariant sind gegenüber Projektivabwicklung der Regelfläche.

Den Zusammenhang zwischen verschiedenen Doppelverhältnisscharen derselben Regelfläche behandelt Abschnitt 8.

Zum Schluß werden invariante Konstruktionen für Doppelverhältnisscharen aus gewissen Vorgaben des hyperbolischen Bildes angegeben [9a]. Dies wird angewendet auf die Theorie der Regelflächen bei Betrachtung der Prinzipalschar einer Regelfläche.

I. Allgemeiner Aufbau der Theorie.

1. Wir betrachten das geometrische Gebilde einer Doppelverhältnisschar auf einer Regelfläche[3]). Sind die Vektoren

$$\mathfrak{q}_i(t) = \{\overset{i}{q}_0(t), \overset{i}{q}_1(t), \overset{i}{q}_2(t), \overset{i}{q}_3(t)\}, \qquad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

für jedes t linear unabhängig, so stellen

$$\mathfrak{q}_1(t) + s\,\mathfrak{q}_2(t), \qquad s = \text{const} \tag{1.2}$$

die Kurven einer Dv-Schar dar. Umgekehrt läßt sich jede Dv-Schar so angeben. Man greife hierzu zwei Kurven der Schar heraus und normiere die zugehörigen Vektoren $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ so, daß auch $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ eine Scharkurve durchläuft. Auf Grund der vorausgesetzten Invarianz des Doppelverhältnisses in Abhängigkeit von t sind dann die Kurven der Schar durch (2) gegeben.

Wir gehen also aus von (2). Die Vektoren $\mathfrak{q}_1(t)$, $\mathfrak{q}_2(t)$ sind durch die Doppelverhältnisschar bis auf konstante Faktoren und bis auf eine gemeinsame Umnormungsfunktion $\varrho(t)$:

$$\bar{\mathfrak{q}}_1(t) = \varrho(t)\,\mathfrak{q}_1(t), \qquad \bar{\mathfrak{q}}_2(t) = \varrho(t)\,\mathfrak{q}_2(t) \tag{1.3}$$

festgelegt.

[3]) Im folgenden sprechen wir kurz von einer Dv-Schar.

Es sei die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ keine Torse. Dann ist die Determinante

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') \neq 0.$$

Wir können dann bei gegebener Parameterverteilung durch eine Umnormung (3)

$$(\bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \bar{\mathfrak{q}}_1', \bar{\mathfrak{q}}_2') = \text{const}$$

erreichen.

Wir denken uns die Darstellung von vornherein so eingerichtet. Es gilt also

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') = k, \qquad k = \text{const}. \tag{1.4}$$

Damit nun diese Bedingung auch bei Übergang auf eine neue Parameterverteilung

$$t = f(t^*), \qquad \frac{dt^*}{dt} = \varphi(t), \qquad A(t) = \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} \tag{1.5}$$

erhalten bleibt, koppelt man mit einer Parametertransformation (5) die Umnormung

$$\mathfrak{q}_i^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{q}_i, \qquad i = 1, 2. \tag{1.6}$$

Die gekoppelte Transformation nennt man *Sterntransformation*. Man wird auf das Verhalten der mit einer Dv-Schar verbundenen Größen bei Sterntransformation zu achten haben.

Nach Voraussetzung sind die Vektoren

$$\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{q}_1' = \mathfrak{s}_1, \quad \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{s}_2 \tag{1.7}$$

linear unabhängig — wir wählen sie als Basisvektoren des bewegten Bezugssystems. Es gelten dann die Ableitungsgleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{q}_i' = \mathfrak{s}_i, \\ \mathfrak{s}_i' = \alpha_{i1}\mathfrak{q}_1 + \alpha_{i2}\mathfrak{q}_2 + \beta_{i1}\mathfrak{s}_1 + \beta_{i2}\mathfrak{s}_2, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

wobei wegen der Forderung (4)

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0 \tag{1.9}$$

ist.

Differentiert man nun (6), so folgt mittels (5) und (8)[4])

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_i^* = \frac{d\,\mathfrak{q}_i^*}{dt^*} &= \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_i + A\,\mathfrak{q}_i), \\ \frac{d\,\mathfrak{s}_i^*}{dt^*} &= \varphi^{-\frac{3}{2}}(\mathfrak{s}_i' + (A' - A^2)\,\mathfrak{q}_i) \qquad\qquad i = 1, 2. \\ &= \varphi^{-2}[\alpha_{ik} - A\,\beta_{ik} + (A' - A^2)\,\delta_{ik}]\,\mathfrak{q}_k^* + \varphi^{-1}\beta_{ik}\,\mathfrak{s}_k^*, \end{aligned}$$

Man liest hieran das Verhalten der Basisvektoren bei Sterntransformation ab:

$$\begin{cases} \mathfrak{q}_i^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{q}_i, \\ \mathfrak{s}_i^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_i + A\,\mathfrak{q}_i), \end{cases} \qquad i = 1, 2. \tag{1.10}$$

[4]) Über gleiche Indizes in Produkten ist hier und im folgenden von 1 bis 2 zu summieren. δ_{ik} ist das KRONECKER-Symbol.

Für die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen gilt:

$$(1.11)\qquad \begin{cases} \alpha^*_{ik} = \varphi^{-2}[\alpha_{ik} - A\,\beta_{ik} + (A' - A^2)\,\delta_{ik}], \\ \beta^*_{ik} = \varphi^{-1}\beta_{ik}, \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Die Relationen der ersten Zeile schreibt man zweckmäßigerweise in der Form

$$(1.12)\qquad \begin{cases} \alpha^*_{12} = \varphi^{-2}(\alpha_{12} - A\,\beta_{12}), \\ \alpha^*_{22} - \alpha^*_{11} = \varphi^{-2}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - A(\beta_{22} - \beta_{11})), \\ \alpha^*_{21} = \varphi^{-2}(\alpha_{21} - A\,\beta_{21}), \\ \alpha^*_{22} + \alpha^*_{11} = \varphi^{-2}(\alpha_{22} + \alpha_{11} + 2A' - 2A^2). \end{cases}$$

Hieraus und aus (11) folgt für die in s quadratischen Ausdrücke

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \alpha \equiv \alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})\,s - \alpha_{21}\,s^2, \\ \beta \equiv \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\,s - \beta_{21}\,s^2 \end{cases}$$

identisch in s das Transformationsverhalten:

$$(1.14)\qquad \begin{cases} \alpha^* = \varphi^{-2}(\alpha - A\,\beta), \\ \beta^* = \varphi^{-1}\beta. \end{cases}$$

Insbesondere ist also β halbinvariant vom Gewicht 1.

Die Ebenen des Raumes beziehen wir auf die Basisvektoren

$$(1.15)\qquad \mathfrak{Q}_1,\quad \mathfrak{Q}_2,\quad \mathfrak{S}_1,\quad \mathfrak{S}_2,$$

die durch die Produkttabelle

$$(1.16)\qquad \begin{array}{c|cccc} & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{s}_2 \\ \hline \mathfrak{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathfrak{Q}_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathfrak{S}_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{S}_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

definiert sind. Zu $\mathfrak{Q}_1 + s\,\mathfrak{Q}_2$, $s = \text{const}$ gehört z. B. die Ebene durch die Erzeugende der Regelfläche und durch die Tangente an die Scharkurve $\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2$. Entsprechend wird $\mathfrak{S}_1 + s\,\mathfrak{S}_2$ von dieser Tangente und der Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ aufgespannt.

Aus (8) und der Produkttabelle (16) folgen die Ableitungsgleichungen für die Ebenenvektoren

$$(1.17)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Q}_1' = \mathfrak{S}_1 + \beta_{11}\mathfrak{Q}_1 + \beta_{12}\mathfrak{Q}_2, \\ \mathfrak{Q}_2' = \mathfrak{S}_2 + \beta_{21}\mathfrak{Q}_1 + \beta_{22}\mathfrak{Q}_2, \\ \mathfrak{S}_1' = \alpha_{22}\mathfrak{Q}_1 - \alpha_{12}\mathfrak{Q}_2, \\ \mathfrak{S}_2' = -\alpha_{21}\mathfrak{Q}_1 + \alpha_{11}\mathfrak{Q}_2. \end{cases}$$

Ein Punkt $\mathfrak{p}$ bzw. eine Ebene $\mathfrak{P}$ läßt sich in lokalen Punkt- bzw. Ebenenkoordinaten darstellen in der Form:

$$\text{(1.18)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{p} = p_0\,\mathfrak{q}_1 + p_1\,\mathfrak{q}_2 + p_2\,\mathfrak{s}_1 + p_3\,\mathfrak{s}_2, \\ \mathfrak{P} = P_0\,\mathfrak{Q}_1 + P_1\,\mathfrak{Q}_2 + P_2\,\mathfrak{S}_1 + P_3\,\mathfrak{S}_2. \end{cases}$$

Die *Inzidenzbedingung* von Punkt $\mathfrak{p}$ und Ebene $\mathfrak{P}$ in lokalen Koordinaten entnimmt man der Produkttabelle:

$$\text{(1.19)} \qquad \mathfrak{P}\,\mathfrak{p} \equiv P_0 p_3 - P_1 p_2 - P_2 p_1 + P_3 p_0 = 0.$$

Die *Stationaritätsbedingung* für einen Punkt $\mathfrak{p}$ bzw. eine Ebene $\mathfrak{P}$ gewinnt man aus den Ableitungsgleichungen (8) bzw. (17):

$$\text{(1.20)} \qquad \begin{cases} -p_0' + \varrho\, p_0 = & & \alpha_{11} p_2 + \alpha_{21} p_3, \\ -p_1' + \varrho\, p_1 = & & \alpha_{12} p_2 + \alpha_{22} p_3, \\ -p_2' + \varrho\, p_2 = & p_0 & + \beta_{11} p_2 + \beta_{21} p_3, \\ -p_3' + \varrho\, p_3 = & & p_1 + \beta_{12} p_2 + \beta_{22} p_3; \end{cases}$$

$$\text{(1.21)} \qquad \begin{cases} -P_0' + \varrho\, P_0 = \beta_{11} P_0 + \beta_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 - \alpha_{21} P_3, \\ -P_1' + \varrho\, P_1 = \beta_{12} P_0 + \beta_{22} P_1 - \alpha_{12} P_2 + \alpha_{11} P_3, \\ -P_2' + \varrho\, P_2 = P_0, \\ -P_3' + \varrho\, P_3 = P_1. \end{cases}$$

Wir wollen uns noch überlegen, wie sich der Übergang zu den Basisvektoren

$$\text{(1.22)} \qquad \hat{\mathfrak{q}}_i = c_{ik}\,\mathfrak{q}_k, \quad \hat{\mathfrak{s}}_i = c_{ik}\,\mathfrak{s}_k, \quad \|c_{ik}\| = \text{const}, \quad i = 1, 2$$

analytisch darstellt. Nach (8) wird

$$\text{(1.23)} \qquad \begin{cases} \hat{\mathfrak{q}}_i' = \hat{\mathfrak{s}}_i + c_{il}'\, c_{lk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{q}}_k, \\ \hat{\mathfrak{s}}_i' = c_{il}\,\alpha_{lm}\, c_{mk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{q}}_k + c_{il}\,\beta_{lm}\, c_{mk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{s}}_k + c_{il}'\, c_{lk}^{-1}\, \hat{\mathfrak{s}}_k, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

wenn man mit (c_{ik}^{-1}) die zu (c_{ik}) inverse Matrix bezeichnet.

$$\text{(1.24)} \qquad \hat{\mathfrak{q}}_1 + \hat{s}\,\hat{\mathfrak{q}}_2, \quad \hat{s} = \text{const}$$

liefert wieder eine Dv-Schar. Wir werden sie weiter unten noch genauer betrachten. (24) fällt genau dann mit der Ausgangsschar zusammen, wenn

$$\text{(1.25)} \qquad c_{ik} = \text{const}.$$

Mit (25) gibt (24) eine gleichberechtigte Darstellung der Ausgangs-Dv-Schar und (22) das allgemeinste zulässige Bezugssystem an. Es wird dann

$$\text{(1.26)} \qquad \begin{cases} \hat{\mathfrak{q}}_i' = \hat{\mathfrak{s}}_i, \\ \hat{\mathfrak{s}}_i' = \hat{\alpha}_{ik}\,\hat{\mathfrak{q}}_k + \hat{\beta}_{ik}\,\hat{\mathfrak{s}}_k, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

mit

$$\text{(1.27)} \qquad \hat{\alpha}_{ik} = c_{il}\,\alpha_{lm}\, c_{mk}^{-1}, \quad \hat{\beta}_{ik} = c_{il}\,\beta_{lm}\, c_{mk}^{-1}.$$

Gegenüber diesen zulässigen Abänderungen des Bezugssystems (22) mit (25) sind die Größen

$$(1.28)\qquad \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21},\quad \alpha_{11}+\alpha_{22},\quad \beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21},\quad \beta_{11}+\beta_{22}$$

invariant. $\beta_{11}+\beta_{22}$ verschwindet auch im neuen System, wie dies nach (4) sein muß. Da die β_{ik} Halbinvarianten sind, stellt

$$(1.29)\qquad \|\beta_{ik}\|=\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}$$

eine Halbinvariante vom Gewicht 2 dar, die nur von der Dv-Schar und nicht von ihrer speziellen Darstellung abhängt. Das Verschwinden dieser Größe hat für die Dv-Schar geometrische Bedeutung. Ist aber $\|\beta_{ik}\|\neq 0$, so kann man durch

$$(1.30)\qquad \tilde{t}=\int\sqrt{\pm\|\beta_{ik}\|}\,dt$$

einen invarianten Parameter in der Dv-Schar einführen.

Wie üblich sprechen sich dann die Hauptsätze aus: *Zwei Doppelverhältnisscharen sind dann und nur dann unter Beachtung der Parameterverteilung projektiv gleichwertig, falls zwischen den Koeffizienten α_{ik},β_{ik} bzw. $\hat{\alpha}_{ik},\hat{\beta}_{ik}$ Beziehungen der Art* (27) *bestehen, wobei (c_{ik}) eine verfügbare Matrix mit konstanten Koeffizienten ist. Sieht man von der Parameterverteilung ab, so kann man entsprechend nach Einführung des invarianten Parameters über projektive Gleichwertigkeit entscheiden.*

Nach (28) ist die Bedingung

$$(1.31)\qquad \alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}=\varphi^{-2}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+2A'-2A^{2})=0$$

nicht von der speziellen Wahl der Darstellung abhängig. Denkt man sich einen solchen Parameter eingeführt, für den (31) gilt — man hat dazu eine Riccatische Differentialgleichung zu lösen —, dann bestimmen sich alle anderen Parameter dieser Eigenschaft aus

$$(1.32)\qquad A'-A^{2}=0,$$

und dies führt auf

$$(1.33)\qquad t^{*}=\frac{d_{11}t+d_{12}}{d_{21}t+d_{22}},\qquad d_{ik}=\text{const}.$$

Durch (31) *ist ein invarianter projektiver Parameter in der Dv-Schar eingeführt, d.h. die zugehörigen Parameter hängen durch linear gebrochene Beziehungen zusammen.* Diese Parameter mögen Cartansche *Parameter* der Dv-Schar heißen.

2. Wir kommen hier zu der geometrischen Deutung der angegebenen Formeln. Betrachten wir zunächst an einer festen Stelle $t=t_0$ die Gesamtheit der Geraden $(\mathfrak{s}_1^{*},\mathfrak{s}_2^{*})$, die zu verschiedenen Parameterverteilungen gehören. Es ist

$$(2.1)\qquad \mathfrak{s}_1^{*}+s\,\mathfrak{s}_2^{*}=\varphi^{-\frac{1}{2}}[\mathfrak{s}_1+A\,\mathfrak{q}_1+s(\mathfrak{s}_2+A\,\mathfrak{q}_2)],$$

und diese Geraden bilden also die eine Geradenschar der Quadrik

$$p_0 p_3 - p_1 p_2 = 0. \tag{2.2}$$

Wir nennen diese invariant mit der Dv-Schar verbundene Quadrik die zugehörende *Berührquadrik*. Die eine Geradenschar dieser Quadrik,

$$(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*) = \varphi^{-1}(\mathfrak{x}_1 + A\,\mathfrak{q}_1, \mathfrak{x}_2 + A\,\mathfrak{q}_2), \tag{2.3}$$

zu der auch $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ selbst gehört, heißt die *konkordante Schar*; die andere Geradenschar,

$$(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2, \mathfrak{x}_1 + s\,\mathfrak{x}_2), \tag{2.4}$$

die *Transversalschar. Die konkordante Schar wird gebildet aus allen Geraden* $(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)$, *die zu verschiedenen Parameterverteilungen gehören; die Transversalschar besteht aus den Tangenten an die Kurven der Dv-Schar.* Natürlich berührt die Berührquadrik die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$, denn die Geraden der Transversalschar haben diese Eigenschaft. Siehe Fig. 1.

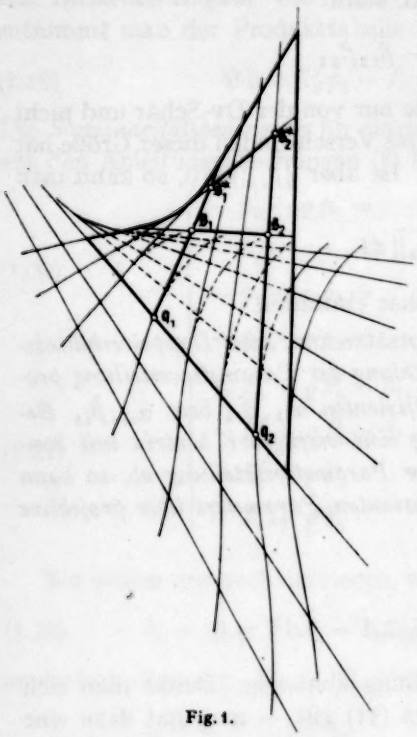


Fig. 1.

Es gilt aber auch die Umkehrung[5]: *Eine einparametrige Quadrikschar, die eine Regelfläche als Hüllfläche besitzt, definiert auf dieser eine Dv-Schar; die Tangenten an die Kurven der Dv-Schar bilden die eine Geradenschar der Quadrik.* Zum Beweis denke man sich die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ durch die Quadrikschar eingehüllt. Eine die Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ berührende Quadrik hat in lokalen Koordinaten eine Gleichung der Gestalt

$$2(p_0 p_3 - p_1 p_2) + \tau_{12} p_2^2 + (\tau_{22} - \tau_{11})\, p_2 p_3 - \tau_{21} p_3^2 = 0. \tag{2.5}$$

Die Tangenten an die Kurven

$$\mathfrak{q}_1(t) + s(t)\,\mathfrak{q}_2(t) \tag{2.6}$$

mit

$$s' = \tau, \qquad \tau \equiv \tau_{12} + (\tau_{22} - \tau_{11})\, s - \tau_{21} s^2 \tag{2.7}$$

liegen auf der Quadrik (5). Da sich $s(t)$ aus einer RICCATIschen Differentialgleichung berechnet, schneiden die Scharkurven die Erzeugenden unter konstantem Doppelverhältnis, d.h. (5) definiert eine Dv-Schar. Die Beziehung von

[5]) R. DEAUX hat von diesem Gesichtspunkt aus die Dv-Scharen untersucht. DEAUX, R.: Familles anharmoniques de courbes sur une surface gauche. Christiaan Huygens Math. Tydschrift **13**, 275—288.

(5) und (6), (7) ist eindeutig umkehrbar[6]) und deshalb gilt auch[7]): *Jede Dv-Schar ist in einem beliebigen Bezugssystem durch eine* RICCATI*sche Differentialgleichung darstellbar.*

Zusammenfassend heben wir hervor: *Mit den Dv-Scharen untersucht man zugleich die Kinematik der Quadrikscharen, deren Hüllfläche in eine Regelfläche und einen anderen Bestandteil zerfällt*[8]).

Kurven der Dv-Schar (6) berühren Kurven der Ausgangsschar in den Nullstellen von τ:

$$\tau_{12} + (\tau_{22} - \tau_{11})\, s - \tau_{21}\, s^2 = 0. \tag{2.8}$$

Man spricht von den *Berührstellen* der beiden Dv-Scharen und erhält: Zwei Dv-Scharen berühren sich auf jeder Erzeugenden in genau zwei Punkten, die zusammenfallen können. Auf der Regelfläche entstehen so die *Berührkurven* der beiden Dv-Scharen.

Insbesondere bilden die Asymptotenlinien eine Dv-Schar, die invariant mit der Regelfläche verbunden ist. Die Kurve

$$\mathfrak{q}(t) = \mathfrak{q}_1(t) + s(t)\, \mathfrak{q}_2(t) \tag{2.9}$$

durchläuft eine Asymptotenlinie, falls

$$\mathfrak{q}'' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}'}$$

ist. Es wird nach (1.8)

$$\begin{cases} \mathfrak{q}' = \hat{\mathfrak{s}}_1 + s\,\hat{\mathfrak{s}}_2 + s'\,\mathfrak{q}_2, \\ \mathfrak{q}'' \equiv (\beta + 2s')\,\hat{\mathfrak{s}}_2 + (\alpha + s'')\,\mathfrak{q}_2 \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'}, \end{cases} \tag{2.10}$$

und somit *gibt*

$$-2s' = \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\, s - \beta_{21}\, s^2 \tag{2.11}$$

die Differentialgleichung der Asymptotenlinien auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$.

Zu der Dv-Schar der Asymptotenlinien gehört die *Schmiegquadrik*

$$-2(p_0 p_3 - p_1 p_2) + \beta_{12} p_2^2 + (\beta_{22} - \beta_{11})\, p_2 p_3 - \beta_{21} p_3^2 = 0\,. \tag{2.12}$$

Die Nullstellen von β geben die *Schmiegstellen* der Dv-Schar auf der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ an. In ihnen berühren sich Asymptotenlinien und Scharkurven. Die Tangenten an die Scharkurven in den Schmiegstellen bilden zusammen mit der doppelt zählenden Geraden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ das Schnittgebilde der beiden Quadriken (2) und (12). Auf der von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ erzeugten Regelfläche

[6]) Vgl. hierzu auch BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare. Math. Z. **56**, 409—442 (1952), insbesondere § 3.

[7]) Hiervon geht O. MAYER bei seiner Behandlung der Dv-Scharen aus: MAYER, O.: Sur les surfaces réglées. III, IV, V. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **26**, 299—308, 626—632 (1940), **27**, 3—11 (1941).

[8]) Inzwischen hat Herr H. KUNLE solche Quadrikscharen genauer untersucht, bei denen die Hüllfläche in vier Regelflächen zerfällt. Dabei wird als Bezugssystem das entstehende windschiefe Vierseit verwendet. KUNLE, H.: Zur projektiven Kinematik der einparametrigen Quadrikscharen. Diss. Freiburg i. Br. 1953.

bestimmen die Schmiegstellen die *Schmiegkurven. Die Schmiegkurven der Dv-Schar sind durch*

$$\beta = 0 \tag{2.13}$$

gegeben.

Die Fleknodalpunkte einer Erzeugenden (q_1, q_2) — in ihnen besitzen die krummlinigen Asymptotenlinien Wendepunkte — bestimmen sich aus

$$\mathfrak{q}'' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'},$$

und dies führt nach (10) mittels (11) auf die quadratische Gleichung

$$\beta_t - 2\alpha = 0. \tag{2.14}$$

(14) *kennzeichnet die Fleknodalkurven der Regelfläche.*

Sind alle $\beta_{ik} = 0$, so fällt die der Betrachtung zugrunde gelegte Dv-Schar mit den Asymptotenlinien zusammen. Die aufgestellten Formeln gehen dann über in die Formeln, die G. BOL der Behandlung der Regelflächen zugrunde legt[9]).

Wir kommen zurück zu der Quadrik (2), der Berührquadrik der Dv-Schar, und betrachten die konkordanten Geraden dieser Quadrik. Bei gegebener Parameterverteilung ist $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ an jeder Stelle eine ganz bestimmte konkordante Gerade. *Zeichnen wir umgekehrt für jeden Wert von t eine konkordante Gerade aus, wobei diese Geradengesamtheit stetig von t abhängen soll, so kann man den Parameter t immer so einrichten, daß $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ für jedes t mit dieser Geraden zusammenfällt. Der zugehörige Parameter ist bis auf ganze lineare Substitutionen bestimmt.* Es wird uns dies im folgenden nützlich sein.

Längs der Dv-Schar bildet die konkordante Schar die *konkordante Kongruenz.* Wir wollen ihre Brennflächen und ihre Torsallinien bestimmen und denken uns zu diesem Zweck den Parameter so eingerichtet, daß $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ eine Torse durchläuft. Es sei

$$\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2 \tag{2.15}$$

ein Brennpunkt dieser Torse, d.h. es ist

$$(\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2)' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2}.$$

Wegen

$$\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2 \equiv (\alpha_{11} + s\,\alpha_{21})\,\mathfrak{q}_1 + (\alpha_{12} + s\,\alpha_{22})\,\mathfrak{q}_2 \pmod{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2}$$

führt dies auf

$$\alpha_{11} + s\,\alpha_{21} = 0,$$
$$\alpha_{12} + s\,\alpha_{22} = 0.$$

Ist dieses System für s lösbar, d.h. gilt

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0, \tag{2.16}$$

[9]) BOL, G.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen. Math. Z. 52, 791—809 (1950).

so berechnen sich die Brennpunkte aus der quadratischen Gleichung

$$\alpha \equiv \alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})\, s - \alpha_{21}\, s^2 = 0. \tag{2.17}$$

Gehen wir mittels (1.10) und (1.14) zu einem beliebigen Parameter über, so finden wir die Brennflächen der konkordanten Kongruenz nach Elimination von A aus

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1^* + s\,\mathfrak{x}_2^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}[\mathfrak{x}_1 + s\,\mathfrak{x}_2 + A(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2)], \\ \alpha^* = \varphi^{-2}(\alpha - A\,\beta) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Dies führt auf

$$\mathfrak{y}(t, s) = \alpha(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2) + \beta(\mathfrak{x}_1 + s\,\mathfrak{x}_2). \tag{2.19}$$

Haben $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ keine Wurzel gemeinsam, so werden die Brennflächen der konkordanten Kongruenz erzeugt von den Kurven dritter Ordnung (19). Je nachdem, ob die beiden Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ eine oder zwei Wurzeln gemeinsam haben, zerfällt diese erzeugende Kurve in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in zwei Geraden [vgl. hierzu 4b)].

Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall. Jede der beiden Brennflächen der konkordanten Kongruenz wird erzeugt von der Kurve (19). Die Punkte dieser Kurve sind also paarweise einander zugeordnet — es entstehen die Paare einer Involution, die durch das Büschel quadratischer Gleichungen

$$\alpha - A\,\beta = 0 \tag{2.20}$$

bestimmt sind. Diese Involution, die zunächst auf den Kurven dritter Ordnung (19) erklärt ist, überträgt sich mittels der Geraden der Transversalschar auf jede konkordante Gerade, insbesondere also auch auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$.

Mit einer Dv-Schar ist eine Involution lokal verknüpft, die durch die Wurzeln von (20) *erzeugt wird.* Wir nennen die Doppelpunkte dieser Involution *Spiegelpunkte* der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$. Die Transversalgeraden durch die Spiegelpunkte heißen *Spiegelgeraden.* Und so können wir sagen: *Die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz auf einer konkordanten Geraden trennen die Schnittpunkte mit den Spiegelgeraden harmonisch.*

Die einparametrige Schar der Berührquadriken hüllt außer der Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ noch die von den Kurven dritter Ordnung (19) gebildete Fläche ein. Denn die konkordanten Geraden jeder Berührquadrik berühren diese Fläche. Die Kongruenz der Transversalgeraden hat also außer der Regelfläche $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ die von den Kurven dritter Ordnung (19) erzeugte Fläche zur Brennfläche. Die Tangentenebenen an diese Fläche sind demnach Schmiegebenen an die Torsallinien auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$. Dies sind aber die Scharkurven der Doppelverhältnisschar. Da nun die Tangentenebene an die Brennfläche (19) mit der Tangentenebene an die Berührquadrik zusammenfällt, kann man diese sofort in der Form

$$\mathfrak{Y}(t, s) = \alpha(\mathfrak{Q}_1 + s\,\mathfrak{Q}_2) + \beta(\mathfrak{S}_1 + s\,\mathfrak{S}_2) \tag{2.21}$$

angeben. Denn (19) und (21) sind polar bezüglich der Berührquadrik. *Die Schmiegebene an eine Scharkurve* (1.2) *ist durch* (21) *bestimmt. Sie berührt*

die Berührquadrik (2) *in dem zugehörigen Punkt* (19). Man kann natürlich (21) auch direkt durch Rechnung bestätigen.

Dual entsprechend gilt: $\mathfrak{y}$ *ist der Ort der Kehlpunkte der Streifen, die die Tangentenebenen an die Regelfläche längs der Kurven der konjugierten Schar bilden.*

3. Die Kurven einer Doppelverhältnisschar bilden die Erzeugenden der Regelfläche projektiv aufeinander ab. Wir denken uns in dieser Weise die Erzeugenden der Regelfläche durch die Kurven der Doppelverhältnisschar auf ein binäres Gebiet abgebildet, das wir uns nach HESSE als einen Kegelschnitt einer Hilfsebene vorstellen. Ein Punkt des Kegelschnitts repräsentiert dann eine Kurve der Schar. Ein Punkt der Hilfsebene, der nicht auf dem Kegelschnitt liegt, definiert durch seine polare Gerade ein Punktepaar des Kegelschnitts, d.h. auf der Regelfläche wird so ein Paar von Scharkurven festgelegt.

Denkt man sich die Hilfsebene auf die Basisvektoren

$$\mathfrak{x},\quad \mathfrak{z},\quad \bar{\mathfrak{x}} \tag{3.1}$$

bezogen und einen Punkt der Ebene also in der Form

$$\mathfrak{p} = \boldsymbol{p}_0\,\mathfrak{x} + \boldsymbol{p}_1\,\mathfrak{z} + \boldsymbol{p}_2\,\bar{\mathfrak{x}} \tag{3.2}$$

dargestellt, so können wir den Kegelschnitt uns durch

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle \equiv -\,\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1^2 = 0 \tag{3.3}$$

gegeben denken. Die Parameterdarstellung des Kegelschnitts lautet dann etwa

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x} + s\,\mathfrak{z} + s^2\,\bar{\mathfrak{x}}. \tag{3.4}$$

Die Polare des Punktes (2) schneidet aus dem Kegelschnitt das Punktepaar

$$\boldsymbol{p}_2 - 2s\,\boldsymbol{p}_1 + s^2\,\boldsymbol{p}_0 = 0 \tag{3.5}$$

aus, das also dem Punkt $\mathfrak{p}$ in (2) umkehrbar eindeutig zugeordnet ist. In den Anwendungen schreiben wir die quadratischen Ausdrücke in s meist in der Form

$$\boldsymbol{\lambda} \equiv \boldsymbol{\lambda}_{12} + (\boldsymbol{\lambda}_{22} - \boldsymbol{\lambda}_{11})\,s - \boldsymbol{\lambda}_{21}\,s^2. \tag{3.6}$$

Der Vergleich mit (2) und (5) lehrt, daß (6) umkehrbar eindeutig auf den Punkt

$$\mathfrak{l} = -\,\boldsymbol{\lambda}_{21}\,\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{\lambda}_{22} - \boldsymbol{\lambda}_{11})\,\mathfrak{z} + \boldsymbol{\lambda}_{12}\,\bar{\mathfrak{x}} \tag{3.7}$$

der Hilfsebene abgebildet ist.

Eine Kurve der Regelfläche, die von einer Scharkurve verschieden ist, ordnet sich einem bewegten Punkt in dem binären Gebiet zu, dessen Bewegung abhängt von dem Parameter t auf der Regelfläche. Zu den Kurvenpaaren der Regelfläche gehören umkehrbar eindeutig die Kurven der Hilfsebene.

Ist uns nun neben der Ausgangsschar eine weitere Doppelverhältnisschar auf der Regelfläche gegeben, so bestimmt diese eine *projektive Bewegung*[10]) in dem binären Gebiet, d.h. in der Hilfsebene eine projektive Bewegung des Kegelschnitts (3) in sich.

Betrachten wir den Kegelschnitt (3) der Hilfsebene als den *absoluten Kegelschnitt einer hyperbolischen Geometrie*, so überträgt sich die projektive Bewegung des Kegelschnitts in sich auf eine *hyperbolische Bewegung* der Hilfsebene — und umgekehrt. Wir sprechen deshalb von der *hyperbolischen Bildebene* und sagen, die hyperbolische Bewegung sei *das Bild* der Dv-Schar in der Ausgangsschar. Umgekehrt hat z.B. eine Kurve der festen oder der bewegten hyperbolischen Ebene zum *Urbild* jeweils ein eindeutig bestimmtes Kurvenpaar auf der Regelfläche.

Die *krummlinigen Asymptotenlinien* einer Regelfläche bilden eine Doppelverhältnisschar. Wir wollen diese jetzt als Ausgangsschar verwenden. Wenn nicht ausdrücklich anders hervorgehoben, denken wir uns im folgenden die Erzeugenden der Regelfläche durch die zweite Schar der Asymptotenlinien projektiv aufeinander und auf den Kegelschnitt der Hilfsebene abgebildet. Die betrachtete Dv-Schar definiert dann in der Hilfsebene eine hyperbolische Bewegung. Diese Bewegung betrachten wir als das Bild der Dv-Schar (1.2) mit (1.8) (in der Schar der Asymptotenlinien). Diese hyperbolische Bewegung soll jetzt analytisch erfaßt werden.

Wir denken uns hierzu das durch (1) gegebene Bezugssystem so bewegt, daß die Basisvektoren den Ableitungsgleichungen

$$\text{(3.8)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}' = \beta_{11}\mathfrak{x} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\mathfrak{d}, \\ \mathfrak{d}' = \beta_{21}\mathfrak{x} \qquad\quad + \beta_{12}\bar{\mathfrak{x}}, \\ \bar{\mathfrak{x}}' = \qquad\quad \tfrac{1}{2}\beta_{21}\mathfrak{d} + \beta_{22}\bar{\mathfrak{x}} \end{cases}$$

genügen. Ein Punkt

$$\text{(3.9)} \qquad \mathfrak{p} = \boldsymbol{p}_0(t)\,\mathfrak{x}(t) + \boldsymbol{p}_1(t)\,\mathfrak{d}(t) + \boldsymbol{p}_2(t)\,\bar{\mathfrak{x}}(t)$$

verhält sich in dieser Bewegung stationär, falls

$$\mathfrak{p}' - \varrho\,\mathfrak{p} = 0$$

ist. Dies führt ausgeschrieben auf die *Stationaritätsbedingung*:

$$\text{(3.10)} \qquad \begin{cases} -\boldsymbol{p}_0' + \varrho\,\boldsymbol{p}_0 = \beta_{11}\boldsymbol{p}_0 + \beta_{21}\boldsymbol{p}_1, \\ -\boldsymbol{p}_1' + \varrho\,\boldsymbol{p}_1 = \tfrac{1}{2}\beta_{12}\boldsymbol{p}_0 \qquad + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\boldsymbol{p}_2, \\ -\boldsymbol{p}_2' + \varrho\,\boldsymbol{p}_2 = \qquad\quad \beta_{12}\boldsymbol{p}_1 + \beta_{22}\boldsymbol{p}_2. \end{cases}$$

Hiermit bestätigt man sofort

$$\langle \mathfrak{p}(t), \mathfrak{p}(t) \rangle' = 0.$$

(8) läßt also den absoluten Kegelschnitt fest und definiert somit tatsächlich eine hyperbolische Bewegung der Hilfsebene.

[10]) Der Begriff „Bewegung" tritt in dieser Arbeit nur in kinematischem Sinne auf.

Wann ist der Punkt

$$\mathfrak{k}(t,s) = \mathfrak{x}(t) + s(t)\,\mathfrak{z}(t) + s^2(t)\,\bar{\mathfrak{x}}(t) \tag{3.11}$$

des Kegelschnitts (3) in der Bewegung (8) fest? Es ist

$$\mathfrak{k}_t\big(t, s(t)\big) = \tfrac{1}{2}\{2s' + \beta\}\,(\mathfrak{z} + 2s\,\bar{\mathfrak{x}}) + (\beta_{11} + \beta_{21}\,s)\,\mathfrak{k}.$$

Für die ortsfesten Punkte gilt also die RICCATIsche Differentialgleichung

$$-2s' = \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\,s - \beta_{21}\,s^2.$$

Im Vergleich mit (2.11) steckt darin der Beweis für die Behauptung.

Wir fassen zusammen: *Denken wir uns die Erzeugenden einer Regelfläche durch ihre krummlinigen Asymptotenlinien aufeinander abgebildet, so bestimmt eine Doppelverhältnisschar eine projektive Bewegung in diesem binären Gebiet. Deutet man sich dieses nach* HESSE *als einen Kegelschnitt einer Hilfsebene, so induziert die projektive Bewegung auf dem Kegelschnitt eine hyperbolische Bewegung in der Hilfsebene. Die zu der Doppelverhältnisschar* (1.2) *mit* (1.8) *gehörende hyperbolische Bewegung ist durch* (8) *gekennzeichnet.*

Hierin liegt insbesondere die Aussage: *Die Eigenschaften der Doppelverhältnisschar* (1.2) *mit* (1.8), *die invariant sind gegenüber asymptotenlinienerhaltenden Abbildungen der Regelfläche, sind gekennzeichnet durch die Eigenschaften der zugehörigen hyperbolischen Bewegung* (8) *der Hilfsebene.*

Sprechen wir also kurz von den Eigenschaften der hyperbolischen Bewegungen der Ebene. Sie werden — wie die euklidischen Bewegungen — beschrieben, indem eine Kurve des bewegten Systems (die Gangpolbahn) über eine Kurve des festen Systems (die Rastpolbahn) hyperbolisch abrollt ohne zu gleiten. Der Ort der momentanen Fixpunkte bestimmt in beiden Systemen diese Kurven.

Der Punkt

$$\mathfrak{b} = -\beta_{21}\,\bar{\mathfrak{x}} - \tfrac{1}{2}\,(\beta_{22} - \beta_{11})\,\mathfrak{z} + \beta_{12}\,\bar{\mathfrak{z}} \tag{3.12}$$

der Hilfsebene ist nach (2.13), (6) und (7) das Bild der Schmiegstellen. Es gilt

$$\mathfrak{b}' = -\beta'_{21}\,\bar{\mathfrak{x}} - \tfrac{1}{2}\,(\beta'_{22} - \beta'_{11})\,\mathfrak{z} + \beta'_{12}\,\bar{\mathfrak{z}},$$

und demnach ist $\mathfrak{b}$ der momentane Drehpol der Bewegung; denn dieser Punkt hat im festen wie im bewegten System die gleiche „Geschwindigkeit". *Der Ort der Schmiegstellen definiert im hyperbolischen Bild den Ort der momentanen Fixpunkte im bewegten und festen System.*

Gibt man umgekehrt in der Ebene zwei hyperbolisch längentreu aufeinander bezogene Kurven vor, so gibt es dazu genau eine hyperbolische Bewegung, die diese Kurven als Orte der momentanen Fixpunkte im festen bzw. bewegten System besitzt. Man kann also eine Dv-Schar invariant durch die Angabe der hyperbolischen Krümmungen *der* beiden Kurven eindeutig festlegen, die dem Schmiegkurvenpaar in bezug auf die Schar der Asymptotenlinien bzw. in bezug auf die Dv-Schar in der hyperbolischen Ebene entsprechen.

Wir sahen bereits, daß sich bei einer Dv-Schar die Eigenschaften, die gegenüber asymptotenlinienerhaltenden Abbildungen invariant sind, in der zugehörigen hyperbolischen Bewegung (8) ausdrücken. Denken wir uns jedoch eine Dv-Schar auf einer konkret vorgegebenen Regelfläche, so lassen sich auch noch andere Größen in dem hyperbolischen Bild deuten.

Die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz auf einer bestimmten konkordanten Geraden $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ übertragen sich mittels der hindurchgehenden Transversalgeraden auf (q_1, q_2), d.h. in das binäre Gebiet, und sind nach (2.17) durch

$$\alpha \equiv \alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})\, s - \alpha_{21}\, s^2 = 0$$

bestimmt. Ihr hyperbolisches Bild ist demnach der Punkt

$$(3.13)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = -\alpha_{21}\,\mathfrak{x} - \\ \quad -\tfrac{1}{2}(\alpha_{22} - \alpha_{11})\,\mathfrak{d} + \alpha_{12}\,\bar{\mathfrak{x}}. \end{cases}$$

Gehen wir zu einer anderen Parameterverteilung und damit zu einer anderen konkordanten Geraden $(\bar{s}_1^*, \bar{s}_2^*)$ über, so gehört hierzu der Punkt

$$\mathfrak{a}^* = \varphi^{-2}(\mathfrak{a} - A\,\mathfrak{b}).$$

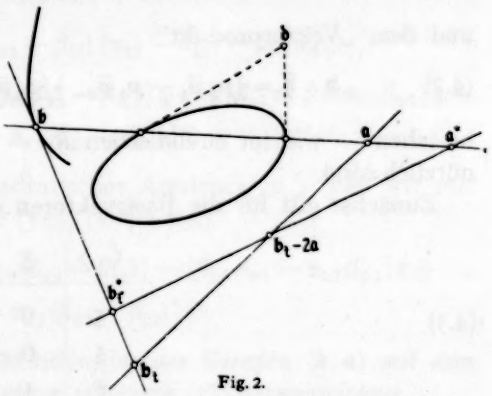


Fig. 2.

In der Hilfsebene ist also an jeder Stelle eine Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ durch den momentanen Fixpunkt der Bewegung $\mathfrak{b}$ definiert, die die lokal bestimmte Involution auf der Erzeugenden kennzeichnet. Die Paare der Involution werden von den Polaren der Punkte der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ aus dem Kegelschnitt ausgeschnitten. Die Doppelpunkte der Involution — wir nannten sie im Urbild die Spiegelpunkte der Erzeugenden — werden von der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ auf dem Kegelschnitt bestimmt. Ihr Bildpunkt ist also der Pol der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$.

Bei Parametertransformation zeigt $\mathfrak{b}$ das Verhalten

$$(3.14)\qquad \mathfrak{b}^* = \varphi^{-1}\,\mathfrak{b},$$

und also ist

$$(3.15)\qquad \frac{d\,\mathfrak{b}^*}{dt^*} = \varphi^{-2}(\mathfrak{b}' - 2A\,\mathfrak{b}).$$

Der Vektor

$$(3.16)\qquad \frac{d\,\mathfrak{b}^*}{dt^*} - 2\,\mathfrak{a}^* = \varphi^{-2}(\mathfrak{b}' - 2\,\mathfrak{a})$$

ist demnach halbinvariant vom Gewicht 2. Er stellt nach (2.14) das Bild der Fleknodalpunkte der Erzeugenden dar.

Die Figur 2 veranschaulicht die in das hyperbolische Bild eingehenden geometrischen Größen. Man kann daran unmittelbar eine Reihe von invarianten Eigenschaften einer Dv-Schar ablesen. Wir gehen darauf nur an

Beispielen in dem folgenden II. Teil dieser Arbeit ein. Insbesondere vergleiche man Abschnitt 9, S. 91, wo die Frage behandelt wird, inwiefern eine Dv-Schar durch ihr hyperbolisches Bild festgelegt ist.

II. Geometrische Ergebnisse und ergänzende Bemerkungen.

4. a) Zwischen den beiden Produktbildungen in der hyperbolischen Ebene, dem „Skalarprodukt"

$$\langle \mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}} \rangle = p_0 \bar{p}_2 - 2 p_1 \bar{p}_1 + p_2 \bar{p}_0 \tag{4.1}$$

und dem „Vektorprodukt"

$$\mathfrak{p} \wedge \bar{\mathfrak{p}} = \{p_0 \bar{p}_1 - p_1 \bar{p}_0,\ \tfrac{1}{2}(p_0 \bar{p}_2 - p_2 \bar{p}_0),\ p_1 \bar{p}_2 - p_2 \bar{p}_1\}, \tag{4.2}$$

bestehen — wie im euklidischen R_3 — gewisse Identitäten, die manchmal nützlich sind.

Zunächst gilt für die Basisvektoren die Produkttabelle

(4.3)

$\langle , \rangle$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{z}$	$\bar{\mathfrak{x}}$
$\mathfrak{x}$	0	0	1
$\mathfrak{z}$	0	−2	0
$\bar{\mathfrak{x}}$	1	0	0

bzw.

(4.4)

$\wedge$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{z}$	$\bar{\mathfrak{x}}$
$\mathfrak{x}$	0	$\mathfrak{x}$	$\frac{1}{2}\mathfrak{z}$
$\mathfrak{z}$	$-\mathfrak{x}$	0	$\bar{\mathfrak{x}}$
$\bar{\mathfrak{x}}$	$-\frac{1}{2}\mathfrak{z}$	$-\bar{\mathfrak{x}}$	0

Ferner ist

$$2\,\mathfrak{p} \wedge (\mathfrak{q} \wedge \mathfrak{r}) = -\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle \mathfrak{r} + \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{r} \rangle \mathfrak{q}, \tag{4.5}$$

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{r} \rangle = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \tag{4.6}$$

und daraus folgt insbesondere

$$2\langle \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{s} \rangle = \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{r} \rangle \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{s} \rangle - \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{s} \rangle \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \rangle. \tag{4.7}$$

Zum Beweis genügt es, diese Relationen an Hand von (3) und (4) für die Basisvektoren zu bestätigen.

Das Produkt $\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$ definiert den zu der Geraden $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ polaren Punkt. Die Gerade $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ berührt also genau dann den absoluten Kegelschnitt, wenn

$$\langle \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}, \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} \rangle = 0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} \neq 0 \tag{4.8}$$

gilt. Das Zusammenfallen zweier Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ wird durch

$$\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} = 0 \tag{4.9}$$

gekennzeichnet.

$\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$ ist als Pol der Geraden $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ nur bis auf die Normierung festgelegt. Die Definition (2) ist so gewählt, daß aus

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle = 2\varepsilon_1, \quad \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{q} \rangle = 2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \tag{4.10}$$

folgt

$$\langle \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}, \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q} \rangle = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2. \tag{4.11}$$

b) Als Anwendung berechnen wir $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle$ bzw. $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$. Gehen wir mit (3.12) bzw. (3.13) in (1) bzw. (2) ein, so wird

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle = -\beta_{21}\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \beta_{12}\alpha_{21}, \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a} = {} & \tfrac{1}{2}[\beta_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{21}(\beta_{22} - \beta_{11})]\,\mathfrak{x} + \tfrac{1}{2}[\beta_{12}\alpha_{21} - \alpha_{12}\beta_{21}]\,\mathfrak{d} + \\ & + \tfrac{1}{2}[\beta_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})]\,\bar{\mathfrak{x}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Zu $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$ gehört ein bestimmter quadratischer Ausdruck in s, den wir mit $\beta \wedge \alpha$ bezeichnen. Der Vergleich mit (3.6), (3.7) liefert

$$\left.\begin{aligned} \beta \wedge \alpha = {} & \tfrac{1}{2}[\beta_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})] - [\beta_{12}\alpha_{21} - \alpha_{12}\beta_{21}]\,s + \\ & + \tfrac{1}{2}[\beta_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{21}(\beta_{22} - \beta_{11})]\,s^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Die Nullstellen von (14) *sind die Schnittpunkte der Geraden* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ *mit dem absoluten Kegelschnitt. Dieses Punktepaar ist durch* (13) *gekennzeichnet.*

Diese Betrachtung ist zunächst von der Bedeutung von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ unabhängig. Beachten wir aber jetzt, daß die Punkte der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ die Paare der ausgezeichneten Involution definieren, so gilt: *Die Spiegelpunkte auf einer Erzeugenden berechnen sich aus*

$$\delta \equiv \beta \wedge \alpha = 0$$

[*vgl.* (14)], *ihr hyperbolisches Bild ist*

$$\mathfrak{d} \equiv \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$$

[*vgl.* (13)].

Die Involution entartet, d.h. die Spiegelpunkte fallen zusammen genau dann, wenn die beiden quadratischen Gleichungen $\beta = 0$, $\alpha = 0$ eine Wurzel gemein haben. Hierfür ist

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = 0, \quad \mathfrak{b} \neq 0 \tag{4.15}$$

kennzeichnend. Die Spiegelpunkte sind unbestimmt, falls

$$\mathfrak{b} = 0, \tag{4.16}$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$\alpha = \Phi\beta, \qquad \mathfrak{a} = \Phi\mathfrak{b}. \tag{4.17}$$

In diesem Fall sind die Wurzeln von $\alpha = 0$, $\beta = 0$ dieselben.

Es sei $s = s_0$ eine gemeinsame Wurzel von $\beta = 0$ und $\alpha = 0$. Dann ist jeder Punkt der Geraden

$$(\mathfrak{q}_1 + s_0\mathfrak{q}_2,\ \bar{\mathfrak{s}}_1 + s_0\bar{\mathfrak{s}}_2) \tag{4.18}$$

Brennpunkt der konkordanten Kongruenz. Denn mit $s = s_0$ ist (2.18) für jeden Wert von A erfüllt.

Der Ort der Brennpunkte der konkordanten Kongruenz für einen bestimmten Wert von t zerfällt genau dann in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wenn (15); *er zerfällt in zwei Geraden, wenn* (16) *bzw.* (17) *gilt.*

Nach (2.21) ist für eine gemeinsame Wurzel von $\beta = 0$ und $\alpha = 0$ die Schmiegebene der Scharkurve unbestimmt. Die Scharkurve hat an einer solchen Stelle also einen Wendepunkt — und nur an einer solchen Stelle. *Die Tangente an eine Scharkurve besteht genau dann aus Brennpunkten der konkordanten Kongruenz, wenn diese Tangente Wendetangente der zugehörigen Scharkurve ist.* Es kennzeichnet also (15), daß *eine* der Scharkurven entlang der betrachteten Erzeugenden einen Wendepunkt, (16), daß *zwei* der Scharkurven Wendepunkte besitzen.

5. a) Die charakteristische Kurve zweier benachbarter Berührquadriken besteht neben der Erzeugenden der Regelfläche im allgemeinen aus der Kurve dritter Ordnung (2.19). Diese zerfällt, falls (4.15) gilt, in die Gerade (4.18) und den Kegelschnitt (2.19). Dieser Kegelschnitt trägt dann neben $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ auch die Brennpunkte der Transversalkongruenz. Gilt (4.16), so sind die Brennflächen der konkordanten Kongruenz Regelflächen, die charakteristische Kurve der Schar der Berührquadriken muß in ein Vierseit zerfallen. Die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz ist dann ebenfalls Regelfläche. Sie wird erzeugt von der konkordanten Gerade

$$(\mathfrak{s}_1 + \Phi \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{s}_2 + \Phi \mathfrak{q}_2). \tag{5.1}$$

Mit (4.17) bestätigt man z. B., daß die Gerade $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)$ die Regelfläche (1) berührt. $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1)$ ist aber vor anderen Tangenten an Scharkurven nicht ausgezeichnet.

Es gilt aber auch umgekehrt: *Ist die charakteristische Kurve einer einparametrigen Quadrikschar ein Vierseit, so liegt die betrachtete Figur vor. Die Erzeugenden der Quadrik definieren auf jeder der vier Regelflächen eine Dv-Schar, die diese Erzeugenden zu Tangenten haben. Diese Dv-Scharen besitzen die Eigenschaft* (4.16).

Hier sind also die vier in der Figur auftretenden Regelflächen völlig gleichberechtigt. Konkordante Kongruenz (wie auch Transversalkongruenz) sind W-Strahlsysteme. Es entsprechen sich ja die geradlinigen Erzeugenden der Brennflächen. Zwei „gegenüberliegende" Regelflächen in dieser Figur heißen deshalb *W-transformierte Regelflächen.* Hat man umgekehrt zwei W-transformierte Regelflächen, so gehört auch zu ihnen die beschriebene Figur: Die Torsallinien bilden auf jeder der Regelflächen eine Dv-Schar mit der Eigenschaft (4.16).

Man nennt eine Dv-Schar mit (4.16) auch *schichtbildend.* Die Schmiegebenen der Scharkurven bilden nämlich nach (2.21) ein Ebenenbüschel mit der zugehörenden Gerade (1) der zweiten Brennfläche der Transversalkongruenz als Büschelachse.

b) Zu einer schichtbildenden Dv-Schar gehört somit ein ausgezeichneter Parameter — man kann die Parameterverteilung ja immer so einrichten, daß eine beliebig vorgegebene konkordante Gerade mit $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ zusammenfällt. Wann beschreibt $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz einer schichtbildenden Dv-Schar? Es ist

$$(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*) = \varphi^{-1}(\mathfrak{s}_1 + A\,\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2 + A\,\mathfrak{q}_2),$$

und der Vergleich mit (1) lehrt, daß man A aus

$$A = \Phi \tag{5.2}$$

zu bestimmen hat. Dann verschwindet aber

$$\mathfrak{a}^* = \varphi^{-2}(\mathfrak{a} - A\,\mathfrak{b}) = \varphi^{-2}(\mathfrak{a} - \Phi\,\mathfrak{b}).$$

Alle Parameter mit dieser Eigenschaft in einer schichtbildenden Dv-Schar hängen durch ganze lineare Substitutionen zusammen.

Bei geeigneter Parameterverteilung ist eine schichtbildende Dv-Schar durch

$$\mathfrak{a} = 0 \tag{5.3}$$

gekennzeichnet. Die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ beschreibt bei dieser Parameterverteilung die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz.

c) Im Geradenraum sind die schichtbildenden Dv-Scharen durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet: *Es existiert eine konkordante Gerade — es sei dies $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ —, so daß zwei benachbarte Geraden $\big((\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2), (\mathfrak{s}_1', \mathfrak{s}_2)\big)$ des Geradenraumes sich schneiden.*

Es ist nach den Ableitungsgleichungen (1.8)

$$\left\{\begin{aligned}[\Psi(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)]' = {} & (\alpha_{11} + \Psi)(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2) + (\alpha_{22} + \Psi)(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{q}_2) + \\ & + \Psi'(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + \alpha_{12}(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{s}_2) + \alpha_{21}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{q}_1),\end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

und das Schneiden zweier benachbarter Geraden $\big((\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2), (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)\big)$ ist durch

$$[\Psi(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)]' \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\ (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)} \tag{5.5}$$

gekennzeichnet. Dies führt auf

$$\mathfrak{a} = 0, \quad \alpha_{11} + \alpha_{22} + 2\Psi = 0, \tag{5.6}$$

und die so ausgezeichnete konkordante Gerade ist also die Erzeugende der zweiten Brennfläche der Transversalkongruenz.

Umgekehrt kennzeichnet aber die Bedingung (6) auch ein beliebiges Regelflächenpaar $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$, $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ als W-transformiert. Man gehe zum Beweis von der Dv-Schar etwa auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ aus, deren Tangenten die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ treffen. Man kann dann wie oben weiterschließen.

d) Hier sind noch zwei wichtige Sonderfälle zu beachten. Kann der Schnittpunkt benachbarter Geraden des R_5 $\big((\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2), (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)\big)$ fest sein? Nach (4) muß hierzu neben (6) auch noch

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = -2\Psi = \text{const} \tag{5.7}$$

sein. Es existiert dann ein fester Komplex

$$\Psi(q_1, q_2) + (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2), \tag{5,8}$$

dem die Gerade $(q_1, \mathfrak{s}_1)$ angehört. Da diese Gerade vor anderen Schartangenten nicht ausgezeichnet ist, und die Bedingungen (6), (7) nicht von der speziellen Darstellung der Dv-Schar abhängen, gehören *alle* Scharkurven dem festen Komplex an.

Ist bei der speziellen Parameterverteilung, die zu einer schichtbildenden Dv-Schar gehört, außer (6) *auch noch* (7) *erfüllt, so gehören die Scharkurven alle dem festen Komplex* (8) *an.* Aus Symmetriegründen gilt dasselbe auch für die Torsallinien auf der gegenüberliegenden Brennfläche $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$.

Man findet nach (1.8)

$$(q_1, q_1', q_1'', q_1''') = \beta_{12}^2 \alpha_{22}(q_1, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, q_2), \tag{5.9}$$

und also kennzeichnet

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0 \tag{5.10}$$

q_1 als ebene Kurve. Da q_1 vor anderen Scharkurven nicht ausgezeichnet ist und die Bedingung (10) nicht von der Wahl der Basisvektoren q_1, q_2 abhängt, folgt: *Ist eine Kurve einer schichtbildenden Dv-Schar eben, aber keine Gerade, so haben auch alle andern Scharkurven diese Eigenschaft. Es gilt* (6) *mit* (10).

Als Gerade wird q_1 durch

$$\beta_{12} = 0 \tag{5.11}$$

gekennzeichnet. Das hyperbolische Bild von q_1, der Punkt $\mathfrak{x}$, ist genau in diesem Fall fest. *Ist eine Scharkurve einer schichtbildenden Dv-Schar eine Asymptotenlinie, so ist sie eine Gerade und also Fleknodalkurve auf der Regelfläche.*

In der hyperbolischen Ebene bedeutet dies, daß sich $\mathfrak{b}$ auf einer Gerade bewegt, die den absoluten Kegelschnitt berührt. Dann muß sich auch $\mathfrak{b}'$, das Bild der Fleknodalpunkte, auf dieser Gerade bewegen.

Eine Gerade der Regelfläche braucht aber nicht notwendig Scharkurve jeder schichtbildenden Dv-Schar zu sein. Es kann ja im hyperbolischen Bild $\mathfrak{b}'$ eine den absoluten Kegelschnitt berührende Gerade der festen Ebene durchlaufen, ohne daß dasselbe auch für $\mathfrak{b}$ gelten müßte.

e) Wir haben soeben schichtbildende Dv-Scharen betrachtet, deren Scharkurven alle ein und demselben linearen Komplex angehörten. Jetzt fragen wir nach den Stellen auf einer Erzeugenden, in denen die hindurchgehende Scharkurve einen Komplexpunkt besitzt.

Betrachten wir etwa die Kurve q_1. Der Schmiegkomplex dieser Kurve im Geradenraum wird aufgespannt von den Punkten

$$(q_1, \mathfrak{s}_1), \quad (q_1, \mathfrak{s}_1)', \quad (q_1, \mathfrak{s}_1)'', \quad (q_1, \mathfrak{s}_1)''', \quad (q_1, \mathfrak{s}_1)^{(4)}.$$

Nach den Ableitungsgleichungen (1.8), (3) geht dieses Punktsystem über in

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1),\\ &(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2),\\ &(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) + \alpha_{22}(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\\ &2(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{q}_2) + L(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\\ &2\beta_{12}(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{q}_2) + (M - L\beta_{11})(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2),\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$L = (\ln \alpha_{22})', \qquad M = L' - \tfrac{1}{2}L^2, \qquad N = 2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})L - ML + 2M'$$

gesetzt ist. Der Schmiegkomplex der Kurve $\mathfrak{q}_1$ wird repräsentiert von dem hierzu polaren Punkt

$$(5.12)\quad \mathfrak{w} = 2\beta_{12}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) - 2\alpha_{22}\beta_{12}(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + L\beta_{12}(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2) + (L\beta_{11} - M)(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1).$$

Wann ist der Schmiegkomplex stationär? Dies führt auf die Bedingung

$$(5.13)\quad N\beta_{12} - 2M\beta'_{12} + 2L \cdot \tfrac{1}{2}\left(\beta_{12}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) - \beta'_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})\right) = 0.$$

Betrachten wir nun den Punkt

$$(5.14)\quad \mathfrak{m} = N\mathfrak{b} - 2M\mathfrak{b}' + 2L(\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}')$$

der hyperbolischen Ebene. Er ist invariant mit der schichtbildenden Dv-Schar verknüpft. Der Vektor $\mathfrak{m}$ wird aufgespannt von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ mit Koeffizienten, in die nur die invarianten Größen (1.28) und ihre Ableitungen eingehen. Der Punkt $\mathfrak{x}$, das hyperbolische Bild von $\mathfrak{q}_1$, ist genau dann zu $\mathfrak{m}$ polar, falls (13) gilt.

Dieser Zusammenhang zwischen (13) und (14) und die Invarianz von (14) lehrt dann: *Auf jeder Erzeugenden gibt es zwei Stellen, in denen die hindurchgehende Scharkurve einer schichtbildenden Dv-Schar einen Komplexpunkt besitzt. Das hyperbolische Bild dieses Punktepaares wird im zugeordneten Bezugssystem* [*es gilt* (3)] *durch* $\mathfrak{m}$ *in* (14) *gegeben.*

Hiermit kann man leicht die Frage beantworten, wann sämtliche Scharkurven längs einer Erzeugenden einen Komplexpunkt besitzen. Hierzu muß $\mathfrak{m}$ der Nullvektor sein. Sind die Vektoren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ linear unabhängig, so zieht das Verschwinden von $\mathfrak{m}$ das Verschwinden des Koeffizienten von $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$, d.h.

$$(5.15)\quad L = 0,$$

nach sich. Daraus folgt aber dann das Verschwinden der anderen Koeffizienten. (15) ist mit (7) gleichbedeutend.

Somit: *Fallen die Schmiegstellen einer schichtbildenden Dv-Schar nicht zusammen und sind sie von den Fleknodalpunkten verschieden und gibt es auf einer Erzeugenden drei Stellen, in denen Scharkurven Komplexpunkte besitzen, so besitzen alle Scharkurven auf dieser Erzeugenden einen Komplexpunkt, der Schmiegkomplex aller Scharkurven ist derselbe.* Da die Fleknodalpunkte in

unserem Bezugssystem von $\mathfrak{b}'$ dargestellt werden, so bedeutet die zuerst gemachte Voraussetzung, daß die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ existiert und den absoluten Kegelschnitt nicht berührt. Dann sind aber $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ linear unabhängig.

Berührt die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ für jedes t den absoluten Kegelschnitt, so gibt es [vgl. d)] eine feste Gerade, die alle Erzeugenden der Regelfläche trifft. Wir können deshalb einfacher so formulieren: *Kommen unter den Scharkurven einer schichtbildenden Dv-Schar keine Gerade aber drei Komplexkurven vor, so gehören alle Scharkurven ein und demselben linearen Komplex an, d.h. es gilt* (7).

Dagegen kann auf einer Regelfläche in einem speziellen linearen Komplex durchaus eine aus Komplexkurven bestehende schichtbildende Dv-Schar existieren, deren Kurven nicht in demselben Komplex liegen, falls die Leitlinie des speziellen Komplexes selbst Scharkurve ist.

Auf einer Kongruenzregelfläche, deren Leitlinien Scharkurven einer schichtbildenden Dv-Schar sind, sind solche Dv-Scharen aus Komplexkurven verschiedener Komplexe z.B. neben (7) durch

$$\mathfrak{b}' = \frac{N}{2M}\,\mathfrak{b} \tag{5.16}$$

gekennzeichnet.

f) Ein weiterer Sonderfall unter den schichtbildenden Dv-Scharen ist der, daß die Brennflächen der konkordanten Kongruenz zusammenfallen. Es gilt dann neben (4.17) auch noch

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = 0.$$

Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 0. \tag{5.17}$$

Denn zwei Punkte des Kegelschnittes sind nur dann polar zueinander, wenn sie zusammenfallen.

Weiter gilt aber: *Fallen die Brennflächen der konkordanten Kongruenz zusammen, so ist diese Brennfläche eine Regelfläche.* Hierfür muß für jede Wahl des Parameters $\langle \mathfrak{a}^*, \mathfrak{a}^* \rangle = 0$ gelten, d.h. es muß

$$\langle \mathfrak{a}^*, \mathfrak{a}^* \rangle = \varphi^{-4}(\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle - 2A \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle + A^2 \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle) = 0$$

identisch in A erfüllt sein. Dies führt aber auf (17).

Gilt (17), so bilden die konkordanten Geraden die eine Schmiegtangentenschar der einzigen Brennfläche der konkordanten Kongruenz. Die Berührquadrik ist also Schmiegquadrik dieser Regelfläche. Gleichberechtigt zu $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ ist natürlich auch hier die zweite Brennfläche der Transversalkongruenz, d.h. $(\hat{\mathfrak{s}}_1, \hat{\mathfrak{s}}_2)$ mit (3).

$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ bzw. $(\hat{\mathfrak{s}}_1, \hat{\mathfrak{s}}_2)$ sind jetzt die *Fleknodaltransformierten* dieser durch die Figur ausgezeichneten Regelfläche. Umgekehrt hüllt die Schmiegquadrik einer beliebigen Regelfläche außer der Regelfläche selbst die Fleknodaltransformierten ein. Auf jeder der beiden fleknodaltransformierten Regelflächen ist also eine schichtbildende Dv-Schar ausgezeichnet, die zu der Schmiegquadrik der Regelfläche gehört. Eine solche schichtbildende Dv-Schar ist

durch (17) gekennzeichnet. Zu einer Dv-Schar mit (17) gehört also eine bestimmte Regelfläche und zu einer Regelfläche, deren Fleknodaltransformierte nicht zusammenfallen, zwei zueinander gehörende schichtbildende Dv-Scharen mit (17). *Diesen Zusammenhang kann man zur Behandlung der Regelflächen ausnützen.*

6. a) *Medianpunkte eines Kurvenpaares in einer Dv-Schar* nennt man das Punktepaar, dessen hyperbolisches Bild von der Tangente an die Bildkurve der Ausgangskurven bestimmt wird. Ist $\mathfrak{p}$ das Bild des Ausgangskurvenpaares, so sind die Medianpunkte in der Ebene durch

$$\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{p}' \tag{6.1}$$

gegeben. In Abhängigkeit von t beschreiben die Medianpunkte die *Mediankurven des Ausgangspaares in der Dv-Schar.*

Uns interessieren hier besonders die Mediankurven der Schmiegkurven, deren Bild also durch

$$\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}' \tag{6.2}$$

gegeben ist. Sie sind Mediankurven sowohl in bezug auf die zugrunde gelegte Dv-Schar, wie auch in bezug auf die Asymptotenlinien. Dies kommt daher, daß die bewegte Ebene längs $\mathfrak{b}$ in die feste abrollt, beide Polbahnen also dieselbe Tangente haben.

Die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}')$ ist die hyperbolische Normale der Kurve $\mathfrak{b}$. Sie schneidet im allgemeinen aus dem absoluten Kegelschnitt ebenfalls ein Punktepaar aus, dessen Urbilder die *harmonischen Kurven* beschreiben. Die harmonischen Kurven sind also dadurch definiert, daß ihre Punkte auf jeder Erzeugenden sowohl die Punkte des Ausgangspaares wie auch die Medianpunkte harmonisch trennen.

b) Ein auffallender Sonderfall unter den Dv-Scharen ist der, daß die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ die Tangente an $\mathfrak{b}$ ist. Es gilt dann

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0, \tag{6.3}$$

und dies bedeutet also, daß *die Medianpunkte der Schmiegkurven mit den Spiegelpunkten zusammenfallen.* Dann gehören aber die Fleknodalpunkte der durch $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ definierten Involution an, d.h. *die Fleknodalpunkte trennen die Spiegelpunkte harmonisch — und umgekehrt.* Es ist ja

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}').$$

(3) ist natürlich wegen (4.17) auch für die schichtbildenden Dv-Scharen erfüllt — hier sind die Spiegelkurven gar nicht erklärt. *Jedoch trennen auch hier die Medianpunkte der Schmiegkurven die Fleknodalpunkte harmonisch.* Wir sprechen noch kurz von beliebigen Kurvenpaaren einer Regelfläche mit dieser kennzeichnenden Eigenschaft.

c) Zur Diskussion stehen Kurvenpaare einer Regelfläche, deren Mediankurven in der Schar der Asymptotenlinien die Fleknodalkurven harmonisch

trennen. Solche Kurvenpaare kann man auf einer auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Regelfläche explizit angeben und sogar integrallos bestimmen. Man gehe hierzu von dem hyperbolischen Bild der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien aus und betrachte eine Geradenschar durch die Punkte der Bildkurve der Fleknodalkurven. Die Hüllkurve dieser Geradenschar liefert dann das hyperbolische Bild eines Kurvenpaares, dessen Mediankurven die Fleknodalkurven harmonisch trennen und jedes solche Kurvenpaar wird so erzielt.

Eine Dv-Schar mit der charakteristischen Eigenschaft (3) erzielt man jetzt, indem man in der bewegten Ebene eine beliebige Kurve vorgibt und diese längs der konstruierten Kurve der festen Ebene abrollt.

Kurvenpaare, wie sie hier in den Schmiegkurven auftreten, spielen in der Literatur eine zweifache Rolle. I. Sie sind geradengeometrisch durch die Existenz von ∞^4 quadratischen Komplexen ausgezeichnet, die die Erzeugende der Regelfläche und die Tangenten an die Kurven des Paares in zweiter Ordnung enthalten, während es im allgemeinen Fall nur ∞^3 solche Komplexe gibt. In diesem Zusammenhang treten die Kurvenpaare bei A. TERRACINI als „direttrici congiunte" auf[11]). II. Die Schmiegkurven der schichtbildenden Dv-Scharen haben diese Eigenschaft. Ist die charakteristische Kurve einer einparametrigen Quadrikschar ein Vierseit, so haben also die Eckpunkte dieses Vierseits auf den Vierseitseiten diese Eigenschaft. Unter diesem Gesichtspunkt treten die betrachteten Kurvenpaare bei H. KUNLE[12]) als Eckpunktpaare des charakteristischen Vierseits auf.

Auf diesen Zusammenhang soll genauer in einer kurzen Note hingewiesen werden.

d) Der Punkt

$$\mathfrak{p}(t) = \boldsymbol{p}_0(t)\,\mathfrak{x}(t) + \boldsymbol{p}_1(t)\,\mathfrak{z}(t) + \boldsymbol{p}_2(t)\,\bar{\mathfrak{x}}(t) \tag{6.4}$$

beschreibt im festen wie im bewegten System der hyperbolischen Ebene eine Kurve in Abhängigkeit von t. Betrachten wir die Kurve des bewegten Systems, so wollen wir

$$\mathfrak{p}' = \boldsymbol{p}_0'\,\mathfrak{x} + \boldsymbol{p}_1'\,\mathfrak{z} + \boldsymbol{p}_2'\,\bar{\mathfrak{x}} \tag{6.5}$$

setzen. Zur Unterscheidung sei die Kurve des festen Systems mit $\mathring{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Nach den Ableitungsgleichungen (3.8) ist

$$\mathring{\mathfrak{p}}' = \mathfrak{p}' + \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{b}. \tag{6.6}$$

Wir wenden dies an auf den Ort der momentanen Fixpunkte im bewegten und festen System, d. h. auf die Kurve $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathring{\mathfrak{b}}$. Wir haben es, wie bereits betont wurde, mit einer Abrollung der Kurve $\mathfrak{b}$ des bewegten über die Kurve $\mathring{\mathfrak{b}}$

[11]) TERRACINI, A.: Direttrici congiunte di una rigata. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **9**, 325—342 (1950).

[12]) Vgl. Fußnote 8, S. 57.

des festen Systems zu tun. Es gilt

$$\mathring{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b},$$

$$\mathring{\mathfrak{b}}' = \mathfrak{b}',$$

und

$$\mathring{\mathfrak{b}}'' = \mathfrak{b}'' + \mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{b}. \tag{6.7}$$

Der Ort der Fixpunkte durchläuft im bewegten System eine Gerade, wenn

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'') = 0; \tag{6.8}$$

dasselbe gilt im festen System, falls

$$(\mathring{\mathfrak{b}}, \mathring{\mathfrak{b}}', \mathring{\mathfrak{b}}'') = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' + \mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{b}) = 0 \tag{6.9}$$

ist.

Was bedeuten diese Bedingungen im Urbild? Gilt (8), so gibt es zwei Scharkurven der Dv-Schar — nämlich $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}'$ —, die die Schmiegkurven harmonisch trennen. Gilt (9), so gibt es zwei Asymptotenlinien — nämlich $\mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$ — mit derselben Eigenschaft.

e) Will man die Kurventheorie in die hyperbolische Kinematik einbauen, so wird man — wie im euklidischen — eine Bewegung zu betrachten haben, die invariant mit einer gegebenen Kurve verknüpft ist. Betrachten wir hierzu die hyperbolischen Bewegungen, in denen der Ort der momentanen Fixpunkte in der bewegten Ebene eine Gerade ist. Es gilt dann

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'') = 0. \tag{6.10}$$

In einer solchen Bewegung mit (10) ist ausgezeichnet einmal die Bahnkurve, die der in der bewegten Ebene feste Punkt $\mathring{\mathfrak{p}}(t) = \mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$ beschreibt, zum anderen sind ausgezeichnet die Bahnkurven, die von den in der bewegten Ebene festen Punkten $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ erzeugt werden.

Wir wollen zeigen, daß es zu einer willkürlich vorgegebenen Kurve immer eine eindeutig bestimmte Bewegung mit (10) gibt, in der diese Kurve mit $\mathring{\mathfrak{p}}(t)$ bzw. mit einem der $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ zusammenfällt. Im ersten Fall rolle man die bewegte Ebene längs einer Geraden über die von den zu $\mathring{\mathfrak{p}}(t)$ polaren Geraden eingehüllte Kurve hyperbolisch ab ohne zu gleiten. Den zweiten Fall führt man hierauf zurück, indem man beachtet, daß $\mathring{\mathfrak{p}}(t)$ der zu $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ polare Punkt auf der Tangente an $\mathring{\mathfrak{q}}(t)$ ist.

Geht man auf das Urbild zurück, so folgen hieraus die beiden Sätze: (I) *Mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar ist invariant eine zweite Dv-Schar verbunden, die die beiden Kurven als Scharkurven und als Mediankurven der Berührkurven enthält.* (II) *Mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar ist invariant eine zweite Dv-Schar verbunden, die die beiden Kurven als Scharkurven enthält, der Art, daß diese die Mediankurven der Berührkurven harmonisch trennen.* Letztere nennt man die *Prinzipalschar des Kurvenpaares in der Ausgangsschar.*

In der Literatur wird die Aufgabe, mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar eine zweite Dv-Schar zu verknüpfen, die die Kurven als Scharkurven enthält, meist analytisch formuliert: Die Vektoren, die zu den beiden Kurven gehören, sind invariant zu normieren. Um zwei Beispiele zu nennen: G. BOL[13]) verwendet in der Theorie der Regelflächen die Normierung nach (I). Bei A. TERRACINI[14]) findet sich bei der Behandlung der „direttrici congiunte" [vgl. c)] die Normierung nach (II).

Was sagt unsere geometrische Betrachtungsweise zu dieser Normierungsfrage? In beiden Fällen ist die Dv-Schar eindeutig bestimmt. Bei (I) gehört nun umgekehrt zu der Dv-Schar genau *ein* Kurvenpaar mit der angegebenen Eigenschaft [nämlich das Urbild von $\mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$], bei (II) dagegen eine einparametrige Schar [nämlich die Urbilder der festen Punkte auf $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$]. Andererseits weist der analytische Ausdruck für die hyperbolische Krümmung der Bildkurve bei (II) eine etwas einfachere Gestalt auf als bei (I) [vgl. (16), (19)].

Berechnen wir die hyperbolische Bogenlänge und Krümmung einer Bahnkurve in einer beliebigen Bewegung! Es sei die Basis des bewegten Systems so gewählt, daß $\mathring{\mathfrak{x}}$ diese Bahnkurve beschreibt. Dann wird nach den Ableitungsgleichungen (3.8)

$$\text{(6.11)} \qquad \begin{cases} \mathring{\mathfrak{x}}' = & a\,\mathring{\mathfrak{x}}_{21}, \\ \mathring{\mathfrak{x}}_{21}' = \varepsilon a\,\mathring{\mathfrak{x}} & + b\,\mathring{\mathfrak{x}}_{22}, \\ \mathring{\mathfrak{x}}_{22}' = & b\,\mathring{\mathfrak{x}}_{21}, \end{cases}$$

wobei

$$\text{(6.12)} \qquad \begin{cases} \mathring{\mathfrak{x}}_{21} = \frac{1}{a}\left(\beta_{21}\,\mathring{\mathfrak{x}} + \beta_{12}\,\mathring{\overline{\mathfrak{x}}}\right), & a^2 = \varepsilon\beta_{12}\beta_{21}, \quad \varepsilon = \pm 1, \\ \mathring{\mathfrak{x}}_{22} = \frac{1}{a}\left(\beta_{21}\,\mathring{\mathfrak{x}} - \beta_{12}\,\mathring{\overline{\mathfrak{x}}}\right), & b = \beta_{11} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\beta_{21}}{\beta_{12}}\right)' \end{cases}$$

gesetzt ist. Durch

$$\text{(6.13)} \qquad \int \sqrt{\varepsilon\beta_{12}\beta_{21}}\,dt$$

führt man also die hyperbolische Bogenlänge der Kurve $\mathring{\mathfrak{x}}$ ein. Die hyperbolische Krümmung von $\mathring{\mathfrak{x}}$ ist durch

$$\text{(6.14)} \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\beta_{12}\beta_{21}}}\left(\beta_{11} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\beta_{21}}{\beta_{12}}\right)'\right)$$

gegeben.

Kommen wir zurück zu den speziellen Bewegungen mit (10). Bei (I) legen wir die Basis des bewegten Systems so, daß $\mathring{\mathfrak{x}}$ die ausgezeichnete Kurve $\mathring{\mathfrak{b}} \wedge \mathring{\mathfrak{b}}'$ beschreibt. Dann ist

$$\text{(6.15)} \qquad \beta_{11} = \beta_{22} = 0$$

und für die Krümmung der Kurve $\mathring{\mathfrak{x}}$ finden wir nach (14)

$$\text{(6.16)} \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\beta_{12}\beta_{21}}}\left(\ln\frac{\beta_{21}}{\beta_{12}}\right)'.$$

---

[13]) Siehe Fußnote 9, S. 58.

[14]) Siehe Fußnote 11, S. 72.

Bei (II) möge $\mathring{\mathfrak{z}}$ ein im bewegten System fester Punkt der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ sein. Dann wird

$$\beta_{12}\beta'_{21} - \beta_{21}\beta'_{12} = 0. \tag{6.17}$$

Setzt man also

$$\beta_{12} = c\,\beta_{21} \tag{6.18}$$

so findet man hier für die hyperbolische Krümmung von $\mathring{\mathfrak{z}}$

$$\frac{b}{a} = c_1 \frac{\beta_{11}}{\beta_{21}} \quad \text{mit} \quad c_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{\varepsilon c}} = \text{const}. \tag{6.19}$$

f) Kann die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ im bewegten oder festen System fest sein? Ist dies der Fall, so durchläuft $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathring{\mathfrak{b}}$ diese feste Gerade. Es gilt (3), was z.B. bedeutet, daß die Mediankurven der Schmiegkurven die Fleknodalkurven harmonisch trennen [vgl. b)]. Weiterhin bedeutet dann aber (8), daß diese Mediankurven Scharkurven der Dv-Schar, bzw. (9), daß diese Mediankurven Asymptotenlinien sind.

In dem zuletzt genannten Fall — es gilt (3) mit (9) — ist das Bild der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$, d.h. die Regelfläche gehört einem festen linearen Komplex an. Die beiden ausgezeichneten Asymptotenlinien sind Komplexkurven in diesem linearen Komplex. Diese beiden Komplexkurven trennen sowohl die Fleknodalkurven wie auch die Schmiegkurven harmonisch.

Man kann dies natürlich auch direkt nachrechnen. $\mathring{\mathfrak{b}}$ ist fest falls

$$\mathring{\mathfrak{b}}' = \varrho\,\mathring{\mathfrak{b}},$$

d.h. nach (6) falls

$$\mathfrak{b}' + \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b} = \varrho\,\mathfrak{b} \tag{6.20}$$

ist. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a}$ erhält man hieraus unter Benützung der Identität (4.6) die beiden Bedingungen

$$\begin{cases} (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0, \\ (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}) = 0, \end{cases} \tag{6.21}$$

deren erste mit (3) identisch ist. Diese erlaubt den Ansatz

$$\mathfrak{a} = E\,\mathfrak{b} + G\,\mathfrak{b}', \tag{6.22}$$

wodurch die zweite Gl. (21) in

$$G^2(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' + \mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{b}) = 0 \tag{6.23}$$

übergeht. (21) ist natürlich für $\mathfrak{b} = 0$ (die schichtbildenden Dv-Scharen) erfüllt. Sehen wir davon ab, dann ist in (22) $G \neq 0$ und, wie behauptet, (23) ist mit (3) und (9) identisch.

Hat man umgekehrt eine Komplexregelfläche — das hyperbolische Bild der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien ist eine Gerade — und auf ihr eine Dv-Schar, deren Schmiegkurven die beiden Komplexkurven

der Regelfläche harmonisch trennen, so liegt die betrachtete Figur vor. Man kann diese Dv-Scharen konstruieren, indem man in der Bildebene eine beliebige Kurve der bewegten Ebene über die feste Gerade der festen Ebene abrollt.

g) Wir beweisen weiterhin: *Die konkordante Kongruenz ist genau dann ein W-Strahlsystem, falls* (21) *gilt. Im allgemeinen ist dies gleichbedeutend mit dem Festsein der Geraden* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ *im festen System.*

Zum Beweis stellt man die Bedingung dafür auf, daß die Geradenvektoren

$$(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*), \quad (\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)_A, \quad (\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)_{AA}, \quad (\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)_{I^\bullet}, \quad (\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)_{AI^\bullet}, \quad (\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)_{I^\bullet I^\bullet}$$

linear abhängen. Nach den Ableitungsgleichungen führt dies auf die Bedingung

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}) = 0, \tag{6.24}$$

die bei jeder Wahl der Parameterverteilung erfüllt sein muß. Bei Parametertransformation ist

$$(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{a}_{I^\bullet}^* - \mathfrak{b}^* \wedge \mathfrak{a}^*) = \varphi^{-6}[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}) - A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}')]$$

und somit ist, wie behauptet, (24) mit (21) gleichbedeutend.

Beachten wir jetzt noch die geometrischen Folgerungen, die wir in f) gezogen haben, so können wir zusammenfassen: *Die konkordante Kongruenz einer schichtbildenden Dv-Schar ist trivialerweise ein W-Strahlsystem. Auf einer Regelfläche, die keinem linearen Komplex angehört, sind die schichtbildenden Dv-Scharen aber auch die einzigen dieser Eigenschaft. Gehört die Regelfläche einem nichtentarteten linearen Komplex an, so hat außerdem jede Dv-Schar, deren Schmiegkurven die beiden Komplexkurven harmonisch trennen, diese Eigenschaft.* Gehört die Regelfläche einem speziellen linearen Komplex an, so kann man noch die Dv-Scharen hinzurechnen, bei denen die eine Brennfläche der konkordanten Kongruenz in die Leitgerade des Komplexes entartet. *Kennzeichnend für die Dv-Scharen, deren konkordante Kongruenz ein W-Strahlsystem ist, ist dann natürlich auch, daß die Spiegelkurven — falls existent — Asymptotenlinien beschreiben.*

Für die Konstruktion dieser Dv-Scharen verweisen wir auf den letzten Abschnitt in f). Aus f) folgt noch, daß *mit einer Dv-Schar, deren konkordante Kongruenz ein W-Strahlsystem ist, auch jede zu ihr isogonale Schar*[15]) *insbesondere also auch die konjugierte Schar diese Eigenschaft hat.*

7. a) Die Halbinvariante β vom Gewicht 1 und die Größe α mit dem Transformationsverhalten

$$\beta^* = \varphi^{-1}\beta, \quad \alpha^* = \varphi^{-2}(\alpha - A\beta)$$

gaben Anlaß zu der Halbinvarianten vom Gewicht 2

$$\beta_t - 2\alpha,$$

[15]) Vgl. 8d).

die die Fleknodalpunkte kennzeichnete. Eine Halbinvariante vom Gewicht 4 findet sich nun weiterhin unter Hinzunahme der Größe $\alpha_{11}+\alpha_{22}$ mit dem Transformationsverhalten

$$(\alpha_{11}^* + \alpha_{22}^*) = \varphi^{-2}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + 2A' - 2A^2)$$

wegen

$$\frac{d\alpha^*}{dt^*} = \varphi^{-3}(\alpha_t - A'\beta - A\beta_t - 4A\alpha + 4A^2\beta) \tag{7.1}$$

in der Kombination

$$h = 2\alpha_t\beta - 2\beta_t\alpha - 2\alpha^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\beta^2. \tag{7.2}$$

Dies ist offensichtlich die einzige Halbinvariante, in die α und β nur in der ersten Ableitung eingehen, außer den bereits früher genannten Größen, unter denen auch $\beta\,\delta$ eine Halbinvariante vom Gewicht 4 ist. Es gilt also

$$h^* = \varphi^{-4}h, \quad \beta^*\delta^* = \varphi^{-4}\beta\,\delta. \tag{7.3}$$

Mit irgendeiner Invarianten H, z. B. einer Zahlgröße, stellt auch

$$h + H\beta\,\delta \tag{7.4}$$

eine Halbinvariante vom Gewicht 4 dar.

Diese Ausdrücke sind jetzt Polynome der Ordnung 4 in s. Es gibt also im algebraischen Sinne vier Werte von s, in denen

$$h + H\beta\,\delta = 0 \tag{7.5}$$

wird. In der Hilfsebene sind also vier Punkte durch eine der Größen (4) bestimmt. Während wir ein Punktepaar auf dem absoluten Kegelschnitt durch die hindurchgehende Gerade bzw. den hierzu polaren Punkt kennzeichneten, können wir uns ein Punktequadrupel durch den Schnitt mit einem weiteren Kegelschnitt bestimmt denken.

So gehört zu (5) mit $H = \infty$ das Geradenpaar der beiden zu $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}$ polaren Geraden. Wir werden später auch zu den Werten

$$H = -6, \quad H = 2 \tag{7.6}$$

invariant mit der Dv-Schar verknüpfte Kegelschnitte der Hilfsebene finden. Da sie mit dem Geradenpaar in einem Büschel liegen, für das H projektiver Parameter ist, kann man auch jedes andere Punktequadrupel (5) hierdurch geometrisch kennzeichnen. Wir werden hierzu eine Quadrikschar $Q_0(t)$ betrachten, die aus Quadriken durch die charakteristische Kurve der Berührquadriken gebildet wird.

b) Um gleichzeitig noch andere Anwendungen zu ermöglichen, beschäftigen wir uns mit beliebigen Quadrikscharen $Q(t)$, die mit unserer Figur verknüpft sind. Eine solche Quadrikschar denken wir uns in lokalen Koordinaten durch

die drei Vektoren der Hilfsebene $\mathfrak{r}(t), \mathfrak{s}(t), \mathfrak{t}(t)$ und die Größe $F(t)$

$$(7.7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{r} = \{-\varrho_{21},\ \varrho_{11},\ \varrho_{12}\}, & \varrho_{22}+\varrho_{11}=0, \\ \mathfrak{s} = \{-\sigma_{21},\ \sigma_{11},\ \sigma_{12}\}, & \sigma_{22}+\sigma_{11}=0, \\ \mathfrak{t} = \{-\tau_{21},\ \tau_{11},\ \tau_{12}\}, & \tau_{22}+\tau_{11}=0 \end{cases}$$

in der folgenden Weise gegeben:

$$(7.8)\qquad \begin{cases} Q \equiv & \varrho_{12}p_0^2 - 2\varrho_{11}p_0p_1 - \varrho_{21}p_1^2 + \\ & + \tau_{12}p_2^2 - 2\tau_{11}p_2p_3 - \tau_{21}p_3^2 + \\ & + 2\sigma_{12}p_0p_2 - 2\sigma_{11}(p_0p_3+p_1p_2) - 2\sigma_{21}p_1p_3 + 2F(p_0p_3-p_1p_2) = 0. \end{cases}$$

Damit die Darstellung nicht von der besonderen Wahl der Parameterverteilung abhängt, fordern wir für die eingehenden Größen das Transformationsverhalten:

$$(7.9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{r}^* = \varphi\,\mathfrak{r}, \\ \mathfrak{s}^* = \mathfrak{s} + A\,\mathfrak{r}, \\ \mathfrak{t}^* = \varphi^{-1}(\mathfrak{t} + 2A\,\mathfrak{s} + A^2\mathfrak{r}), \\ F^* = F. \end{cases}$$

Dabei kommt es natürlich auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor aller Größen nicht an.

Wir bestimmen die charakteristische Kurve zweier benachbarter Quadriken $Q(t)$ und bilden hierzu $Q'(t)$ mittels der Stationaritätsbedingung (1.20). Kennzeichnet man die Quadrik $Q'(t)$ durch die Größen

$$\tilde{\mathfrak{r}},\quad \tilde{\mathfrak{s}},\quad \tilde{\mathfrak{t}},\quad \tilde{F},$$

so findet man:

$$(7.10)\qquad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}' - 2\mathfrak{s}, \\ 2\tilde{\mathfrak{s}} = 2\mathfrak{s}' - 2\mathfrak{t} - 2F\mathfrak{b} - (\alpha_{11}+\alpha_{22})\mathfrak{r} - 2\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{r} - 2\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{s}, \\ \tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}' + 2F\mathfrak{a} - (\alpha_{11}+\alpha_{22})\mathfrak{s} - 2\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{s} - 2\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{t}, \\ 2\tilde{F} = 2F' + \langle\mathfrak{r},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{s},\mathfrak{b}\rangle. \end{cases}$$

c) Wann geht die Quadrik (8) durch die charakteristische Kurve der Schar der Berührquadriken? Diese besteht aus der Geraden

$$(7.11)\qquad p_2 = p_3 = 0$$

und der Kurve dritter Ordnung

$$(7.12)\qquad \mathfrak{y} = \alpha(\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2) + \beta(\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2).$$

Gehen wir mit (11) und (12) in (8) ein, so folgen die Identitäten in s:

$$(7.13)\qquad \varrho \equiv 0$$

und

$$(7.14)\qquad \alpha^2\varrho + 2\alpha\beta\sigma + \beta^2\tau \equiv 0.$$

Hierbei ist wie üblich mit dem gleichnamigen griechischen Buchstaben der dem Vektor zugeordnete quadratische Ausdruck in s zu verstehen. Man vgl. (3.6), (3.7).

(13) und (14) führen auf

$$\mathfrak{r} = 0, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{t} = -2\mathfrak{a}. \tag{7.15}$$

Mit (15) *stellt* (8) *für jeden Wert von* F *eine Quadrik des Büschels durch die charakteristische Kurve der Berührquadriken dar.*

Wir denken uns die Funktion $F(t)$ irgendwie vorgegeben und betrachten die Quadrikschar $Q_0(t)$ mit (15). In welchen Punkten trifft die charakteristische Kurve dieser Quadrikschar $Q_0(t)$ die Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{y}$ (12)? Dies ist genau für die Werte von s der Fall, für die (14) mit $\tilde{\varrho}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ an Stelle von ϱ, σ, τ erfüllt ist. Nun nimmt (10) mit (15) die Gestalt an:

$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{r}} = -2\mathfrak{b}, \\ 2\tilde{\mathfrak{s}} = \quad 2\mathfrak{b}' + 4\mathfrak{a} - 2F\mathfrak{b}, \\ \tilde{\mathfrak{t}} = -2\mathfrak{a}' + 2F\mathfrak{a} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\mathfrak{b} + 6\mathfrak{b}, \\ 2\tilde{F} = \quad 2F' + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle. \end{cases} \tag{7.16}$$

Die gesuchten Punkte berechnen sich somit aus der Gleichung vierter Ordnung in s:

$$2\alpha_1\beta - 2\beta_1\alpha - 2\alpha^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\beta^2 - 6\beta\delta = 0. \tag{7.17}$$

Sie ist vom Typ (5) mit

$$H = -6. \tag{7.18}$$

Die Größe F geht in diese Gleichung gar nicht ein: Die charakteristische Kurve *jeder* Quadrikschar $Q_0(t)$ schneidet die Kurve dritter Ordnung (12) in *denselben* Punkten. Dies heißt aber, daß zwei benachbarte Kurven dritter Ordnung $\mathfrak{y}(t)$ sich in diesen Punkten berühren. *Die Hüllfläche der Berührquadriken, die erzeugt wird von den Kurven dritter Ordnung* (12), *besitzt vier singuläre Kurven, die eingehüllt werden von den erzeugenden Kurven dritter Ordnung* (12).

In diesen Punkten ist natürlich die Tangentenebene an die Fläche $\mathfrak{y}$ unbestimmt. Aus Stetigkeitsgründen werden wir jedoch — falls dies zur Diskussion steht — die Ebene $\mathfrak{Y}$ in (2.21) als *die* Tangentenebene in dem Punkte betrachten.

d) Die vier Punkte (17) der Bildebene werden von einem invariant mit der Figur verbundenen Kegelschnitt aus dem absoluten Kegelschnitt ausgeschnitten. Ein Kegelschnitt der Bildebene — als Gesamtheit seiner Punkte aufgefaßt — bedeutet eine quadratische Gesamtheit von Punktepaaren in dem binären Gebiet, die genau für die Werte (17) zusammenfallen.

Wir zeigen: *Durch jede der Quadrikscharen* $Q_0(t)$ *ist auf einer bestimmten konkordanten Geraden ein und dieselbe Involution erklärt, deren Doppelpunkte*

sich in die Bildebene (in Abhängigkeit von der ausgewählten konkordanten Geraden) auf die Punktepaare eines Kegelschnitts abbilden, der den absoluten Kegelschnitt in (17) *schneidet.*

Betrachten wir etwa die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ — bei geeigneter Parameterverteilung können wir sie ja mit jeder konkordanten Geraden zusammenfallen lassen. Eine beliebige Quadrikschar bestimmt auf ihr (wie auch auf jeder anderen Geraden) eine Involution, der nicht nur die Schnittpunkte mit der Quadrik, sondern auch noch die mit der benachbarten Quadrik angehören. In der Bildebene ist diese Involution durch $(\mathfrak{t}, \tilde{\mathfrak{t}})$ gekennzeichnet und ihre Doppelpunkte bestimmen sich also aus

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{t} \wedge \tilde{\mathfrak{t}}. \tag{7.19}$$

Wenden wir dies an auf eine der Quadrikscharen $Q_0(t)$, gehen also mit (15) und (16) in (19) ein, so wird:

$$\mathfrak{n} = 4\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}' - 2(\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\mathfrak{b} - 12\,\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}. \tag{7.20}$$

Die Involution ist also tatsächlich von der ausgewählten Quadrikschar $Q_0(t)$ unabhängig — in (20) tritt ja F nicht ein. Gehen wir nun auf eine andere konkordante Gerade $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ über, so berechnen sich die Bildpunkte der Doppelpunkte der zu ihr gehörenden Involution aus

$$\mathfrak{n}^* = \varphi^{-5}[\mathfrak{n} + 4A(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' + 3\,\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}) + 4A^2\,\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})]. \tag{7.21}$$

Das Bild der Doppelpunkte bestimmt also in der hyperbolischen Ebene einen Kegelschnitt.

e) Wir wollen entsprechend die duale Frage behandeln. Eine Fläche zweiter Klasse $\overline{Q}(t)$ denken wir uns durch die Vektoren $\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{t}}$ und die Größe $\overline{F}$

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{r}} = \{-\bar{\varrho}_{21}, \bar{\varrho}_{11}, \bar{\varrho}_{12}\}, & \bar{\varrho}_{11} + \bar{\varrho}_{22} = 0, \\ \bar{\mathfrak{s}} = \{-\bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}\}, & \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} = 0, \\ \bar{\mathfrak{t}} = \{-\bar{\tau}_{21}, \bar{\tau}_{11}, \bar{\tau}_{12}\}, & \bar{\tau}_{11} + \bar{\tau}_{22} = 0, \end{cases} \tag{7.22}$$

in der Form

$$\begin{cases} \overline{Q} \equiv & \bar{\varrho}_{12} P_0^2 - 2\bar{\varrho}_{11} P_0 P_1 - \bar{\varrho}_{21} P_1^2 + \\ & + \bar{\tau}_{12} P_2^2 - 2\bar{\tau}_{11} P_2 P_3 - \bar{\tau}_{21} P_3^2 + \\ & + 2\bar{\sigma}_{12} P_0 P_2 - 2\bar{\sigma}_{11}(P_0 P_3 + P_1 P_2) - 2\bar{\sigma}_{21} P_1 P_3 + 2\overline{F}(P_0 P_3 - P_1 P_2) = 0 \end{cases} \tag{7.23}$$

gegeben. Die charakteristische Ebenengesamtheit zweier benachbarter Quadriken bestimmt sich aus dem Schnitt von $\overline{Q}(t)$ und $\overline{Q}'(t)$. Kennzeichnet wieder $\tilde{\bar{\mathfrak{r}}}, \tilde{\bar{\mathfrak{s}}}, \tilde{\bar{\mathfrak{t}}}, \tilde{\overline{F}}$ die Quadrik $\overline{Q}'(t)$, so findet man mittels (1.21):

$$\begin{cases} \tilde{\bar{\mathfrak{r}}} = & \bar{\mathfrak{r}}' - 2\bar{\mathfrak{s}} - 2\mathfrak{b} \wedge \bar{\mathfrak{r}}, \\ 2\tilde{\bar{\mathfrak{s}}} = & 2\bar{\mathfrak{s}}' - 2\bar{\mathfrak{t}} + 2\overline{F}\,\mathfrak{b} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\bar{\mathfrak{r}} + 2\mathfrak{a} \wedge \bar{\mathfrak{r}} - 2\mathfrak{b} \wedge \bar{\mathfrak{s}}, \\ \tilde{\bar{\mathfrak{t}}} = & \bar{\mathfrak{t}}' \qquad - 2\overline{F}\,\mathfrak{a} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\bar{\mathfrak{s}} + 2\mathfrak{a} \wedge \bar{\mathfrak{s}}, \\ 2\tilde{\overline{F}} = & 2\overline{F}' - \langle \bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a} \rangle - \langle \bar{\mathfrak{s}}, \mathfrak{b} \rangle. \end{cases} \tag{7.24}$$

Die Flächen zweiter Ordnung (8) und die Flächen zweiter Klasse (23) entsprechen sich durch Polarität an der Berührquadrik mit gleichbenannten Koeffizientengrößen. Wir wollen diese eineindeutige Abbildung immer verwenden, um der einfacheren Sprechweise halber die Punktgebilde zu betrachten.

Dual entsprechend der in d) durchgeführten Überlegung bestimmt eine Quadrikschar $\overline{Q}_0(t)$, für die also

$$\bar{\mathfrak{r}} = 0, \quad \bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{b}, \quad \bar{\mathfrak{t}} = -2\mathfrak{a} \tag{7.25}$$

gilt, auf $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ eine Involution, deren Doppelpunkte sich auf

$$\bar{\mathfrak{n}} = 4\,\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}' - 2(\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\mathfrak{b} + 4\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \tag{7.26}$$

abbilden. Durch Übergang auf eine allgemeine Parameterverteilung findet man das Bild der Doppelpunkte

$$\bar{\mathfrak{n}}^* = \varphi^{-5}[\mathfrak{n} + 4A\,(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}) + 4A^2\,\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})] \tag{7.27}$$

auf der konkordanten Geraden $(\mathfrak{S}_1^*, \mathfrak{S}_2^*)$.

Der Kegelschnitt (27) schneidet aus dem absoluten Kegelschnitt vier Punkte aus. Wie oben findet man für sie die Gleichung vierter Ordnung

$$2\alpha_t\beta - 2\alpha\beta_t - 2\alpha^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\beta^2 + 2\beta\,\delta = 0, \tag{7.28}$$

die (17) in gewisser Weise dual entspricht. *Auf jeder Erzeugenden gibt es im allgemeinen vier Stellen, in denen die Schmiegebene der hindurchgehenden Scharkurve stationär ist; diese Stellen berechnen sich aus* (28).

Die Ebenen $\mathfrak{y}(t, s)$ mit (28) gehören ja nicht nur jeder der Quadriken $\overline{Q}_0(t)$ an, sondern auch noch jeder der hierzu benachbarten. Dies kann nur sein, wenn benachbarte Ebenengesamtheiten $\mathfrak{y}(t, s)$ an den Werten (28) für s eine Ebene gemeinsam haben. Hieraus folgt die Behauptung, da $\mathfrak{y}(t, s)$ die Schmiegebene an die Scharkurve $\mathfrak{q}_1 + s\,\mathfrak{q}_2$ ist [vgl. (2.21)]. Dies kann man auch so aussprechen: *In der zweiparametrigen Ebenengesamtheit $\mathfrak{y}(t, s)$ gibt es vier singuläre Kurven $s(t)$, in denen benachbarte Kurven dritter Ordnung $\mathfrak{y}$ (betrachtet als die Gesamtheit ihrer Schmiegebenen) eine Ebene gemeinsam haben.*

(28) ist vom Typus (5) mit

$$H = 2. \tag{7.29}$$

Daraus folgt: *Die vier singulären Punkte der Punktgesamtheit $\mathfrak{y}(t, s)$ und die vier singulären Ebenen der Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{y}(t, s)$ gehören mit dem Punktequadrupel, gebildet aus Schmiegstellen und Spiegelpunkten, einer Involution vierter Ordnung an.* Die Punktequadrupel dieser Involution werden von den Kegelschnitten des Büschels, das von (21) und (27) aufgespannt wird, aus dem absoluten Kegelschnitt ausgeschnitten.

f) Denken wir uns auf der Geraden $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ ein Punktepaar durch sein hyperbolisches Bild $\mathfrak{t}$ festgelegt. $\mathfrak{t}$ möge bei Sterntransformation das Verhalten

$$\mathfrak{t}^* = \varphi^{-1}(\mathfrak{t} + 2A\,\mathfrak{s} + A^2\,\mathfrak{r}) \tag{7.30}$$

zeigen, d.h. die Bildpunkte durchlaufen in Abhängigkeit von der konkordanten Geraden in der hyperbolischen Ebene einen Kegelschnitt. Dann gilt: *Die so auf der Berührquadrik festgelegten Kurvenzweige bilden eine Kurve vierter Ordnung, die von der nach* (8) *bestimmten Quadrik aus der Berührquadrik ausgeschnitten wird. Jede Kurve vierter Ordnung erster Art auf der Berührquadrik läßt sich so erzielen.*

Ist in (30)

$$\mathfrak{r} = 0, \tag{7.31}$$

so gehören die Punktepaare einer Involution an. Hier gilt entsprechend: *Die durch* (30) *mit* (31) *auf den konkordanten Geraden der Berührquadrik festgelegten Punktepaare bestimmen eine Kurve dritter Ordnung, die von der nach* (8) *bestimmten Quadrik aus der Berührquadrik ausgeschnitten wird. Beide Quadriken schneiden sich hier außerdem noch in* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$. *Jede Kurve dritter Ordnung auf der Berührquadrik, die die konkordanten Geraden in je zwei, die Transversalgeraden in je einem Punkte trifft, läßt sich so erzielen.*

Wir haben in den Punktepaargesamtheiten $\mathfrak{n}^*$ bzw. $\bar{\mathfrak{n}}^*$ Beispiele solcher Bilder von Kurven vierter Ordnung auf der Berührquadrik vor uns, die zudem invariant mit der Figur verknüpft sind. Beide Kurven vierter Ordnung schneiden die Erzeugende $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ in demselben Punktepaar, dessen Bild der Punkt

$$\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a}) \tag{7.32}$$

ist. Nach (8.25) gilt hierfür: *Die durch* $\mathfrak{n}^*$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{n}}^*$ *definierten Kurven vierter Ordnung schneiden aus* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *dasselbe Punktepaar, nämlich die Spiegelpunkte der Isogonalschar*[16]) *mit* $D=3$ *aus* [vgl. (8.25)].

Insbesondere folgt: *Ist einer der Schnittpunkte von* $\mathfrak{y}(t, s)$ *und* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *singulärer Punkt auf* $\mathfrak{y}(t, s)$, *so ist die Schmiegebene der durch diesen Punkt laufenden Scharkurve stationär — und umgekehrt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Spiegelpunkte der Isogonalschar mit* $D=3$ *zusammenfallen.* Ferner: *Das Punktepaar* $\beta=0$ *stellt dann und nur dann ein Paar singulärer Punkte auf* $\mathfrak{y}(t, s)$ *bzw. singulärer Ebenen auf* $\mathfrak{Y}(t, s)$ *dar, wenn die Isogonalschar mit* $D=3$ *schichtbildend ist.*

Mit einer Kurve vierter Ordnung auf der Berührquadrik ist zugleich eine Kurve dritter Ordnung bestimmt, die die Kurve vierter Ordnung in den beiden Schnittpunkten mit der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ berührt. Im Bild wird diese Kurve dritter Ordnung durch die Tangente an den Kegelschnitt $\mathfrak{k}^*$ im Punkte $\mathfrak{r}$ bestimmt. Analytisch folgt dies daraus, daß die Größe $\hat{\mathfrak{s}}$, die nach (30) mit $\mathfrak{k}^*$ verbunden ist, das Transformationsverhalten

$$\hat{\mathfrak{s}}^* = \hat{\mathfrak{s}} + A\,\mathfrak{r}$$

zeigt.

Die beiden invarianten Kurven vierter Ordnung mit dem Bild $\mathfrak{n}^*$ bzw. $\bar{\mathfrak{n}}^*$ haben zwar mit der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ dasselbe Punktepaar gemein, sie

[16]) Vgl. 8d).

laufen jedoch in dieses Punktepaar im allgemeinen von verschiedenen Richtungen ein. Die zugehörigen Kurven dritter Ordnung sind auf

$$(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' + 3\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}) + 2A\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a}) \tag{7.33}$$

bzw. auf

$$(\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b}) + 2A\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a}) \tag{7.34}$$

abgebildet.

Wann fallen die beiden Kurven dritter Ordnung zusammen, mit anderen Worten, wann berühren sich die beiden Kurven vierter Ordnung in dem Punktepaar auf (q_1, q_2)? Wir zeigen: *Berührt einer der beiden Kegelschnitte* $\mathfrak{n}^*, \bar{\mathfrak{n}}^*$ *die Polare des Punktes* $\mathfrak{b}$ *bezüglich des absoluten Kegelschnittes* [*im Punkte* $\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})$], *so auch der andere; die beiden Kurven dritter Ordnung definieren dieselbe Involution, deren Bild die Polare von* $\mathfrak{b}$ *ist. Kennzeichnend hierfür ist*

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0 \tag{7.35}$$

(man vgl. Abschnitt 6); dies bedeutet z. B., daß die Medianpunkte der Schmiegkurven mit den Spiegelpunkten zusammenfallen. Das Verschwinden des Skalarprodukts von $\mathfrak{b}$ mit einem der Vektoren (33), (34) führt sofort auf (35).

Umgekehrt gilt: *Fallen die Tangenten an die Kegelschnitte* $\mathfrak{n}^*, \bar{\mathfrak{n}}^*$ *in dem gemeinsamen Punkt* $\mathfrak{b} \wedge (\mathfrak{b}' + \mathfrak{a})$ *zusammen, so stellt dieser Punkt entweder die Spiegelpunkte dar, oder sein Urbild trennt die Spiegelpunkte harmonisch.*

Betreffs der gegenseitigen Lage der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{n}^*$ und $\bar{\mathfrak{n}}^*$ ist dann noch hervorzuheben, daß diese die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ in denselben Punkten schneiden. Es ist ja

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{n} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{n}} \rangle = 4(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}') - 2(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle .$$

Man findet die Schnittpunkte

$$\mathfrak{a} - A\mathfrak{b}$$

aus

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{n} \rangle + 4A\left((\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) - (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}')\right) + 4A^2(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}' + \mathfrak{a}) = 0. \tag{7.36}$$

g) Als gemeinsame Singularitätenstellen von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ kommen [man vgl. (5), (17), (28)] nur die Schmiegstellen oder die Spiegelpunkte in Frage. Wir haben bereits gesehen unter welchen Bedingungen die Schmiegstellen, d. h. Punkte auf (q_1, q_2) gemeinsame Singularitätenstellen von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ sind [vgl. f)]. Wir stellen die gleiche Frage nun für die Spiegelpunkte.

Es ist also zu untersuchen, wann einer der Schnittpunkte (36) zugleich auf dem absoluten Kegelschnitt liegt. Wir wählen die Parameterverteilung so, daß $\mathfrak{a}$ ein solcher Punkt ist. Dann gilt also

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 0 \quad \text{und damit} \quad \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle = 0.$$

Dann führt aber

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{n} \rangle = 0$$

auf

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0.$$

Somit: *Betrachten wir diejenigen konkordanten Geraden, die Tangenten an die Kurven dritter Ordnung* $\mathfrak{y}$ *sind, so definieren sie auf den Brennflächen der konkordanten Kongruenz zwei ausgezeichnete Kurven. Ist eine davon Singularitätenkurve, so gilt das gleiche für die Ebenengesamtheit* $\mathfrak{Y}$. *Dies ist, genau dann der Fall, wenn zu den so ausgewählten konkordanten Geraden ein* CARTANscher *Parameter gehört. Dies bedeutet nach* (8.30), *daß die Kurve auf* $\mathfrak{y}$ *Torsallinie ist.*

Entsprechend beweist man auch: *Trennt auf einer konkordanten Geraden* $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ *das Urbild von* $\mathfrak{n}$ *die Spiegelpunkte harmonisch (das Urbild von* $\bar{\mathfrak{n}}$ *hat dann die gleiche Eigenschaft) und schneidet die Regelfläche* $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ *die Berührquadrik involutorisch* [vgl. 8c)], *so trennen auch die Medianpunkte der Brennpunktskurven der konkordanten Kongruenz auf* $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ *die Spiegelpunkte harmonisch. Zwei der Aussagen bedingen die dritte.*

h) Betrachtet man *dieselbe* Quadrik als Gesamtheit ihrer Punkte bzw. Gesamtheit ihrer Ebenen, so bestehen zwischen den Größen $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, F$ und $\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{t}}, \bar{F}$ die Beziehungen:

$$(7.37)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{r}} = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{r}, \mathfrak{r}\rangle \mathfrak{t} - \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{s} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{r} + 2F(\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{r}) - F^2 \mathfrak{r}, \\ \bar{\mathfrak{s}} = -\frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{s} - \frac{1}{2}\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{r}\rangle \mathfrak{s} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{t} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{t}\rangle \mathfrak{r} + F(\mathfrak{r} \wedge \mathfrak{t}) - F^2 \mathfrak{s}, \\ \bar{\mathfrak{t}} = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t}\rangle \mathfrak{r} - \langle \mathfrak{t}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{s} + \frac{1}{2}\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle \mathfrak{t} + 2F(\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{t}) - F^2 \mathfrak{t} \\ \bar{F} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}) + \frac{1}{2}F[\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle - \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{t}\rangle] + F^3. \end{cases}$$

8. a) Wir wollen den Zusammenhang zwischen verschiedenen Dv-Scharen derselben Regelfläche untersuchen. Wir gehen aus von (1.23) und bestimmen

$$\hat{\mathfrak{q}}_i'' = [\hat{\alpha}_{ik} + \gamma_{ik}' - (\gamma_{il} + \beta_{il})\gamma_{lk}]\,\hat{\mathfrak{q}}_k + [2\gamma_{ik} + \hat{\beta}_{ik}]\,\hat{\mathfrak{q}}_k', \qquad i = 1, 2.$$

Hieraus entnehmen wir für die Invarianten der Dv-Schar

$$(8.1)\qquad \hat{\mathfrak{q}}_1 + \hat{s}\,\hat{\mathfrak{q}}_2, \qquad \hat{s} = \text{const},$$

die wir zur Unterscheidung mit einer $\sim$ versehen:

$$(8.2)\quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{b}} = \hat{\mathfrak{b}} + 2\mathfrak{c}, \\ \tilde{\mathfrak{a}} = \hat{\mathfrak{a}} + \mathfrak{c}' - \hat{\mathfrak{b}} \wedge \mathfrak{c}, \\ \tilde{\alpha}_{11} + \tilde{\alpha}_{22} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \langle \hat{\mathfrak{b}} + \mathfrak{c}, \mathfrak{c}\rangle, \end{cases}$$

wobei

$$(8.3)\quad \begin{cases} \hat{\alpha}_{ik} = c_{il}\,\alpha_{lm}\,c_{mk}^{-1}, \\ \hat{\beta}_{ik} = c_{il}\,\beta_{lm}\,c_{mk}^{-1}, \\ \gamma_{ik} = c_{il}'\,c_{lk}^{-1}, \\ \mathfrak{c} = \{-\gamma_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{12}\} \end{cases}$$

gesetzt ist. Weiter ist hierin wegen (1.22)

$$(8.4)\qquad \gamma_{11} + \gamma_{22} = 0$$

zu beachten.

An einer festen Stelle $t=t_0$ können wir immer

$$c_{ik}(t_0)=\delta_{ik} \tag{8.5}$$

setzen, so daß

$$\hat{\alpha}_{ik}(t_0)=\alpha_{ik}(t_0),\quad \hat{\beta}_{ik}(t_0)=\beta_{ik}(t_0) \tag{8.6}$$

wird.

b) Die konkordanten Geraden, die zu verschiedenen Dv-Scharen gehören, sind eineindeutig aufeinander bezogen durch die Beziehungen [vgl. (1.22), (1.23) und (5)]:

$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{x}}_1=\mathfrak{x}_1+\gamma_{11}\mathfrak{q}_1+\gamma_{12}\mathfrak{q}_2, \\ \tilde{\mathfrak{x}}_2=\mathfrak{x}_2+\gamma_{21}\mathfrak{q}_1+\gamma_{22}\mathfrak{q}_2. \end{cases} \tag{8.7}$$

Dies folgt analytisch schon daraus, daß sich die Parameterverteilung in einer Dv-Schar auf die sie tragende Regelfläche überträgt.

Geometrisch erklärt sich die Abbildung in der folgenden Weise: Man beachte zuerst, daß zwei konkordante Geraden (auch solche, die zu verschiedenen Dv-Scharen gehören) durch die Transversalgeraden auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ und damit auch aufeinander projektiv abgebildet sind. So gehören etwa die Punkte $\tilde{\mathfrak{x}}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{x}_1$ zusammen. Nun schneidet die Verbindungsgerade $(\tilde{\mathfrak{x}}_1, \mathfrak{x}_1)$ die Erzeugende $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ in dem Punkt

$$\gamma_{11}\mathfrak{q}_1+\gamma_{12}\mathfrak{q}_2.$$

Dem Punkt $\mathfrak{q}_1$ ist also in dieser Weise der Punkt $\gamma_{11}\mathfrak{q}_1+\gamma_{12}\mathfrak{q}_2$ zugeordnet.

Wir betrachten das so entstandene Punktepaar auf $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$:

$$s(\gamma_{11}s-\gamma_{12})=-\gamma_{12}s+\gamma_{11}s^2=0.$$

Ihm entspricht in der hyperbolischen Ebene der Punkt

$$\gamma_{11}\mathfrak{x}+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}\mathfrak{d}.$$

Das Punktepaar trennt die Berührpunkte der beiden Dv-Scharen harmonisch. Die Berührpunkte sind ja auf

$$\mathfrak{c}=-\gamma_{21}\mathfrak{x}-\tfrac{1}{2}(\gamma_{22}-\gamma_{11})\mathfrak{d}+\gamma_{12}\bar{\mathfrak{x}} \tag{8.8}$$

abgebildet und es ist

$$\langle \mathfrak{c}, \gamma_{11}\mathfrak{x}+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}\mathfrak{d}\rangle=0.$$

Der Punkt $\mathfrak{q}_1$ ist vor anderen Punkten der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ nicht ausgezeichnet und es gilt also: *Betrachtet man die Transversalgeraden zweier verschiedener Dv-Scharen durch einen Punkt* $\mathfrak{p}$ *der Erzeugenden* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$, *so liegen zusammengehörige Punkte der beiden Transversalgeraden mit* $\bar{\mathfrak{p}}$, *dem vierten harmonischen Punkt zu* $\mathfrak{p}$ *bezüglich der Berührstellen der beiden Dv-Scharen, in einer Geraden. So sind mit ihren Punkten auch die Scharen konkordanter Geraden zweier verschiedener Dv-Scharen projektiv aufeinander abgebildet.*

c) *Die* CARTANschen *Parameter, für die also*

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0 \tag{8.9}$$

gilt, sind geometrisch dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörigen Regelflächen $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ *die Berührquadrik involutorisch schneiden.* Haben zwei Regelflächen eine Erzeugend gemein und berühren sie sich nicht längs dieser Erzeugenden, so ist jedem Punkt $\mathfrak{r}$ der gemeinsamen Erzeugenden ein Punkt $\bar{\mathfrak{r}}$ dieser Erzeugenden dadurch zugeordnet, daß die Tangentenebene an die erste Regelfläche im Punkt $\mathfrak{r}$ die zweite Regelfläche im Punkte $\bar{\mathfrak{r}}$ berührt. Diese Abbildung ist immer eine Projektivität der gemeinsamen Erzeugenden auf sich, hat aber nur in Spezialfällen involutorischen Charakter.

In dem Punkt $\mathfrak{s}_1 + s\,\mathfrak{s}_2$ ist die Ebene $\mathfrak{S}_1 + s\,\mathfrak{S}_2$ Tangentenebene an die Berührquadrik. Wegen

$$(\mathfrak{s}_1 + \bar{s}\,\mathfrak{s}_2)' \equiv \alpha_{11}\,\mathfrak{q}_1 + \alpha_{12}\,\mathfrak{q}_2 + \bar{s}\,(\alpha_{21}\,\mathfrak{q}_1 + \alpha_{22}\,\mathfrak{q}_2) \pmod{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2}$$

berührt diese Ebene die Regelfläche $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ in dem Punkt

$$(\alpha_{11} + \bar{s}\,\alpha_{21})\,s + (\alpha_{12} + \bar{s}\,\alpha_{22}) = 0. \tag{8.10}$$

Die Abbildung (10), deren Doppelpunkte natürlich die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz auf $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ sind, ist nun — wie behauptet — genau dann involutorisch, falls (9) gilt.

d) Ist g irgendeine Halbinvariante vom Gewicht 2:

$$g^* = \varphi^{-2} g \tag{8.11}$$

so definiert

$$(\alpha^*_{11} + \alpha^*_{22}) - g^* = 0 \tag{8.12}$$

einen zu dieser Halbinvarianten gehörenden projektivinvarianten Parameter. Die Regelflächen $(\mathfrak{s}^*_1, \mathfrak{s}^*_2)$ mit (12) bilden deshalb die Scharen konkordanter Geraden entlang der Dv-Schar projektiv aufeinander ab. Dies gilt insbesondere auch für den Spezialfall der CARTANschen Parameter.

Die CARTANschen Parameter einer zweiten Dv-Schar haben für die Ausgangsschar diesen Charakter (12) mit

$$g = -\tfrac{1}{2}\langle \tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle. \tag{8.13}$$

Insbesondere interessiert hier

$$g = -\tfrac{1}{2}\langle \tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle = 0, \tag{8.14}$$

d. h., daß die CARTANschen Parameter zweier Dv-Scharen sich entsprechen.

Die Berührstellen zweier Dv-Scharen und ihre Schmiegstellenpaare gehören nach der ersten Gl. (2) einer Involution an[17]). Denn diese Punkte-

[17]) Dies gilt auch für die Berührstellenpaare dreier Dv-Scharen. Die momentanen Drehpole dreier relativ zueinander bewegten Systeme der hyperbolischen Ebene liegen in einer Geraden.

paare werden der Reihe nach auf $\mathfrak{b}, \tilde{\mathfrak{b}}, 2\mathfrak{c} = \tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{b}$ abgebildet. In dieser Involution gibt es ein viertes Punktepaar

$$\tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b} = 2(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \tag{8.15}$$

das das Punktepaar der Berührstellen von den Punktepaaren der Schmiegstellen harmonisch trennt. Das Urbild von (15) möge *assoziiertes* Punktepaar zweier Dv-Scharen heißen. (14) lehrt dann: *Die* CARTAN*schen Parameter zweier Dv-Scharen, deren Schmiegstellen verschieden sind, entsprechen sich dann und nur dann, wenn die assoziierten Punkte die Berührstellen harmonisch trennen.*

Ist die durch die Schmiegstellen zweier Dv-Scharen definierte Involution entartet, so ist auch hier ein assoziiertes Punktepaar beider Dv-Scharen erklärt: Das Doppelverhältnis von vier Punktepaaren einer entarteten Involution ist das gewöhnliche Doppelverhältnis der freien Punkte (während die zweiten Punkte aller Paare der Involution ja zusammenfallen). *Haben zwei Dv-Scharen eine aber nicht beide Schmiegstellen gemeinsam, so entsprechen sich die* CARTAN*schen Parameter dann und nur dann, falls die assoziierten Punkte zusammenfallen.*

Wir wollen jetzt eine zweite Dv-Schar betrachten, deren Schmiegstellen mit denen der Ausgangsschar zusammenfallen. Hier gilt

$$\tilde{\mathfrak{b}} - D\mathfrak{b} = 0. \tag{8.16}$$

Wir sprechen dann von zwei zueinander *isogonalen Scharen*. Betrachten wir die von einem Punkt der Erzeugenden $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ auslaufenden Kurven, nämlich die Erzeugende selbst, die krummlinige Asymptotenlinie, die Scharkurve der ersten bzw. der zweiten Dv-Schar. Ihre Richtungen haben ein Doppelverhältnis D, das genau für zueinander isogonale Scharen nicht von dem betrachteten Punkt auf der Erzeugenden abhängt. D in (16) gibt den Wert dieser Vollinvarianten an.

Von zueinander isogonalen Scharen im strengen Sinne sprechen wir insbesondere, wenn

$$D = \text{const}, \tag{8.17}$$

das Doppelverhältnis also entlang der Regelfläche konstant ist. Hierunter fallen die zueinander konjugierten Scharen mit

$$D = -1. \tag{8.18}$$

Es folgt: *Die* CARTAN*schen Parameter auf zwei zueinander isogonalen Scharen mit nichtzusammenfallenden Schmiegkurven entsprechen sich dann und nur dann, wenn die Scharen konjugiert sind. Fallen die Schmiegkurven in eine Kurve zusammen, dann entsprechen sich die* CARTAN*schen Parameter immer.*

Mit (16) geht (13) über in

$$g = -\tfrac{1}{4}(D^2 - 1)\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle, \tag{8.19}$$

und wir entnehmen daraus weiterhin: *Sind die Schmiegkurven einer Dv-Schar verschieden, so gibt es stets genau zwei Dv-Scharen, die zu der Ausgangsschar*

isogonal sind und die einen vorgegebenen projektivinvarianten Parameter (12) *als* CARTANschen *Parameter besitzen. Diese Dv-Scharen sind zueinander konjugiert. Der Zusammenhang läßt sich umkehren.*

Diese Scharen sind reell, falls

$$1 - \frac{4g}{\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle} \geq 0.$$

Gilt das Gleichheitszeichen, so fallen sie in die Schar der Asymptotenlinien zusammen.

Letzten Endes ist noch zu erwähnen, daß *die* CARTANschen *Parameter einer Dv-Schar dann und nur dann mit denen der Asymptotenlinien übereinstimmen, wenn die Schmiegkurven zusammenfallen.*

e) Der Kehlpunkt der Geradenschar $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ im bewegten bzw. festen System ist der Punkt

$$\mathfrak{c} = E_1 \mathfrak{b} + E_2 \mathfrak{a} \quad \text{bzw.} \quad \mathring{\mathfrak{c}} = \mathring{E}_1 \mathfrak{b} + \mathring{E}_2 \mathfrak{a}, \tag{8.20}$$

der polar zu $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ bzw. $(\mathring{\mathfrak{b}}, \mathring{\mathfrak{b}}')$ ist. Er bestimmt sich also aus

$$\langle \mathfrak{b}, E_1 \mathfrak{b}' + E_2 \mathfrak{a}' \rangle = 0 \tag{8.21}$$

bzw. aus [man benütze (6.6)]

$$\langle \mathfrak{b}, \mathring{E}_1 \mathfrak{b}' + \mathring{E}_2 \mathfrak{a}' - \mathring{E}_2 \mathfrak{b} \rangle = 0. \tag{8.22}$$

Können die Spiegelpunkte (und damit die ausgezeichneten Involutionen) zweier verschiedener Dv-Scharen zusammenfallen? Hierzu muß

$$\langle \tilde{\mathfrak{b}}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b} \rangle = 0 \tag{8.23}$$

sein. Die erste Aussage erlaubt den Ansatz (20) und die zweite führt dann auf (22). Somit ist also

$$\mathfrak{c} = E_0 \mathring{\mathfrak{c}}. \tag{8.24}$$

Die Spiegelpunkte einer zweiten Dv-Schar fallen dann und nur dann mit denen der Ausgangsschar zusammen, falls die Berührstellen die Medianpunkte der Spiegelkurven in bezug auf die Asymptotenlinien sind. Die Dv-Scharen mit denselben Spiegelpunkten wie die Ausgangsschar sind analytisch durch (2) mit (24) gegeben und hängen also von einer willkürlichen Funktion ab.

Insbesondere folgt aus diesem Satz: Die Dv-Scharen mit (6.3), was etwa bedeutet, daß die Mediankurven der Schmiegkurven mit den Spiegelkurven zusammenfallen, sind dadurch gekennzeichnet, daß *eine* Isogonalschar (etwa die konjugierte) mit der Ausgangsschar die Spiegelpunkte gemein hat. Gilt (6.3), so haben *alle* Isogonalscharen diese Eigenschaft. (Vgl. im übrigen Abschnitt 6.)

f) *Die Spiegelpunkte zueinander isogonaler Scharen im strengen Sinne (also* $D = \text{const}$*) gehören einer Involution an, in der auch die Medianpunkte der Schmiegkurven liegen.* Es ist ja nach (2) mit (16) und (17)

$$\mathfrak{b} \wedge \dot{\tilde{\mathfrak{a}}} = \mathfrak{b} \wedge \left(\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2} (D - 1) \mathfrak{b}' \right). \tag{8.25}$$

In dieser Gesamtheit von Punktepaaren ist D projektiver Parameter. Es kennzeichnet $D=0$ das Paar der Involution, dessen Punkte die Fleknodalpunkte harmonisch trennen, $D=\infty$ die Medianpunkte der Schmiegkurven, D die Spiegelpunkte einer zweiten, $D=1$ die der Ausgangs-Dv-Schar. D gibt das Doppelverhältnis dieser vier Punktepaare in der genannten Reihenfolge an. Es folgt: *Das Paar der Involution, dessen Punkte die Fleknodalpunkte harmonisch trennen, trennt die Spiegelpunktepaare je zwei zueinander konjugierter Dv-Scharen von den Medianpunkten der Schmiegkurven harmonisch.*

Ein Paar der genannten Involution war uns bereits in Abschnitt 7 (7.32) begegnet. Es war dort das Punktepaar mit

$$D=3 \tag{8.26}$$

geometrisch gekennzeichnet worden.

Statt der Beziehung (25) hätte man auch die ursprünglichere

$$\tilde{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}(D-1)\,\mathfrak{b}' \tag{8.27}$$

betrachten können. Sie sagt etwas mehr aus, nämlich etwa, daß *die Brennpunktepaare zusammengehörender konkordanter Geraden nach ihrer Projektion auf* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *mit den Fleknodalpunkten in einer Involution liegen.*

Beide Involutionen sind durch gleiche Werte von D projektiv aufeinander abgebildet. Man kann also die ausgesprochenen Sätze auch hier formulieren. Wir heben weiterhin hervor, daß *auf den Transversalgeraden durch einen Fleknodalpunkt, die zu den verschiedenen Isogonalscharen gehören, die Brennpunkte der konkordanten Kongruenz sich alle entsprechen, d.h.* [*vgl.* b)] *auf einer Geraden liegen, die* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *in einem Punkt trifft, der den betrachteten Fleknodalpunkt von den Schmiegstellen harmonisch trennt.*

g) Inwieweit bestimmen die Schmiegkurven eine schichtbildende Dv-Schar? Diese Schmiegkurven müssen der notwendigen Bedingung

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a})=0 \tag{8.28}$$

genügen, d.h. ihre Medianpunkte müssen die Fleknodalpunkte harmonisch trennen. Es sei also eine Dv-Schar mit (28) gegeben und wir fragen uns, ob unter den Isogonalscharen dieser Dv-Schar eine schichtbildende Dv-Schar existiert.

Hierzu muß nach (2)

$$\tilde{\mathfrak{a}}\equiv\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}(D-1)\,\mathfrak{b}'\equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}} \tag{8.29}$$

sein. Sind die Schmiegkurven nicht Scharkurven — dann wären sie auch Asymptotenlinien — so ist nach (28) der Ansatz (6.22) gerechtfertigt und (29) führt auf

$$G+\tfrac{1}{2}(D-1)=0. \tag{8.30}$$

Man schließt: *Hat man ein Kurvenpaar einer Regelfläche, dessen Mediankurven erklärt sind und die Fleknodalkurven harmonisch trennen, so gibt es dazu eine eindeutig bestimmte schichtbildende Dv-Schar, deren Schmiegkurven das gegebene*

Kurvenpaar beschreiben. Oder: *Zwei verschiedene zueinander isogonale Dv-Scharen können nur dann beide schichtbildend sein, falls die Schmiegkurven der Schar angehören. Dann sind diese aber Geraden* [vgl. Abschnitt 5 d)].

h) Die Torsallinien der konkordanten Kongruenz findet man nach (2.16) aus

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \equiv \tfrac{1}{2}\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle + \tfrac{1}{4}(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2 = 0, \tag{8.31}$$

indem man diese Bedingung für eine beliebige Parameterverteilung ausschreibt. Nach (1.12), (1.14) ist dabei

$$2\langle \mathfrak{a}^*, \mathfrak{a}^*\rangle + (\alpha_{11}^*+\alpha_{22}^*)^2 = 2\langle \mathfrak{a} - A\mathfrak{b}, \mathfrak{a} - A\mathfrak{b}\rangle + [\alpha_{11}+\alpha_{22}+2A'-2A^2]^2. \tag{8.32}$$

Die Torsallinien bilden die konkordanten Geraden der Berührquadriken genau dann projektiv aufeinander ab, wenn (32) in zwei RICCATIsche Differentialgleichungen für A' zerfällt. Hierfür ist

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle = 0$$

kennzeichnend (vgl. 4.15): *Die Torsallinien der konkordanten Kongruenz bilden die konkordanten Geraden der Berührquadriken genau dann projektiv aufeinander ab, wenn die Brennflächen der konkordanten Kongruenz von einer Geraden und einem Kegelschnitt oder von zwei Geraden erzeugt werden.*

Können die Torsallinien der konkordanten Kongruenzen zweier verschiedener Dv-Scharen derselben Regelfläche zusammenfallen? Hierzu müßte

$$2\langle \tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}\rangle + (\tilde{\alpha}_{11}+\tilde{\alpha}_{22})^2 = 0 \tag{8.33}$$

nach Übergang auf eine allgemeine Parameterverteilung dieselbe Differentialgleichung in A' darstellen, wie (32). Nun tritt A' nur in die Größe $\alpha_{11}+\alpha_{22}$ ein. Eliminiert man also $\alpha_{11}+\alpha_{22}$ aus (31) und (33), so ist das Eliminationsergebnis nach Transformation auf allgemeine Parameter ein Polynom in A, das identisch verschwinden muß. Man sieht nun sofort, daß der Koeffizient der höchsten Potenz in A die Größe $\langle \mathfrak{b}+\tilde{\mathfrak{b}}, \mathfrak{c}\rangle$ ist, d.h. es muß

$$\langle \mathfrak{b}+\tilde{\mathfrak{b}}, \mathfrak{c}\rangle = 0 \tag{8.34}$$

sein. Daraus folgt [vgl. (13)]: *Die Torsallinien der konkordanten Kongruenzen zweier verschiedener Dv-Scharen stimmen höchstens dann überein, wenn auch die* CARTANschen *Parameter übereinstimmen.*

In diesem Fall liefert die Elimination von $\alpha_{11}+\alpha_{22}$ aus (31) und (33) unmittelbar

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle = \langle \tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}\rangle,$$

und dies kann man nach (2) unter Beachtung von (6.6) in der Form

$$\langle \mathring{\mathfrak{c}}, (\mathring{\mathfrak{b}}+\mathring{\tilde{\mathfrak{b}}})' + \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}\rangle = 0$$

schreiben. Gehen wir hier auf eine allgemeine Parameterverteilung über, so wird unter Beachtung von (34)

$$\langle \mathring{\mathfrak{c}}', (\mathring{\mathfrak{b}}+\mathring{\tilde{\mathfrak{b}}})' + \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}\rangle + A\langle \mathring{\mathfrak{c}}, \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}\rangle = 0. \tag{8.35}$$

Also: *Die Torsallinien zweier verschiedener konkordanten Kongruenzen stimmen höchstens dann überein, falls die Berührstellen die Fleknodalpunkte harmonisch trennen.* Im allgemeinen ist dies jedoch zusammen mit (34) noch nicht hinreichend.

Unter den Isogonalscharen einer Dv-Schar kommt bei $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle \neq 0$ nur die konjugierte für unsere Fragestellung in Betracht. Hier ist $\mathfrak{b} + \tilde{\mathfrak{b}} = 0$ und (35) sagt aus: *Die Torsallinien der konkordanten Kongruenzen zweier konjugierter Dv-Scharen fallen genau dann zusammen, wenn die Fleknodalkurven die Mediankurven der Schmiegkurven sind.*

9. a) Wir sahen bereits, daß die hyperbolische Bewegung der Hilfsebene eine Dv-Schar bis auf asymptotenlinienerhaltende Abbildungen der Regelfläche festlegt. Nun übertragen sich noch andere Größen einer Dv-Schar auf einer konkret vorgegebenen Regelfläche in das hyperbolische Bild (wir knüpfen an Abschnitt 3 an, vgl. die Figur 2, S. 63), z.B. die Gerade $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ — charakterisiert durch das Bild der Spiegelpunkte $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}$ — und das Bild der Fleknodalpunkte $\mathfrak{f} = \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}$. *Diese Größen sind invariant gegenüber Projektivabwicklung der die Dv-Schar tragenden Regelfläche.* Man entnimmt das den Beziehungen (8.2), indem man als Ausgangsschar die Asymptotenlinien verwendet ($\mathfrak{b}_0 = 0$) und beachtet, daß dann die Halbinvariante $\mathfrak{a}_0$ die Regelfläche bezogen auf ihre Asymptotenlinien bis auf Projektivabwicklung kennzeichnet.

Umgekehrt legt die Kenntnis des Vektors $\mathfrak{a}$ in Abhängigkeit des invarianten Parameters der hyperbolischen Bewegung die Dv-Schar bis auf Projektivabwicklung der Regelfläche fest. Wie kann man dies geometrisch fassen?

Gegeben sei eine hyperbolische Bewegung in Abhängigkeit von t. In der bewegten Ebene sei ferner eine beliebige Kurve $\mathfrak{f}_0$ gegeben und eine weitere Kurve $\mathfrak{d}_0$, deren Punkte zu den jeweils zugehörigen momentanen Fixpunkten der Bewegung $\mathfrak{b}$ polar sind. Es sei $\mathfrak{d}_0$ weder zu $\mathfrak{b}'$ noch zu $\mathfrak{f}_0$ polar. — Hierdurch ist eine Dv-Schar bis auf Projektivabwicklung der Regelfläche eindeutig festgelegt, die in der Schar der Asymptotenlinien die hyperbolische Bewegung definiert und die $\mathfrak{f}_0$ als hyperbolisches Bild der Fleknodalpunkte bzw. $\mathfrak{d}_0$ als Bild der Spiegelpunkte besitzt.

Auf Grund der gemachten Voraussetzungen ist nämlich bei jeder Parameterverteilung mit einer geeigneten Funktion f

$$f\,\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}. \tag{9.1}$$

f bestimmt sich dann aus

$$\langle 2\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_0 \rangle = \langle \mathfrak{b}' - f\,\mathfrak{f}_0, \mathfrak{d}_0 \rangle = 0, \tag{9.2}$$

so daß (1) den Vektor $\mathfrak{a}$ in Abhängigkeit von t angibt. $\mathfrak{a}$ zeigt dann bei Parametertransformation zwangsläufig das richtige Transformationsverhalten.

Auf diese Weise sind natürlich nur Dv-Scharen zu konstruieren, bei denen die Spiegelpunkte erklärt und von den Medianpunkten der Schmiegkurven verschieden sind. Um auch die ausgeschlossenen Fälle zu erfassen, sprechen wir zunächst von den schichtbildenden Dv-Scharen.

Gegeben sei eine hyperbolische Bewegung in Abhängigkeit von t. In der bewegten Ebene sei ferner auf der Tangente an den Ort der momentanen Fixpunkte für jedes t ein Punkt, d.h. eine Kurve $\mathfrak{f}_0(t)$ gegeben, wobei $\mathfrak{f}_0$ von $\mathfrak{b}$ verschieden vorausgesetzt sei für jedes t. Hierdurch ist eine schichtbildende Dv-Schar bis auf Projektivabwicklung der Regelfläche eindeutig festgelegt, die in der Schar der Asymptotenlinien die hyperbolische Bewegung definiert und das hyperbolische Bild der Fleknodalpunkte $\mathfrak{f}_0$ besitzt.

Man mache auch hier den Ansatz (1) und setze $\mathfrak{f}_0$ in der normierten Gestalt

$$\mathfrak{f}_0 \equiv \mathfrak{b}' \pmod{\mathfrak{b}} \tag{9.3}$$

an. Dies ist immer möglich, wenn die Schmiegkurven nicht Scharkurven sind. Dann ist

$$2\mathfrak{a} \equiv (1-f)\,\mathfrak{b}' \pmod{\mathfrak{b}} \tag{9.4}$$

und also führt die Bedingung für schichtbildende Dv-Scharen

$$2\mathfrak{a} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}$$

auf

$$f = 1.$$

Es bleibt noch von den nichtschichtbildenden Dv-Scharen zu sprechen, *bei denen die Mediankurven der Schmiegkurven mit den Spiegelkurven zusammenfallen.* Sie genügen zusammen mit den schichtbildenden Dv-Scharen der kennzeichnenden Bedingung

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = 0. \tag{9.5}$$

Wir sahen [Abschnitt 8g)], daß mit diesen immer eine eindeutig bestimmte schichtbildende Isogonalschar verknüpft ist, die mit der betrachteten Schar ein wohldefiniertes Doppelverhältnis $D(t)$ bildet.

Geben wir also zusätzlich eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion $D_0(t)$ vor, so gibt es eine bis auf Projektivabwicklung eindeutig bestimmte Dv-Schar (5), *mit der die schichtbildende Isogonalschar das Doppelverhältnis $D_0(t)$ bildet.*

Hier bestimmt sich f, wie der Vergleich von (4) mit (6.22) und (8.30) lehrt, aus

$$f = D_0(t).$$

Die Vorgaben legen also wieder, wie behauptet, den Vektor $\mathfrak{a}$ eindeutig fest.

In Abschnitt 7 haben wir uns bemüht, auch die Größe $\alpha_{11} + \alpha_{22}$, die nicht mehr invariant gegenüber Projektivabwicklung der Regelfläche ist, in das hyperbolische Bild zu übertragen. Hierzu hatten wir die Kegelschnitte $\mathfrak{n}^*$ und $\bar{\mathfrak{n}}^*$ [vgl. (7.21), (7.27)] betrachtet. Man gewinnt so die Möglichkeit, eine Dv-Schar nicht nur bis auf Projektivabwicklung, sondern vollständig durch ihr hyperbolisches Bild zu kennzeichnen. Es genügt dazu bereits, die Schnittpunkte dieser Kegelschnitte mit der Geraden $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ [vgl. (7.36)] zu benützen.

b) Mit einem Kurvenpaar in einer Dv-Schar läßt sich auf zwei Arten eine Dv-Schar invariant verknüpfen, die die Kurven als Scharkurven enthält [vgl. Abschnitt 6e)]. Da gegenüber Projektivabwicklung einer Regelfläche außer den Asymptotenlinien auch die Fleknodalkurven invariant sind, so gilt das gleiche für die mit diesen verknüpfbaren Dv-Scharen. Besondere Bedeutung hat die *Prinzipalschar der Regelfläche.* Das ist die Prinzipalschar der Fleknodalkurven in der Dv-Schar der Asymptotenlinien [vgl. 6e)].

Identifizieren wir die Ausgangs-Dv-Schar mit der Prinzipalschar einer Regelfläche und verwenden als Basisvektoren die Fleknodalkurven. Dann gilt also [vgl. (6.17)]

$$\beta_{12}\beta'_{21} - \beta_{21}\beta'_{12} = 0 \tag{9.6}$$

und außerdem

$$\beta'_{12} - 2\alpha_{12} = \beta'_{21} - 2\alpha_{21} = 0. \tag{9.7}$$

Ohne Spezialisierung des Bezugssystems *ist eine Dv-Schar genau dann Prinzipalschar der sie tragenden Regelfläche, wenn*

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'') = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}' - 2\mathfrak{a}) \wedge (\mathfrak{b}'' - 2\mathfrak{a}') = 0 \tag{9.8}$$

ist. Die Prinzipalscharen sind also spezielle Typen der uns mehrfach aufgefallenen Dv-Scharen mit (5) (vgl. insbesondere Abschnitt 6).

Bei diesen Dv-Scharen mit (5) und damit auch bei den Prinzipalscharen gilt nun: *Sind die Schmiegstellen einer solchen Dv-Schar verschieden, so wird die Brennfläche der konkordanten Kongruenz entweder von Kurven dritter Ordnung oder von Geraden erzeugt.* Dies heißt also, daß wir bei den Prinzipalscharen im Hinblick auf die konkordante Kongruenz neben dem allgemeinen Fall hauptsächlich die schichtbildenden Dv-Scharen zu betrachten haben.

Beachten wir dann noch, daß die Vorgabe des hyperbolischen Bildes des ausgezeichneten Kurvenpaares die zu der Prinzipalschar gehörende Bewegung festlegt, so kommen wir zu dem folgenden Satz: *Eine Regelfläche ist bis auf Projektivabwicklung eindeutig festgelegt durch Vorgabe des hyperbolischen Bildes der Fleknodalkurven in der Schar der Asymptotenlinien und durch Vorgabe des Wertes $D_0(t)$ des Doppelverhältnisses, das die schichtbildende Isogonalschar mit der Prinzipalschar bildet. Mit $D_0(t) = 1$ sind die schichtbildenden Prinzipalscharen selbst erfaßt. Es gibt zu diesen Vorgaben immer eine Regelfläche.* Dabei sind die Fleknodalkurven allerdings als verschieden voneinander vorauszusetzen.

Auf eine nähere Diskussion der Prinzipalscharen vom Standpunkt der Theorie der Dv-Scharen aus, die für die Theorie der Regelflächen von Interesse wäre, wollen wir hier nicht eingehen.

Freiburg i. B., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 15. Dezember 1954.)

KÜNZI, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 94—98 (1955)

Zwei Beispiele zur Wertverteilungslehre.

Von
HANS KÜNZI.

Einleitung.

In verschiedenen Arbeiten haben ULLRICH [6], [7], [8], WITTICH [9], [10], [11], [12], PÖSCHL [5] und der Verfasser [2], [3], [4] gezeigt, wie man die Wertverteilung für bestimmte analytische Funktionen berechnen kann, für den Fall, daß die Riemannsche Fläche W durch einen Streckenkomplex dargestellt ist. So wurden in den letzten Jahren vor allem Riemannsche Flächen untersucht, deren Streckenkomplexe endlich viele einfach- und doppeltperiodische Enden aufwiesen. Zwischen je zwei solchen Enden befindet sich bekanntlich ein logarithmisches Elementargebiet. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich zuerst mit einem Beispiel befassen, bei dem ein doppeltperiodisches Ende mit einer bestimmten asymmetrischen Berandung versehen wird. Einen derartigen Komplex kann man auch als ein doppelt-periodisches Ende auffassen, an den direkt, also ohne Dazwischenschaltung eines logarithmischen Elementargebietes, zwei einfachperiodische Enden grenzen.

Beispiel 2 zeigt, wie man 4 Viertelsenden zu einem Komplex, der überhaupt kein logarithmisches Elementargebiet aufweist, zusammenfügen kann.

Es würde zu weit führen, in dieser Arbeit die notwendigen Uniformisierungsmethoden anzugeben, wir können uns aber dafür auf die ausführlichen Arbeiten [2], [3] beziehen. Über die Theorie von Viertelsenden vergleiche man meine Arbeiten [3], [4].

Im weiteren möchte ich noch erwähnen, daß ich mich vor einigen Jahren mit Herrn PÖSCHL mündlich über die Möglichkeit derartiger Flächenkonstruktionen unterhalten habe.

Erstes Beispiel.

Die Fläche W ist gegeben durch den Streckenkomplex S, die Lage der Grundpunkte $a_1 \dots a_4$, sowie die Zerschneidungskurve c. Vergleiche hierzu ELFVING [1] und KÜNZI [3].

Aus den früheren Untersuchungen [3] geht hervor, daß sämtliche Defekte $\delta(a_k)$ $(k=1, \dots, 4)$ verschwinden. Auch ist leicht einzusehen, daß die asymmetrische Berandung in unserem Beispiel die Verzweigungsindizes nicht beeinflußt, also gilt auch hier: $\varepsilon(a_k)=\frac{1}{2}$ $(k=1, \dots, 4)$.

Ohne die angebrachte Berandung, hätte die Fläche die Ordnung $\lambda=2$. Um die neue Ordnung unserer Fläche zu bestimmen, müssen wir diese zweckmäßig uniformisieren.

Daß wir uns speziell bei den fo'genden Betrachtungen an das Beispiel der Fig. 1 halten, schränkt die Allgemeinheit der in der Einleitung erwähnten Flächenklasse nicht ein.

In einem ersten Schritt stanzen wir durch einen Kreis den logarithmischen Windungspunkt, der über a_2 liegt, aus der Fläche heraus und uniformisieren diesen durch die Logarithmusfunktion in eine Halbebene. Diese Halbebene denken wir uns in eine z-Ebene gelegt mit $\mathrm{Re}\, z < 0$.

In einem zweiten Schritt schneiden wir den doppeltperiodischen Teil längs einer bestimmten Gliederfolge — 1 — 3 — 1 — 3 — 1 — aus der Fläche heraus und bilden diesen durch ein elliptisches Integral ebenfalls in eine z Halbebene mit $\mathrm{Re}\, z > b$ $(b > 0)$. Um eine geradlinige Begrenzung zu erhalten, sind einfache quasikonforme Abbildungen nötig (vgl. [2], [3]).

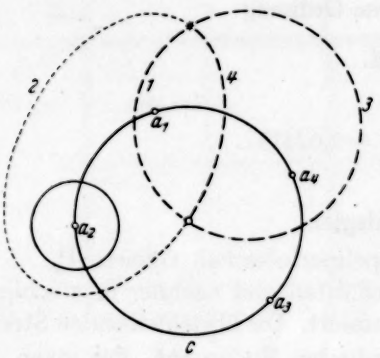


Fig. 1.

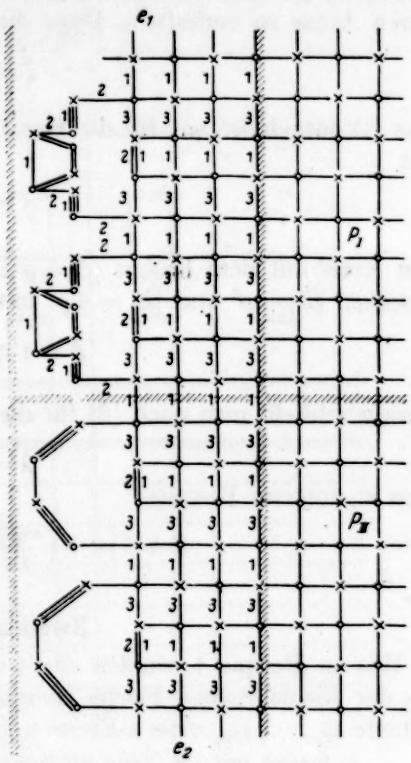


Fig. 2.

Die beiden Streifenenden e_1 und e_2 im Streckenkomplex dürfen wir als Teile einfachperiodischer Enden auffassen, die sich mit den entsprechenden Umkehrfunktionen von $w_\mu = R(e^z)$ $(\mu = 1, 2)$ in 2 Halbstreifen uniformisieren lassen. Mit bestimmten konformen und quasikonformen Abbildungen können wir die beiden Halbstreifen so in Parallelstreifen der Breite b überführen, daß sich der erste, der dem Ende e_1 entspricht, längs einer seiner Berandungen mit der entsprechenden Berandung $\mathrm{Re}\, z = b$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ von z identifizieren läßt und desgleichen die eine Berandung des zweiten Parallelstreifens mit $\mathrm{Re}\, z = b$, $\mathrm{Im}\, z < 0$ von z.

Um die beiden Halbebenen $\mathrm{Re}\, z > 0$ und $\mathrm{Re}\, z < 0$ miteinander zu verheften, müssen wir zuerst auf $\mathrm{Re}\, z < 0$ die Ähnlichkeitstransformation

$$Z = \frac{\omega_1}{\omega_1'} \cdot z$$

ausführen. ω_i, ω_i' bezeichnen die Anzahl der linken bzw. rechten berandenden Innenknoten einer Periode von e_i[1]).

Durch eine weitere quasikonforme Abbildung von $\operatorname{Re} z > 0$ auf $\operatorname{Re} Z > 0$ lassen sich die beiden Z-Halbebenen längs der positiven imaginären Achse identifizieren. Zum Schluß ist das Z-Blatt noch längs der negativen imaginären Achse zu verheften. Dazu dient die Spiralabbildung

$$\zeta = Z^{a+ib}.$$

Aus (3) entnehmen wir für die Konstanten die Werte $a = 1$ und $b = -\frac{\log A}{2\pi}$ mit

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_1' \cdot \omega_2'}.$$

Ein Kreis mit dem Radius $|\zeta| = \varrho$ entspricht in der Z-Ebene einer Spirale zwischen $|Z| = \varrho^\beta$ und $|Z| = A\varrho^\beta$ mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{\log A}{2\pi}\right)^2.$$

Daraus schließt man nach [3] für die neue Ordnung

$$\lambda = 2\beta.$$

Also in unserem Beispiel

$$\lambda = 2\left[1 + \left(\frac{\log \frac{3}{8}}{2\pi}\right)^2\right] = 2{,}02415\ldots.$$

Zweites Beispiel.

Wie in Beispiel 1 werden die 4 doppeltperiodischen Gebiete $P_{\mathrm{I}}, \ldots, P_{\mathrm{IV}}$ aus der Riemannschen Fläche herausgeschnitten und nachher in 4 schlichte Gebiete $z_{P_{\mathrm{I}}}, \ldots, z_{P_{\mathrm{IV}}}$ einer z-Ebene uniformisiert. Die übrigbleibenden Streifen $e_1, \ldots, e_4$ fassen wir als Teile einfachperiodischer Enden auf. Die ihnen entsprechenden Flächenstücke werden mit Hilfe bestimmter Umkehrfunktionen von $w = R(e^z)$ in Halbstreifen abgebildet. Vor der Verheftung der 4 Gebiete $z_{P_{\mathrm{I}}}, \ldots, z_{P_{\mathrm{IV}}}$ mit den Halbstreifen müssen diese zuerst wieder ähnlich transformiert werden nach

$$Z_{\mathrm{I}} = z_{P_{\mathrm{I}}}, \quad Z_{\mathrm{II}} = \frac{\omega_1}{\omega_1'} z_{P_{\mathrm{II}}}, \quad Z_{\mathrm{III}} = \frac{\omega_1}{\omega_1'} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2'} z_{P_{\mathrm{III}}}, \quad Z_{\mathrm{IV}} = \frac{\omega_1}{\omega_1'} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2'} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_3'} z_{P_{\mathrm{IV}}}.$$

Mit den in [3] angegebenen quasikonformen Abbildungen lassen sich jetzt die vier Gebiete $Z_{\mathrm{I}}, \ldots, Z_{\mathrm{IV}}$ verheften. Die Punkte längs der positiven reellen Achse sind zu identifizieren durch die Spiralabbildung

$$\zeta = Z^{1 - \frac{\log A}{2\pi}}$$

mit

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4}{\omega_1' \cdot \omega_2' \cdot \omega_3' \cdot \omega_4'}.$$

[1]) Die rechte bzw. linke Berandung eines Endes wird vom Kern aus bestimmt.

Wie im ersten Beispiel geht ein Kreis mit $|\zeta| = \varrho$ in eine Spirale der Z-Ebene über zwischen $|Z| = \varrho^{\beta}$ und $|Z| = A\,\varrho^{\beta}$ mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{\log A}{2\pi}\right)^2.$$

Für die Ordnung ergibt sich dadurch entsprechend wie im ersten Beispiel:

$$\lambda = 2\beta = 2\left\{1 + \left(\frac{\log A}{2\pi}\right)^2\right\}.$$

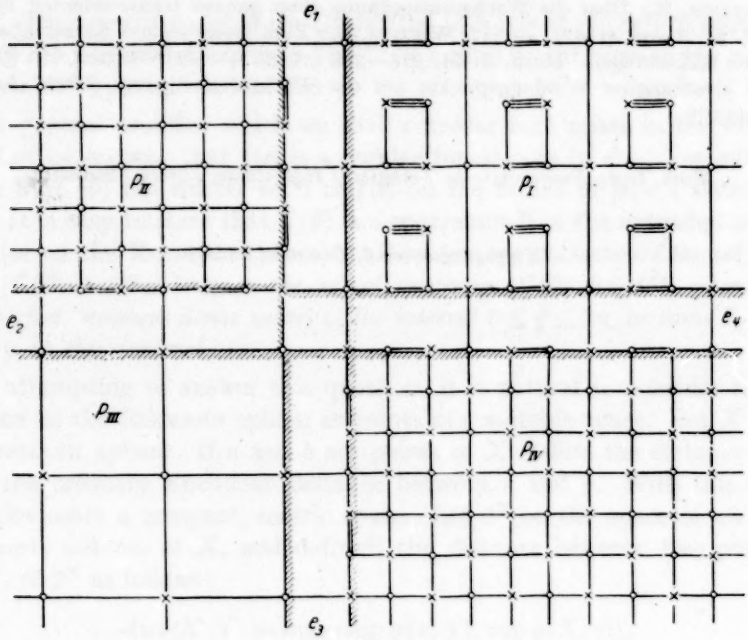


Fig. 3.

Für das Beispiel der Fig. 3 gilt:

$$\omega_1 = 1 \quad \omega_2 = 2 \quad \omega_3 = 3 \quad \omega_4 = 1$$
$$\omega_1' = 1 \quad \omega_2' = 3 \quad \omega_3' = 3 \quad \omega_4' = 3$$
$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{2} \qquad \lambda = 2 \cdot \beta \qquad \beta = 1 + \left(\frac{\log \frac{1}{2}}{2\pi}\right)^2$$
$$\lambda = 2\left\{1 + \left(\frac{\log \frac{1}{2}}{2\pi}\right)^2\right\} = 2{,}02433\ldots.$$

In einer späteren Arbeit werden wir auch auf die Berechnung der Verzweigungsindizes bei derartigen Flächen eingehen.

Literatur.

[1] Elfving, G.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformierung. Acta Soc. Sci. Fennicae, N.S. **2**, Nr. 3 (1934). — [2] Künzi, H.: Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem. Arch. Math. **4**, 210—215 (1953). — [3] Künzi, H.:

Neue Beiträge zur Wertverteilungslehre. Comm. Math. Helv. **29**, Heft 3 (1955). — [*4*] KÜNZI, H.: Konstruktion Riemannscher Flächen mit vorgegebener Ordnung der erzeugenden Funktion. Math. Ann. **128**, 471—474 (1955). — [*5*] PÖSCHL, K.: Über die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen mit endlich vielen periodischen Enden. Math. Ann. **123**, 79—95 (1951). — [*6*] ULLRICH, E.: Zum Umkehrproblem der Wertverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. **1**, Nr. 9 (1936). — [*7*] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jahresber. dtsch. Math. Ver. **46**, 232—273 (1936). — [*8*] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wertverteilung. 9. Congr. Math. scand. Helsinki 1938, 179—200. — [*9*] WITTICH, H.: Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Math. Z. **45**, 642—668 (1939). — [*10*] WITTICH, H.: Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion. Math. Z. **51**, 1—16 (1947). — [*11*] WITTICH, H.: Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. **51**, 278—288 (1948). — [*12*] WITTICH, H.: Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Ann. **122**, 37—46 (1950).

Math. Inst., Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich (Schweiz).

(Eingegangen am 6. Dezember 1954.)

BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 99—110 (1955)

A problem concerning cluster sets of analytic functions.

By
F. BAGEMIHL and W. SEIDEL.

§ 1. The present paper is closely related to a recent paper[1]) of ours which we shall refer to in the sequel as "BP". We shall retain some of the notation and terminology employed in BP.

The general problem which we shall consider here arises in the following way. Let us suppose that $f(z)$ is a regular function in $|z|<1$. For every $e^{i\vartheta}$, denote by $C(\vartheta)$ the cluster set[2]) of $f(z)$ on the radius of $|z|<1$ terminating in $e^{i\vartheta}$. It is easy to show that $C(\vartheta)$ is a continuum[3]) in the extended complex plane (or on the RIEMANN sphere)[4]). *How can one characterize the set of continua* $\{C(\vartheta): 0\leq\vartheta\leq 2\pi\}$, *or the set of continua* $\{C(\vartheta):\vartheta\in M\}$, *where* M *is some perfect, nowhere dense subset of the interval* $0\leq\vartheta\leq 2\pi$, *or some* F_σ *of first category in this interval?*

In attempting to answer this question, it is natural to consider the subcontinua of the RIEMANN sphere as points of a suitable space. Let $\mathcal{X}$ denote the RIEMANN sphere. If a and b are points of $\mathcal{X}$, define the distance $\varrho(a, b)$ to be the ordinary Euclidean distance between a and b. With this metric, $\mathcal{X}$ is obviously a compact, metric space. Let $2^{\mathcal{X}}$ be the space of all closed, non-empty subsets of $\mathcal{X}$, and define[5]) the distance between two points, X and Y, of $2^{\mathcal{X}}$ as follows:

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \max\left(\sup_{x\in X}\varrho(x, Y), \sup_{y\in Y}\varrho(X, y)\right).$$

With this metric, $2^{\mathcal{X}}$ is a compact, metric space[6]). Consider the subspace, $\mathfrak{L}$, of $2^{\mathcal{X}}$, consisting of all subcontinua of $\mathcal{X}$. Since $\mathfrak{L}$ is closed in $2^{\mathcal{X}}$, $\mathfrak{L}$ is a compact, metric space[7]), and hence is also complete and separable[8]).

Returning now to the cluster set $C(\vartheta)$, we see that it may be regarded as a point in the space $\mathfrak{L}$; and, for any set, M, of points on the circumference

[1]) BAGEMIHL, F., u. W. SEIDEL: *Some boundary properties of analytic functions.* Math. Z. **61**, 186—199 (1954).

[2]) For a definition of this term, see, *e.g.*, BP, p. 186, footnote [1]).

[3]) A single point will (but the empty set will not) be regarded as a continuum and also as a locally connected continuum (for a definition of locally connected continuum, see, *e.g.*, HAUSDORFF, F.: *Mengenlehre*, 2. ed., pp. 150, 155. Berlin u. Leipzig 1927).

[4]) The proof of this fact appears incidentally in the proof of Theorem 1 below.

[5]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *Topologie II*. Warszawa-Wrocław, 1950, p. 20.

[6]) *Ibid.*, p. 21, I, 1.

[7]) *Ibid.*, p. 110, 4; p. 3, III, 1.

[8]) *Ibid.*, p. 2, 1; p. 3, II, 4.

$|z|=1$, the corresponding set $\{C(\vartheta): e^{i\vartheta} \in M\}$ is a set of points in the space $\mathfrak{L}$. We are going to show (see Theorem 1 and Remark 2) that if $f(z)$ is a continuous function in $|z|<1$, mapping $|z|<1$ into $\mathcal{X}$, and M is an analytic set on $|z|=1$, then $\{C(\vartheta): e^{i\vartheta} \in M\}$ is an analytic set in $\mathfrak{L}$. In Theorems 2 and 3, we prove, *e.g.*, that for some simple sets M there exist regular functions, $f(z)$, in $|z|<1$, such that the corresponding set $\{C(\vartheta): e^{i\vartheta} \in M\}$ is an analytic set, but not a BOREL set, in $\mathfrak{L}$. We conjecture that if A is a non-empty analytic set in $\mathfrak{L}$, then, if M is, *e.g.*, a perfect, nowhere dense subset of $|z|=1$, there exists a regular function $f(z)$ in $|z|<1$, for which $\{C(\vartheta): e^{i\vartheta} \in M\} = A$. We shall show (*cf.* Theorem 5) that this is true for a particular A, namely, the set of all locally connected subcontinua of $\mathcal{X}$; this set A is known[9]) to be an $F_{\sigma\delta}$ in $\mathfrak{L}$. Theorem 4 is our basic result in this direction, and Theorem 6 presents a condensation of the phenomenon described in Theorem 5.

§ 2. We shall assume, in what follows, that $0<R\leq+\infty$. Our results will usually be stated for $|z|<R$ instead of the unit circle, and for more general paths than radii, namely, for mb-paths[10]).

Theorem 1. *Let $\mathcal{T}=\{t_\tau: \tau \in E\}$ be a restricted tress*[11]) *in $|z|<R$, relative to E, $f(z)$ be a continuous mapping of $|z|<R$ into $\mathcal{X}$, and $C(\tau)$, for every $\tau \in E$, be the cluster set of $f(z)$ on t_τ. Then $\{C(\tau): \tau \in E\}$ is an analytic set in $\mathfrak{L}$.*

Proof. Let $0<r_1<r_2<\cdots<r_k<\cdots<R$ and $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = R$. For every $\tau \in E$ and every natural number k, denote by $A_k(\tau)$ the image, under $f(z)$, of the intersection of t_τ with the ring $r_k \leq |z| \leq r_{k+1}$; $A_k(\tau)$, as a locally connected subcontinuum[12]) of $\mathcal{X}$, is an element of $\mathfrak{L}$. It is a simple matter to verify that

$$C(\tau) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n(\tau)}, \quad (\tau \in E). \tag{1}$$

If j, k are natural numbers, and $\tau \in E$, let us set

$$B_{k,j}(\tau) = A_k(\tau) \cup A_{k+1}(\tau) \cup \cdots \cup A_{k+j}(\tau); \tag{2}$$

$B_{k,j}(\tau)$, as a locally connected subcontinuum[12]) of $\mathcal{X}$, is an element of $\mathfrak{L}$.

Suppose that $\tau \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$. Then it follows[13]) from BP, p. 195, Definition 2 and p. 186, Definition 1, as well as from the uniform continuity of $f(z)$ in the ring $r_k \leq |z| \leq r_{k+j}$, that $B_{k,j}(\tau)$, considered as a function of τ,

---

[9]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques.* Fundamenta Mathematicae **17**, 249—272 (1931), pp. 269—270.

[10]) For a definition of this term, see BP, p. 186.

[11]) See BP, p. 195, Definition 2.

[12]) That it is a locally connected continuum follows, *e.g.*, from HAUSDORFF, F.: *loc. cit.* [3]), pp. 207, 200.

[13]) Note HAUSDORFF, F.: *loc. cit.* [3]), p. 196, III.

mapping $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$ into $\mathfrak{L}$, is continuous for every j. Furthermore, it is evident that

$$B_{k,j}(\tau) \subseteqq B_{k,j+1}(\tau), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hence[14]), $\lim_{j\to\infty} B_{k,j}(\tau)$ exists—call it $B_k(\tau)$—and is[15]) an element of $\mathfrak{L}$; moreover[14]),

$$B_k(\tau) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}(\tau)}. \tag{3}$$

Since $B_k(\tau)$, regarded as a function of $\tau \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$, is the limit[16]) of a sequence of continuous functions, it is a function of BAIRE class ≤ 1 on $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$, and can be extended[17]) to a function, $B_k^*(\tau)$, of BAIRE class ≤ 1 on $|\tau| = 1$, and hence, in particular, on E.

Now let $\tau \in E$, and suppose that k is the smallest natural number for which $\tau \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$. From (2) and (3) we see that

$$B_m(\tau) \supseteqq B_{m+1}(\tau), \qquad (m = k,\ k+1,\ k+2, \ldots),$$

and hence[18]) $\lim_{m\to\infty} B_m(\tau)$ exists and is obviously the same as $\lim_{m\to\infty} B_m^*(\tau)$. If we bear in mind that $\overline{B_m(\tau)} = B_m(\tau)$ $(m = k, k+1, k+2, \ldots)$, and note (3), (2), and (1), it is clear that[18])

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} B_m^*(\tau) &= \bigcap_{m=k}^{\infty} B_m(\tau) \\ &= \bigcap_{m=k}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j(\tau)} \\ &= C(\tau). \end{aligned}$$

Thus[19]) $C(\tau) \in \mathfrak{L}$, and $C(\tau)$, regarded as a function of $\tau \in E$, is of BAIRE class ≤ 2, so that[20]) $\{C(\tau) : \tau \in E\}$ is an (absolute) analytic set, and the proof of our theorem is complete.

Remark 1. Theorem 1 holds, in particular, if $f(z)$ is regular or meromorphic in $|z| < R$.

Remark 2. If we consider the statement of the theorem referred to in footnote[20]), the proof of Theorem 1 shows that if we consider, instead of the tress $\mathcal{T}$, *e.g.*[21]) any set of radii in $|z| < R < +\infty$ terminating in an analytic set (in particular, the set $|z| = R$ itself) on $|z| = R$, then the set of cluster sets of $f(z)$ on these radii is an analytic set in $\mathfrak{L}$. (An analogous result is valid, of course, for $|z| < +\infty$.)

[14]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *Topologie I*, 2d ed., Warszawa-Wrocław, 1948, p. 245, 7.
[15]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [5]), p. 111, 6.
[16]) We make use here of KURATOWSKI, C.: *ibid.*, p. 21, 2.
[17]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [14]), p. 341.
[18]) *Ibid.*, p. 245, 8.
[19]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [5]), p. 110, 5.
[20]) See HAUSDORFF, F.: *loc. cit.* [3]), p. 269, XIII.
[21]) *Cf.* Remark 8 on p. 199 of BP.

§ 3. The next two theorems show that, in general, it is not possible to replace the phrase "an analytic set" in Theorem 1 by "a BOREL set".

Theorem 2. *Let* $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ *be a restricted tress*[11]) *in* $|z| < R$, *relative to* E, *where* E *is of power* $2^{\aleph_0}$. *Then there exists a regular function,* $f(z)$, *in* $|z| < R$, *such that, if* $C(\tau)$, *for every* $\tau \in E$, *is the cluster set of* $f(z)$ *on* t_τ, *then* $\{C(\tau) : \tau \in E\}$ *is an analytic set, but not a* BOREL *set, in* $\mathfrak{L}$.

Proof. Let[22]) A be an analytic subset of $\mathcal{X}$ which is not a BOREL set in $\mathcal{X}$. Then, according to BP, p. 198, Theorem 9, there exists a regular $f(z)$ in $|z| < R$, for which $\{C(\tau) : \tau \in E\} = A$. Since A is an absolute analytic set[23]), A is an analytic set in $\mathfrak{L}$. If A were a BOREL set in $\mathfrak{L}$, A would be an absolute BOREL set[24]), and hence also a BOREL set in $\mathcal{X}$, contradicting the definition of A. Therefore A is not a BOREL set in $\mathfrak{L}$.

Theorem 3. *There exists a regular function,* $f(z)$, *in* $|z| < R$, *such that, if* $C(\vartheta)$ *denotes the cluster set of* $f(z)$ *on the radius*[25]) $\arg z = \vartheta$ *in* $|z| < R$, *then* $\{C(\vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ *is an analytic set, but not a* BOREL *set, in* $\mathfrak{L}$.

Proof. Let V be a perfect, nowhere dense subset of the interval $0 \leq \vartheta \leq \pi$, and[22]) A be an analytic subset of $\mathcal{X}$ which is not a BOREL set in $\mathcal{X}$. Then, according to the sufficiency part of the proof of BP, p. 198, Theorem 10 (bear in mind BP, p. 193, Remark 3), there exists a regular $f(z)$ in $|z| < R$ for which $\{C(\vartheta) : \vartheta \in V\} = A$, whereas, for every ϑ satisfying $0 \leq \vartheta < 2\pi$ and $\vartheta \notin V$, $C(\vartheta) = \mathcal{X}$. Thus, in $\mathfrak{L}$, $\{C(\vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi\} = A \cup \{\mathcal{X}\}$, which is an absolute analytic set[26]). If it were a BOREL set in $\mathfrak{L}$, A would also be[27]) a BOREL set in $\mathfrak{L}$, and therefore, as an absolute BOREL set[24]), a BOREL set in $\mathcal{X}$, contradicting the definition of A. Consequently, $\{C(\vartheta) : 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ is not a BOREL set in $\mathfrak{L}$.

§ 4. **Theorem 4.** *Let* $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ *be a restricted tress*[11]) *in* $|z| < R$, *relative to* E, *satisfying the condition*[28]) *that it is possible to take the sets* E_n *in* (1) *of* BP *to be perfect, nowhere dense, and mutually exclusive. Then there exists a function* $f(z)$, *regular in* $|z| < R$, *possessing the following properties:*

(A) *For every* $\tau \in E$, *the cluster set of* $f(z)$ *on* t_τ *is a locally connected continuum in the extended complex plane.*

(B) *For every locally connected continuum* L *in the extended complex plane, there exist* $2^{\aleph_0}$ *elements* $\tau \in E$ *for which the cluster set of* $f(z)$ *on* t_τ *is* L.

---

[22]) For the existence of such a set A, see, *e.g.*, HAHN, H.: *Reelle Funktionen (Punktfunktionen)*, p. 353, 40.9.2. Leipzig 1932.

[23]) *Ibid.*, p. 346.

[24]) *Ibid.*, p. 269.

[25]) *Cf.* BP, p. 187, footnote [3]) and p. 199, Remark 8.

[26]) See HAHN, H.: *loc. cit.* [22]), p. 346, p. 343, 40.2.4.

[27]) *Ibid.*, p. 266, 33.4.42.

[28]) *E.g.*, the tresses in Examples 1 to 4 on p. 187 of BP, if E there is taken to be the union of enumerably many perfect, nowhere dense, mutually exclusive sets, satisfy this condition.

Proof. We shall first prove the theorem under the assumption that $0<R<+\infty$; there is then no loss of generality in assuming that $R=1$.

According to Theorem 1 on p. 187 of BP, it is sufficient to show that there exists a finite, complex-valued, continuous function $g(z)$ in $|z|<1$, possessing the properties asserted for $f(z)$ in (A) and (B). The construction of $g(z)$ will be based on the following lemma.

Lemma 1. *There exists a complex-valued function $F(x,t)$, defined for $0\leq x\leq 1$ and $0\leq t\leq 1$, continuous in x for every t, with $\Re F(x,t)$ and $\Im F(x,t)$ lower semi-continuous in the two variables x, t and satisfying the relations $0\leq \Re F(x,t)\leq 1$ and $0\leq \Im F(x,t)\leq 1$, such that, given any continuous function $u(x)+iv(x)$, with $0<u(x)<1$ and $0<v(x)<1$, there exist $2^{\aleph_0}$ numbers t' in the interval $0\leq t\leq 1$, with the property that $F(x,t')=u(x)+iv(x)$ for $0\leq x\leq 1$.*

This lemma is a modification of a theorem due to KANTOROVITCH[29]). The only essential change in his proof that is required is the following. The set of all real polynomials in x with rational coefficients, and assuming only values in the open interval $(0,1)$ for all x satisfying $0\leq x\leq 1$, is enumerable, and consequently these polynomials can be numbered to form a sequence

$$Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_k(x), \ldots.$$

Now, for every ordered pair (p,q) of natural numbers p and q, let $P_n(x)=Q_p(x)+iQ_q(x)$, where $n=\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+p$, and use the sequence $\{P_n(x)\}$ thus defined in place of KANTOROVITCH's sequence $\{P_n(x)\}$. To verify that there exist $2^{\aleph_0}$ numbers t' satisfying the conclusion of our lemma, observe that if $u(x)+iv(x)$ is a given continuous function, then there exists an infinite increasing sequence, $\{n_k\}$, of natural numbers, such that $F(x,t')=u(x)+iv(x)$ $(0\leq x\leq 1)$, where

$$t'=\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\cdots+\frac{1|}{|n_k}+\cdots.$$

Such a sequence $\{n_k\}$ has $2^{\aleph_0}$ distinct proper infinite subsequences $\{n_{k_j}\}$ different from $\{n_k\}$ and all giving rise to distinct numbers

$$t''=\frac{1|}{|n_{k_1}}+\frac{1|}{|n_{k_2}}+\cdots+\frac{1|}{|n_{k_j}}+\cdots\neq t',$$

for which $F(x,t'')=u(x)+iv(x)$ $(0\leq x\leq 1)$.

In order to define $g(z)$, we first have to construct some auxiliary functions.

Let $F(x,t)$ be as in Lemma 1. Then, because of the lower semi-continuity of $\Re F(x,t)$ and $\Im F(x,t)$, there exists[30]) a sequence of functions $H_1(x,t)$, $H_2(x,t), \ldots, H_n(x,t), \ldots$ $(0\leq x\leq 1,\ 0\leq t\leq 1)$, each of which is continuous in

[29]) KANTOROVITCH, L.: *Un exemple d'une fonction semicontinue, universelle pour les fonctions continues.* Fundamenta Mathematicae **18**, 178—181 (1932).

[30]) *Cf.* HAHN, H.: *Theorie der reellen Funktionen*, p. 162. Berlin 1921.

the two variables x, t and satisfies $0 \leq \Re H_n(x,t) \leq 1$, $0 \leq \Im H_n(x,t) \leq 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, such that

$$\lim_{n\to\infty} \Re H_n(x,t) = \Re F(x,t), \qquad \lim_{n\to\infty} \Im H_n(x,t) = \Im F(x,t), \tag{4}$$

where these limits are approached in a monotonically non-decreasing fashion for every x and t. Let $0 = \varrho_1 < \sigma_1 < \varrho_2 < \sigma_2 < \cdots < \varrho_n < \sigma_n < \cdots < 1$, and $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 1$. For every natural number n and every t with $0 \leq t \leq 1$, we define

$$h(x,t) = \begin{cases} H_n\left(\frac{2\varrho_{n+1}}{\sigma_n - \varrho_n}(x - \varrho_n), t\right), & \left(\varrho_n \leq x \leq \frac{\varrho_n + \sigma_n}{2}\right); \quad (5) \\ H_n\left(\frac{2\varrho_{n+1}}{\varrho_n - \sigma_n}(x - \sigma_n), t\right), & \left(\frac{\varrho_n + \sigma_n}{2} \leq x \leq \sigma_n\right); \\ \frac{(\varrho_{n+1} - x) H_n(0,t) + (x - \sigma_n) H_{n+1}(0,t)}{\varrho_{n+1} - \sigma_n} & (\sigma_n \leq x \leq \varrho_{n+1}). \quad (6) \end{cases}$$

The function $h(x,t)$ is thus defined for $0 \leq x < 1$ and $0 \leq t \leq 1$, and is continuous in the two variables x, t; furthermore, we have $0 \leq \Re h(x,t) \leq 1$ and $0 \leq \Im h(x,t) \leq 1$. For these same values of x and t, define

$$h_1(x,t) = 2h(x,t) - 1, \tag{7}$$

and, for every natural number $m > 1$,

$$h_m(x,t) = m \cdot h_1(x,t). \tag{8}$$

Let $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ be those (finite) complex numbers whose real and imaginary parts are both rational, and form the functions

$$h_{m,n}(x,t) = \frac{1}{h_m(x,t)} + \zeta_n, \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 \leq x < 1,\ 0 \leq t \leq 1). \tag{9}$$

The enumerably many functions (9) together with the functions $h_m(x,t)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ can be numbered to form a sequence

$$g_2(x,t), g_3(x,t), \ldots, g_n(x,t), \ldots . \tag{10}$$

These complex-valued functions (which may assume the value ∞) are defined and continuous in the two variables x, t for $0 \leq x < 1$ and $0 \leq t \leq 1$.

Take $g_1(x,0)$ to be a continuous function of x $(0 \leq x < 1)$ mapping every interval $\varrho_n \leq x \leq \varrho_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ onto the extended complex plane in such a manner[31]) that $g_1(\varrho_n, 0) = g_1(\varrho_{n+1}, 0) = 0$. For every pair of numbers x, t satisfying $0 \leq x < 1$, $0 < t \leq 1$, set $g_1(x,t) = g_1(x,0)$. The function $g_1(x,t)$ is thus defined and continuous in the two variables x, t for $0 \leq x < 1$ and $0 \leq t \leq 1$.

[31]) The existence of such a function is a simple consequence of the HAHN-MAZURKIEWICZ theorem; *cf.* HAHN, H.: *loc. cit.* [22]), p. 165, 23.5.4.

Now consider the tress $\mathcal{T}$. For every $\tau \in E$ and every r satisfying $0<r<1$, let $z_{\tau,r}$ be the unique point of modulus r on t_τ. Take $0<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots<1$ such that $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$, define $M_n = \{z_{\tau,r} : \tau \in E_n,\ r_n \leq r < 1\}$ for every natural number n, and put $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. From our hypothesis concerning $\mathcal{T}$, and Definition 1 on p. 186 of BP, it follows that M is closed relative to $|z|<1$, and that if $n_1 \neq n_2$, then, for every r with $\max(r_{n_1}, r_{n_2}) \leq r < 1$, the sets[32] $D_r \cap M_{n_1}$ and $D_r \cap M_{n_2}$ are a positive distance apart.

On M we define a function $g_M^*(z)$ as follows. For every natural number n, take[33] $\xi_n(\tau)$ to be a continuous mapping of E_n onto the interval $0 \leq t \leq 1$. For every $z_{\tau,r} \in M$, let

$$g_M^*(z_{\tau,r}) = g_n\left(\frac{r - r_n}{1 - r_n}, \xi_n(\tau)\right), \tag{11}$$

where n is the unique natural number satisfying $\tau \in E_n$. If we bear in mind the last remark in the preceding paragraph, and Definition 2, (iii) on p. 196 of BP, we see that $g_M^*(z)$ is a continuous function on M.

The function $g_M^*(z)$, however, is not finite for every $z \in M$, and we are therefore going to truncate it by means of the function $1/(1-|z|)$. The frontier, B, of the set S of points $z \in M$ satisfying $|g_M^*(z)| \leq 1/(1-|z|)$ is obviously non-empty and closed relative to M. As is seen from the definition of dimension[34], every T_n in Definition 1, (ii) on p. 187 of BP is of dimension 1, and hence[35] $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ is of dimension 1, so that its subset B is of dimension ≤ 1. The function $e^{i \arg g_M^*(z)}$ is well-defined, single-valued, continuous, and of modulus 1 on B, and consequently[36] can be extended to a function $\gamma(z)$ possessing the same properties on M. For every $z \in M$, set

$$g_M(z) = \begin{cases} g_M^*(z) & \text{if} \quad z \in S, \\ \dfrac{1}{1-|z|}\gamma(z) & \text{if} \quad z \in M - S. \end{cases} \tag{12}$$

It is clear that $g_M(z)$ is finite and continuous on M, so that, according to TIETZE's theorem[37], it can be extended to a finite continuous function $g(z)$ in $|z|<1$.

For every $\tau \in E$, it is evident that the cluster set of $g(z)$ on t_τ is the same as that of $g_M(z)$, and it follows from (12) that the cluster set of $g_M(z)$ on t_τ is the same as that of $g_M^*(z)$. To complete the proof of the theorem, it therefore suffices to show that assertions (A) and (B) hold when we replace $f(z)$ in them by $g_M^*(z)$.

---

[32]) We recall from BP that D_r is the disk $|z| \leq r$.
[33]) *Cf.* HAHN, H.: *ibid.*, p. 161.
[34]) See, *e.g.*, KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [14]), p. 162.
[35]) *Ibid.*, p. 177, Corollary 1.
[36]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.* [8]), p. 271, VI, 2.
[37]) *Cf.* HAHN, H.: *loc. cit.* [22]), p. 255, 32.4.131.

Let $\tau \in E$. Then there is a unique natural number n satisfying $\tau \in E_n$. If we set $t' = \xi_n(\tau)$, then it is obvious from (11) that the cluster set of $g_M^*(z)$ on t_τ is identical with the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$. Conversely, given a natural number n, and a number t' satisfying $0 \leq t' \leq 1$, there is at least one $\tau \in E_n$ such that $\xi_n(\tau) = t'$, and the cluster sets of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$, and $g_M^*(z)$ on t_τ, again coincide. Our problem is thus reduced to showing two things: 1) Given an arbitrary locally connected continuum L in the extended complex plane, there exists a natural number n and $2^{\aleph_0}$ numbers t' satisfying $0 \leq t' \leq 1$, such that the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$ is L. 2) For every natural number n and every t' satisfying $0 \leq t' \leq 1$, the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$ is a locally connected continuum in the extended complex plane.

Let us first prove 1). In case L is the extended complex plane, it is obvious from the definition of $g_1(x, t)$, that, for every t' satisfying $0 \leq t' \leq 1$, the cluster set of $g_1(x, t')$ as $x \to 1$ is L. Suppose, however, that L is not the extended complex plane. If L does not contain the point ∞, then there exists a natural number m such that L lies inside the square

$$-m < \Re w < +m, \qquad -m < \Im w < +m. \tag{13}$$

Let $\Lambda(x)$ be a continuous function defined for $0 \leq x \leq 1$ and mapping[31]) this interval onto L in such a manner that $\Lambda(0) = \Lambda(1)$. Then

$$u(x) + i\,v(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda(x)}{m} + 1\right) \tag{14}$$

is a continuous function satisfying $0 < u(x) < 1$, $0 < v(x) < 1$, $(0 \leq x \leq 1)$. Let t' be any one of the $2^{\aleph_0}$ numbers in the interval $0 \leq t \leq 1$, for which

$$F(x, t') = u(x) + i\,v(x), \qquad (0 \leq x \leq 1). \tag{15}$$

We shall show that L is the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$.

To this end, suppose, first, that $w_0 \in L$. Then there exists an x' such that

$$\Lambda(x') = w_0, \tag{16}$$

and, since $\Lambda(1) = \Lambda(0)$, we may assume that $0 \leq x' < 1$. Let n' be the smallest natural number such that $x' < \varrho_{n'+1}$, and, for every natural number $n \geq n'$, set $x_n = \frac{\sigma_n - \varrho_n}{2\varrho_{n+1}}\, x' + \varrho_n$. Then, for every $n \geq n'$, we have $\varrho_n \leq x_n < \frac{1}{2}(\varrho_n + \sigma_n)$, so that, according to (8), (7), and (5),

$$h_m(x_n, t') = m \cdot [2h(x_n, t') - 1] = m \cdot [2H_n(x', t') - 1]. \tag{17}$$

It follows from (17), (4), (15), (14), and (16), that

$$\lim_{n \to \infty} h_m(x_n, t') = w_0, \tag{18}$$

which means that w_0 belongs to the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$.

Now suppose, conversely, that w_0 belongs to the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$. Then there exists an increasing sequence $\{x_n\}$, with $0 < x_n < 1$ and $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, for which (18) holds. We consider three cases in order to show that $w_0 \in L$. If, for infinitely many n, there is a j_n such that $\sigma_{j_n} \leq x_n \leq \varrho_{j_n+1}$, then it follows from (18), (8), (7), (6), (4), (15), and (14), that $w_0 = \Lambda(0) \in L$. If there is an infinite subsequence, $\{n_k\}$, of $\{n\}$ such that, for every k, there is a j_k satisfying

$$\varrho_{j_k} < x_{n_k} \leq \tfrac{1}{2}(\varrho_{j_k} + \sigma_{j_k}), \tag{19}$$

let us set

$$x'_k = \frac{2\varrho_{j_k+1}}{\sigma_{j_k} - \varrho_{j_k}} (x_{n_k} - \varrho_{j_k}), \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{20}$$

According to (19) and (20), we have $0 < x'_k < 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. The sequence $\{x'_k\}$ has at least one limit point, say x', in the interval $0 \leq x \leq 1$, and we may assume, without loss of generality, that

$$\lim_{k\to\infty} x'_k = x'. \tag{21}$$

If we observe that the sequences $\{\Re H_n(x, t')\}$ and $\{\Im H_n(x, t')\}$ are continuously convergent[38]) at $x = x'$, then it follows from (18), (8), (7), (20), (5), (21), (4), (15), and (14), that

$$\begin{aligned} w_0 = \lim_{k\to\infty} h_m(x_{n_k}, t') &= \lim_{k\to\infty} m \cdot [2H_{j_k}(x'_k, t') - 1] \\ &= m \cdot [2F(x', t') - 1] = \Lambda(x') \in L. \end{aligned}$$

Finally, the case in which there is an infinite subsequence, $\{n_k\}$, of $\{n\}$ such that, for every k, there is a j_k satisfying $\frac{1}{2}(\varrho_{j_k} + \sigma_{j_k}) \leq x_{n_k} < \sigma_{j_k}$, is handled like the preceding case, and the three cases considered exhaust all possibilities. Hence, $w_0 \in L$.

This completes the proof of 1) in case L either is the extended complex plane or does not contain the point ∞, if we recall the definition of the sequence (10).

Suppose, however, that L is not the extended complex plane but does contain the point ∞. Then there exists a point ζ_n (*cf.* (9)) and a natural number m such that L lies in the exterior of the circle $|w - \zeta_n| = 1/m$. Hence, the set

$$L^* = \left\{ \frac{1}{w - \zeta_n} : w \in L \right\} \tag{22}$$

is a locally connected continuum lying inside the square (13). We have already shown that there exist $2^{\aleph_0}$ numbers t' in the interval $0 \leq t \leq 1$ such that the cluster set of $h_m(x, t')$ as $x \to 1$ is L^*; hence, according to (22) and (9), the cluster set of $h_{m,n}(x, t')$ as $x \to 1$ is L. In view of the definition of (10), the proof of 1) is now complete.

[38]) *Cf.* HAHN, H.: *loc. cit.* [30]), p. 244, Theorem XI.

It is evident from the proof of 1), that for every natural number n and every t' satisfying $0 \leq t' \leq 1$, the cluster set of $g_n(x, t')$ as $x \to 1$ is the set of values in the extended complex plane, of some continuous function defined for $0 \leq x \leq 1$, and thus the truth of 2) follows from the HAHN-MAZURKIEWICZ theorem[31]).

This completes the proof of Theorem 4 in case R is finite. If $R = +\infty$, the only essential modification of the proof that is required is a replacement of the $\frac{1}{1-|z|}$-truncation (12) by a corresponding $|z|$-truncation.

§ 5. The next theorem shows that, although E in Theorem 4 is an F_σ, for certain kinds of tresses[32]), *e.g.*, those composed of radii, E may be taken to be an arbitrary perfect, nowhere dense set.

Theorem 5. *Let E^* be a perfect, nowhere dense subset of the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, and possessing the following properties*:

(a) *For every $\vartheta \in E^*$, the cluster set of $f(r e^{i\vartheta})$ as $r \to R$ is a locally connected continuum in the extended complex plane.*

(b) *For every locally connected continuum L in the extended complex plane, there exist $2^{\aleph_0}$ elements $\vartheta \in E^*$ for which the cluster set of $f(r e^{i\vartheta})$ as $r \to R$ is L.*

Proof. Let ϑ_0 be the smallest number belonging to E^*, and let $2\pi = \vartheta_1 > \vartheta_2 > \cdots > \vartheta_k > \cdots > \vartheta_0$, where $\lim_{k\to\infty} \vartheta_k = \vartheta_0$, for every natural number $k > 1$, $\vartheta_k \notin E^*$, and, for every natural number k, $E^* \cap I_k \neq 0$, I_k being the interval $\vartheta_k \geq \vartheta \geq \vartheta_{k+1}$. If we take

$$E_1^* = \{\vartheta_0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E^* \cap I_{2k-1}) \quad \text{and} \quad E_{n+1}^* = E^* \cap I_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

then $E_1^*, E_2^*, E_3^*, \ldots$ are mutually exclusive, perfect, nowhere dense sets whose union is E^*. Let $E = \{e^{i\vartheta} : \vartheta \in E^*\}$. For every number $\tau \in E$, put $t_\tau = \{r\tau : 0 \leq r < R\}$. An application of Theorem 4 to the tress $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ now completes the proof of Theorem 5.

By employing a device used in the proof of Theorem 3 on p. 193 of BP, one readily obtains an $f(z)$ possessing the additional property that, for every ϑ in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ and satisfying the condition $\vartheta \notin E^*$, the cluster set of $f(r e^{i\vartheta})$ as $r \to R$ is the extended complex plane. Thus we have

Corollary 1. *Theorem 5 remains valid if E^* is replaced in property* (a) *by the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.*

§ 6. The phenomenon described in Theorem 5 can be made to occur in every sector of $|z| < R$ with vertex at the origin, as is seen from

Theorem 6[33]). *Suppose that $0 \leq \mu \leq 2\pi$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, and a subset E [independent of $f(z)$] of the unit circle $|\tau| = 1$,*

[33]) Remark 8 on p. 199 of BP obviously applies to Theorems 5 and 6 of the present paper.

where E is an F_σ of first category and measure μ, possessing the following properties:

(α) *For every $\tau \in E$, the cluster set of $f(r\tau)$ as $r \to R$ is a locally connected continuum in the extended complex plane.*

(β) *For every locally connected continuum L in the extended complex plane, there exist $2^{\aleph_0}$ elements $\tau \in E$ on every subarc of $|\tau| = 1$, such that the cluster set of $f(r\tau)$ as $r \to R$ is L.*

Proof. As will be seen from the proof, there is no loss of generality in assuming that $R = 1$. We shall first construct a subset E of $|\tau| = 1$ such that E has measure μ and is the union of mutually exclusive, perfect, nowhere dense sets $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ with the property that every subarc of $|\tau| = 1$ contains at least one of these sets. If $\mu > 0$, let $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots < \mu$ and $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \mu$; if $\mu = 0$, let $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Take a perfect, nowhere dense subset, P_1, of $|\tau| = 1$, with meas $P_1 = \lambda_1$. On each of the complementary open arcs of $|\tau| = 1$ determined by P_1, take a perfect, nowhere dense set containing the midpoint of this arc, such that the sum of the measures of these sets, call them $P_1^2, P_2^2, \ldots, P_j^2, \ldots$, is $\lambda_2 - \lambda_1$. Now the set $P_2 = P_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^2\right)$ is evidently perfect and nowhere dense; again, on each of the complementary open arcs determined by it, take a perfect, nowhere dense set containing the midpoint of this arc, such that the sum of the measures of these sets, call them $P_1^3, P_2^3, \ldots, P_j^3, \ldots$, is $\lambda_3 - \lambda_2$. Repeat the argument with the perfect, nowhere dense set $P_3 = P_2 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^3\right)$. Continuing in this manner indefinitely, we obtain, in addition to the original set P_1, an infinite double sequence of perfect, nowhere dense sets $\{P_j^k\}$; all these sets are mutually exclusive, and may be arranged in a simple infinite sequence, say $E_1 (= P_1), E_2, \ldots, E_m, \ldots$. Let $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Then meas $E = \lambda_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \mu$. Since, for every $k > 1$, the length of every one of the complementary open arcs determined by P_k is at most one half the greatest of the lengths of the complementary open arcs determined by P_{k-1}, the set E is everywhere dense on $|\tau| = 1$, and consequently every subarc of $|\tau| = 1$ contains at least one of the sets E_m[40]).

According to the proof of Theorem 5, for every natural number m, there exist mutually exclusive, perfect, nowhere dense sets $E_1^m, E_2^m, \ldots, E_n^m, \ldots$ such that $E_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$. Take $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m < \cdots < 1$ such that $\lim_{m \to \infty} s_m = 1$. For every pair of natural numbers m, n, define $M_n^m = \{r\tau : s_{m+n} \leq r < 1, \tau \in E_n^m\}$, $M_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^m$, and $M^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$. For every natural number m, identify the

[40]) The foregoing construction shows that the set M in Theorem 11 on p. 198 of BP can be taken so as to have any prescribed measure μ with $0 \leq \mu \leq 2\pi$.

sets M_m, M_n^m, and the numbers $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_{m+n}, \ldots$ with the sets M, M_n, and the numbers $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, respectively, in the proof of Theorem 4, to obtain a continuous function $g_{M_m}(z)$ on M_m possessing the properties of the function $g_M(z)$ in the proof of Theorem 4. Since, for every m, the set M_m has no points in the circle $|z| < s_{m+1}$, the function $g_{M^*}(z)$ defined on M^* so as to coincide with $g_{M_m}(z)$ on M_m for every m, is evidently continuous on the set M^*, which is closed relative to $|z| < 1$, and so, by TIETZE's theorem, $g_{M^*}(z)$ can be extended to a continuous function $g(z)$ in $|z| < 1$. The proof of Theorem 6 can now be completed after the manner of the proof of Theorem 4.

The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (U.S.A.).

Dept. of Math., University of Notre Dame, Notre Dame, Ind. (U.S.A.).

(Eingegangen am 14. Dezember 1954.)

DOLD, A.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 111—136 (1955)

Über fasernweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen.

Von
ALBRECHT DOLD.

Einleitung.

Zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$ (zur Definition s. STEENROD [8] [1])) über der gleichen Basis X heißen fasernweise homotopieäquivalent (vgl. THOM [9], S. 164), wenn es stetige Abbildungen $h_1 : B_1 \to B_2$ und $h_2 : B_2 \to B_1$ gibt, die für jedes $x \in X$ die Faser über x in die Faser über x abbilden [d.h. $h_1(p_1^{-1}(x)) \subset p_2^{-1}(x)$ und $h_2(p_2^{-1}(x)) \subset p_1^{-1}(x)$; sog. fasernweise Abbildungen] und die die Eigenschaft haben, daß die zusammengesetzten Abbildungen $h_2 \circ h_1$ und $h_1 \circ h_2$ durch fasernweise Deformationen in die Identität von B_1 resp. B_2 übergeführt werden können. Dabei ist eine fasernweise Deformation eine solche, bei der jeder Punkt nur innerhalb seiner Faser sich bewegen darf.

Es wird der Satz bewiesen (§ 2), daß zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$, X ein zusammenhängendes Polyeder, Y_i lokal kompakt, schon dann fasernweise homotopieäquivalent sind, wenn es eine fasernweise Abbildung $h : B_1 \to B_2$ gibt, deren Einschränkung auf eine Faser eine (gewöhnliche) Homotopieäquivalenz zwischen Bild- und Urbildfaser ist. Beim Beweis und auch bei den Anwendungen dieses Satzes in § 3 spielen die in § 1 untersuchten Abbildungsräume $\mathfrak{G}(Y_i, Y_k)$, $i, k = 1, 2$, eine Rolle; $\mathfrak{G}(Y_i, Y_k)$ bezeichnet die mit der „kompakt-offenen" Topologie versehene Menge der stetigen Abbildungen von Y_i in Y_k.

Der dritte Paragraph enthält eine Klassifikation der Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$, Y lokal kompakt, S^m die m-Sphäre, bezüglich der fasernweisen Homotopieäquivalenz, die der auf FELDBAU zurückgehenden, in [8], § 18 dargestellten Klassifikation dieser Faserräume bezüglich der gewöhnlichen Äquivalenz entspricht. Genauer gesagt handelt es sich beide Male nur um eine Zurückführung des Klassifikationsproblems auf die Berechnung gewisser Homotopiegruppen.

Unter Benutzung der Ergebnisse von J. P. SERRE [6] über die Gruppen $\pi_m(S^n)$ werden im Falle $Y = S^n$, $G = O_{n+1}$ = Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n, die in Frage kommenden Homotopiegruppen teilweise berechnet. Damit ergibt sich:

Eine volle Klasse fasernweise homotopieäquivalenter Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ enthält genau dann unendlich viele paarweise nicht

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

äquivalente Faserräume, wenn $m \equiv 0(4)$ und $n > \frac{m}{2}$ ist. Für $m \leq 3$ oder $n \leq 2$ ist fasernweise Homotopieäquivalenz gleichbedeutend mit Äquivalenz.

Insbesondere ist damit die von R. THOM ([9], S. 167) gestellte Frage beantwortet, ob es Faserräume mit Faser S^n und Strukturgruppe O_{n+1} gibt, die fasernweise homotopieäquivalent, aber nicht äquivalent sind.

§ 1. Eigenschaften von Abbildungsräumen.

Es werden in diesem Paragraphen gewisse Abbildungsräume untersucht, die im folgenden eine Rolle spielen. Dabei setzen wir diejenigen topologischen Räume, die mit lateinischen Buchstaben bezeichnet sind, als lokal kompakt (insbesondere Hausdorffsch) voraus. Diese Voraussetzung ist mitunter schärfer als nötig; sie vereinfacht jedoch die Darstellung und ist für die wichtigsten Ergebnisse wesentlich.

A. Es seien Y und Z topologische Räume. Die Menge der stetigen Abbildungen von Y in Z werde mit der „kompakt-offenen" Topologie versehen (Topologie der kompakten Konvergenz bei BOURBAKI [2], § 2, Def. 1). Dadurch entstehe der topologische Raum $\mathfrak{G}(Y, Z)$. Ist $g \in \mathfrak{G}(Y, Z)$ und $y \in Y$, so bezeichnet $g \cdot y$ das Bild von y bei g.

B. Der Abbildungsraum $\mathfrak{G}(Y, Z)$ besitzt folgende Eigenschaft (s. [2], § 2, Prop. 9):

Es sei $\mathfrak{X}$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\tilde{f}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}(Y, Z)$ ist genau dann stetig, wenn durch $f(\xi, y) = \tilde{f}(\xi) \cdot y$, $\xi \in \mathfrak{X}$, $y \in Y$ eine stetige Abbildung $f: \mathfrak{X} \times Y \to Z$ definiert wird.

Hieraus folgt: Die Zuordnung $\tilde{f} \to f$ definiert eine eineindeutige Beziehung zwischen den stetigen Abbildungen $\mathfrak{X} \to \mathfrak{G}(Y, Z)$ und den stetigen Abbildungen $\mathfrak{X} \times Y \to Z$.

C. Y und Z seien topologische Räume, $g_k: Y \to Z$, $k = 0, 1$, stetige Abbildungen. g_0 und g_1 sind genau dann homotop, wenn sie sich in $\mathfrak{G}(Y, Z)$ durch einen Weg verbinden lassen.

Beweis. Es sei $I = [0, 1]$ das abgeschlossene reelle Einheitsintervall. Daß sich g_0 und g_1 in $\mathfrak{G}(Y, Z)$ durch einen Weg verbinden lassen, bedeutet, daß es eine stetige Abbildung $\tilde{f}: I \to \mathfrak{G}(Y, Z)$ mit $\tilde{f}(0) = g_0$, $\tilde{f}(1) = g_1$ gibt. Dies ist nach B gleichwertig mit der Existenz einer stetigen Abbildung $f: I \times Y \to Z$ mit $f(0, y) = g_0 \cdot y$, $f(1, y) = g_1 \cdot y$, $y \in Y$. Dies wiederum bedeutet, daß g_0 und g_1 homotop sind.

D. Y, Z, W seien topologische Räume, $g \in \mathfrak{G}(Y, Z)$, $g' \in \mathfrak{G}(Z, W)$ (s. A). Die Abbildung $g' \circ g$ [2]) ist stetig, also ein Element von $\mathfrak{G}(Y, W)$. Es gilt (s. [2], § 2, Prop. 10):

Die Abbildung $(g', g) \to g' \circ g$ von $\mathfrak{G}(Z, W) \times \mathfrak{G}(Y, Z)$ in $\mathfrak{G}(Y, W)$ ist stetig. Ist insbesondere $Y = Z = W$, so ist durch $(g', g) \to g' \circ g$ eine stetige, assoziative Multiplikation in $\mathfrak{G}(Y, Y)$ gegeben. Die identische Selbstabbildung von Y — wir bezeichnen sie mit e — ist Einselement bezüglich dieser Multiplikation.

[2]) Sind $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{N}$ Mengen, $\lambda: \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$, $\mu: \mathfrak{M}' \to \mathfrak{N}$ Abbildungen und $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}'$, dann bezeichnet $\mu \circ \lambda: \mathfrak{L} \to \mathfrak{N}$ die zusammengesetzte Abbildung $l \to \mu(\lambda(l))$, $l \in \mathfrak{L}$.

E. $\mathfrak{X}, Y, Z, W$ seien topologische Räume, $\mathfrak{g}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Y,Z)$ (s. A) und $\mathfrak{g}':\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Z,W)$ stetige Abbildungen. Wir definieren $\mathfrak{g}'\circledcirc\mathfrak{g}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Y,W)$ durch

$$(\mathfrak{g}'\circledcirc\mathfrak{g})(\mathfrak{x})=\mathfrak{g}'(\mathfrak{x})\circ\mathfrak{g}(\mathfrak{x}),\quad \mathfrak{x}\in\mathfrak{X}. \tag{1}$$

Die Abbildung $\mathfrak{g}'\circledcirc\mathfrak{g}$ ist stetig, denn man kann sie durch Zusammensetzen zweier stetiger Abbildungen erhalten:

$$\mathfrak{x}\to\big(\mathfrak{g}'(\mathfrak{x}),\mathfrak{g}(\mathfrak{x})\big)\to\mathfrak{g}'(\mathfrak{x})\circ\mathfrak{g}(\mathfrak{x}),\quad \text{(s. D)}.$$

F. Mit den Bezeichnungen von E seien $\mathfrak{g}_k:\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Y,Z)$, $\mathfrak{g}_k':\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Z,W)$, $k=0,1$, stetige Abbildungen und $\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{g}_1$ [3]), $\mathfrak{g}_0'\simeq\mathfrak{g}_1'$. Dann ist auch $\mathfrak{g}_0'\circledcirc\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{g}_1'\circledcirc\mathfrak{g}_1$. Bezeichnen wir allgemein die Homotopieklasse einer stetigen Abbildung f mit $[f]$, so können wir also das $\circledcirc$-Produkt von $[\mathfrak{g}_0']$ mit $[\mathfrak{g}_0]$ durch $[\mathfrak{g}_0']\circledcirc[\mathfrak{g}_0]=[\mathfrak{g}_0'\circledcirc\mathfrak{g}_0]$ in eindeutiger Weise definieren.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen $\mathfrak{g}:\mathfrak{X}\times I\to\mathfrak{G}(Y,Z)$ und $\mathfrak{g}':\mathfrak{X}\times I\to\mathfrak{G}(Z,W)$ $(I=[0,1])$ mit

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x},0)=\mathfrak{g}_0(\mathfrak{x}),\quad \mathfrak{g}(\mathfrak{x},1)=\mathfrak{g}_1(\mathfrak{x}),$$

$$\mathfrak{g}'(\mathfrak{x},0)=\mathfrak{g}_0'(\mathfrak{x}),\quad \mathfrak{g}'(\mathfrak{x},1)=\mathfrak{g}_1'(\mathfrak{x}),\quad \mathfrak{x}\in\mathfrak{X}.$$

Wir bilden

$$\mathfrak{g}'\circledcirc\mathfrak{g}:\mathfrak{X}\times I\to\mathfrak{G}(Y,W)\quad \text{(s. E)}.$$

Für $\mathfrak{x}\in\mathfrak{X}$ ist

$$\mathfrak{g}'\circledcirc\mathfrak{g}(\mathfrak{x},0)=\mathfrak{g}'(\mathfrak{x},0)\circ\mathfrak{g}(\mathfrak{x},0)=\mathfrak{g}_0'(\mathfrak{x})\circ\mathfrak{g}_0(\mathfrak{x})=\mathfrak{g}_0'\circledcirc\mathfrak{g}_0(\mathfrak{x}).$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{g}'\circledcirc\mathfrak{g}(\mathfrak{x},1)=\mathfrak{g}_1'\circledcirc\mathfrak{g}_1(\mathfrak{x}),\quad \text{also}\quad \mathfrak{g}_0'\circledcirc\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{g}_1'\circledcirc\mathfrak{g}_1.$$

G. $\mathfrak{X}_0$ sei ein Teilraum des topologischen Raumes $\mathfrak{X}$. Die Menge der stetigen Abbildungen $\mathfrak{g}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Y,Y)$ (s. A), bei welchen ganz $\mathfrak{X}_0$ in e (s. D) übergeht, ist abgeschlossen bezüglich der $\circledcirc$-Multiplikation [d.h. wenn $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ solche Abbildungen sind, dann auch $\mathfrak{g}'\circledcirc\mathfrak{g}$; dies folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (1)].

Wie in F erhalten wir eine $\circledcirc$-Multiplikation der Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $\mathfrak{g}:(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_0)\to\big(\mathfrak{G}(Y,Y),e\big)$ [4]). Bei der Bildung dieser Homotopieklassen werden wie üblich nur solche Deformationen zugelassen, die das Bild von $\mathfrak{X}_0$ festlassen.

Insbesondere betrachten wir den Fall, daß $\mathfrak{X}$ ein n-dimensionaler Würfel $(n>0)$, $\mathfrak{X}_0$ sein Rand, oder auch, daß $\mathfrak{X}$ eine n-Sphäre und $\mathfrak{X}_0$ ein fest gewählter Punkt darin ist. Die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $\mathfrak{g}:(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_0)\to\big(\mathfrak{G}(Y,Y),e\big)$ bilden dann die Homotopiegruppe $\pi_n\big(\mathfrak{G}(Y,Y),e\big)$ (s. [8], § 15). Über diese Gruppen beweist man fast wörtlich wie bei STEENROD ([8], 16.7 bis 16.9) den folgenden

Hilfssatz 1. *Es sei Y ein lokal kompakter topologischer Raum, $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(Y,Y)$* (s. A), *$\pi_n(\mathfrak{G},e)$ die n-te Homotopiegruppe $(n>0)$ von $\mathfrak{G}$ zum Bezugspunkt e $(=$ Identität von $Y)$ und $\alpha_i\in\pi_n(\mathfrak{G},e)$, $i=1,2$. Dann gilt:*

1. $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1\circledcirc\alpha_2$ (s. G).

[3]) Das Zeichen $\simeq$ bedeutet: homotop.

[4]) Die Schreibweise $\mathfrak{g}:(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_0)\to(\mathfrak{G}(Y,Y),e)$ besagt, daß $\mathfrak{g}$ eine Abbildung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{G}(Y,Y)$ ist, bei der $\mathfrak{X}_0$ in e übergeht.

2. *Die Operatorengruppe* $\pi_1(\mathfrak{G}, e)$ *von* $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ *wirkt trivial, d.h. für jeden geschlossenen Weg* $C: I \to \mathfrak{G}$, $C(0) = e = C(1)$ *ist der induzierte Automorphismus* $C^\# : \pi_n(\mathfrak{G}, e) \to \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ (s. [8], § 16, *insbesondere* 16.4) *die Identität.*

H. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes 1 sei $g \in \mathfrak{G}$ und $g \simeq e$. $D: I \to \mathfrak{G}$ sie ein Weg von e nach g (s. C). Der durch D induzierte Isomorphismus $D^\# : \pi_n(\mathfrak{G}, g) \to \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ ist unabhängig von der Auswahl des Weges D (die Bogenkomponente von e in $\mathfrak{G}$ ist n-einfach nach H.S. 1; s. [8], 16.5). Wir identifizieren $\pi_n(\mathfrak{G}, g)$ mit $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ vermöge des Isomorphismus $D^\#$.

Diese Identifikation läßt sich folgendermaßen beschreiben (s. [8], § 16): Es seien $\mathfrak{g}: (S^n, x_0) \to (\mathfrak{G}, e)$ resp. $\mathfrak{g}': (S^n, x_0) \to (\mathfrak{G}, g)$ Abbildungen aus $\alpha \in \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ resp. $\alpha' \in \pi_n(\mathfrak{G}, g)$, (S^n, x_0) die n-Sphäre mit Bezugspunkt x_0. α und α' werden genau dann identifiziert, wenn $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ ineinander deformiert werden können.

I. $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ seien beliebige topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\gamma: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $\gamma^- : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$ gibt derart, daß $\gamma^- \circ \gamma$ und $\gamma \circ \gamma^-$ der Identität von $\mathfrak{Y}$ resp. $\mathfrak{Z}$ homotop sind. γ^- heißt dann ein *Homotopieinverses* von γ. Man sagt $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ seien *vom gleichen Homotopietyp*, wenn es eine Homotopieäquivalenz $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ gibt.

Sind Y und Z lokal kompakte topologische Räume, dann bezeichnet $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ die mit der induzierten Topologie versehene Menge der Homotopieäquivalenzen in $\mathfrak{G}(Y, Z)$ (s. A).

J. Es sei $g: Y \to Z$ eine Homotopieäquivalenz und g^- ein Homotopieinverses von g (s. I).

1. Ist $'g$ eine stetige Abbildung von Y in Z und $'g \simeq g$, dann ist auch $'g$ eine Homotopieäquivalenz, und g^- ist ein Homotopieinverses von $'g$.

2. Ist $'g^- : Z \to Y$ eine stetige Abbildung und $'g^- \circ g \simeq e_Y$ (= Identität von Y), dann ist $'g^- \simeq g^-$.

Hieraus und aus C folgt: $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. I) besteht aus vollen Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}(Y, Z)$. Alle Homotopieinversen von $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ liegen in der gleichen Bogenkomponente von $\mathfrak{G}(Z, Y)$.

Beweis. e_Y, e_Z seien die identischen Selbstabbildungen von Y, Z.

1. Aus $'g \simeq g$ folgt $g^- \circ {}'g \simeq g^- \circ g \simeq e_Y$, ebenso ${}'g \circ g^- \simeq e_Z$.
2. Aus ${}'g^- \circ g \simeq e_Y$ folgt $g^- = e_Y \circ g^- \simeq ({}'g^- \circ g) \circ g^- = {}'g^- \circ (g \circ g^-) \simeq {}'g^- \circ e_Z = {}'g^-$.

K. Sind Y, Z, W topologische Räume, $g_1: Y \to Z$ und $g_2: Z \to W$ Homotopieäquivalenzen (s. I) und g_1^- resp. g_2^- Homotopieinverse von g_1 resp. g_2, dann ist $g_2 \circ g_1$ eine Homotopieäquivalenz und $g_1^- \circ g_2^-$ ein Homotopieinverses von $g_2 \circ g_1$. Insbesondere ist $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) abgeschlossen bezüglich der $\circ$-Multiplikation.

Beweis. e_Y, e_Z, e_W seien die Identitäten von Y, Z, W. Dann ist $(g_2 \circ g_1) \circ (g_1^- \circ g_2^-) = g_2 \circ (g_1 \circ g_1^-) \circ g_2^- \simeq g_2 \circ e_Z \circ g_2^- = g_2 \circ g_2^- \simeq e_W$, ebenso $(g_1^- \circ g_2^-) \circ (g_2 \circ g_1) \simeq e_Y$.

L. Für $k = 0, 1$, seien $g_k, g_k' \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A), $g_0 \simeq g_1$, $g_0' \simeq g_1'$. Dann ist $g_0' \circ g_0 \simeq g_1' \circ g_1$. Bezeichnet allgemein $\bar{g}$ die Bogenkomponente von $g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$

($\bar{g}$ ist nach C gerade die Homotopieklasse von g), so können wir also das o-Produkt von $\bar{g}_0$ mit $\bar{g}_1$ durch $\bar{g}_0 \circ \bar{g}_1 = \overline{g_1 \circ g_0}$ in eindeutiger Weise definieren.

Bezüglich dieser Multiplikation bilden die Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ [die nach J auch Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ sind] eine Gruppe, die wir in Analogie zu [8], 16.10 mit $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ bezeichnen.

Beweis. Es seien g, g', g'' beliebige Elemente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$, g^- ein Homotopieinverses von g, e die Identität von Y. 1. Abgeschlossenheit bezüglich der o-Multiplikation: Nach K ist $g \circ g' \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$, also $\bar{g} \circ \bar{g}' = \overline{g \circ g'}$ eine Bogenkomponente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$.
2. Assoziativität: $\bar{g} \circ (\bar{g}' \circ \bar{g}'') = \bar{g} \circ \overline{g' \circ g''} = \overline{g \circ (g' \circ g'')} = \overline{(g \circ g') \circ g''} = (\bar{g} \circ \bar{g}') \circ \bar{g}''$.
3. Existenz der Linkseins: $\bar{e} \circ \bar{g} = \overline{e \circ g} = \bar{g}$.
4. Existenz des Linksinversen: $\bar{g}^- \circ \bar{g} = \overline{g^- \circ g} = \bar{e}$.

M. Es seien Y und Z topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, $g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ und g_1^- ein Homotopieinverses von g_1 (s. I). Wir definieren eine stetige Abbildung $\mathfrak{G}(Y, Y) \to \mathfrak{G}(Z, Z)$ (s. A) durch

$$g \to g_1 \circ g \circ g_1^-, \qquad g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$$

und nennen sie *eine Transformation mit* g_1.

N. Y, Z, W seien topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, $\mathfrak{g}$ resp. $'\mathfrak{g}$ sei eine Transformation mit $g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ resp. $'g_1 \in \mathfrak{G}_1(Z, W)$. Dann ist $'\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}$ eine Transformation mit $'g_1 \circ g_1$.

Beweis. $\mathfrak{g}$ resp. $'\mathfrak{g}$ sei durch $g \to g_1 \circ g \circ g_1^-$, $g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ resp. $'g \to {}'g_1 \circ {}'g \circ {}'g_1^-$, $'g \in \mathfrak{G}(Z, Z)$ gegeben (g_1^- resp. ${}'g_1^-$ homotopieinvers zu g_1 resp. $'g_1$). Nach K ist ${}'g_1 \circ g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, W)$ und $g_1^- \circ {}'g_1^-$ homotopieinvers zu $'g_1 \circ g_1$. Die Abbildung $g \to ({}'g_1 \circ g_1) \circ g \circ (g_1^- \circ {}'g_1^-)$ (d. i. $'\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}$) ist also eine Transformation mit $'g_1 \circ g_1$.

O. Ist $\mathfrak{g}_k : \mathfrak{G}(Y, Y) \to \mathfrak{G}(Z, Z)$, $k = 0, 1$, eine Transformation mit $g_k \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. M) und ist $g_0 \simeq g_1$, dann ist auch $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{g}_1$.

Beweis. $\mathfrak{g}_k$ sei durch $g \to g_k \circ g \circ g_k^-$, $g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ gegeben (g_k^- homotopieinvers zu g_k). Aus $g_0 \simeq g_1$ folgt $g_0^- \simeq g_1^-$ (s. J). $C : I \to \mathfrak{G}(Y, Z)$ resp. $C^- : I \to \mathfrak{G}(Z, Y)$ sei ein Weg, der g_0 mit g_1 resp. g_0^- mit g_1^- verbindet (s. C). Dann ist

$$(g, t) \to C(t) \circ g \circ C^-(t), \qquad g \in \mathfrak{G}(Y, Y), \qquad t \in I$$

eine Deformation von $\mathfrak{g}_0$ in $\mathfrak{g}_1$.

P. Jede Transformation mit einem Element aus $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. M) ist eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere: Sind Y und Z topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, dann auch $\mathfrak{G}(Y, Y)$ und $\mathfrak{G}(Z, Z)$ (s. A).

Beweis. Es seien $\mathfrak{g}$ eine Transformation mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$, g^- ein Homotopieinverses von g und $\mathfrak{g}^-$ eine Transformation mit g^-. Nach N ist $\mathfrak{g}^- \circ \mathfrak{g}$ eine Transformation mit $g^- \circ g$. Die Identität von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ ist eine Transformation mit e (= Identität von Y), also wegen $e \simeq g^- \circ g$ in $\mathfrak{g}^- \circ \mathfrak{g}$ deformierbar (s. O). Entsprechend kann $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}^-$ in die Identität von $\mathfrak{G}(Z, Z)$ deformiert werden. $\mathfrak{g}$ ist also eine Homotopieäquivalenz und $\mathfrak{g}^-$ ein Homotopieinverses von $\mathfrak{g}$.

Q. Eine Transformation mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. M) ist eine stetige Selbstabbildung von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(Y, Y)$, bei der e, die Identität von Y, in $g \circ g^-$ übergeht (g^- ein gewisses Homotopieinverses von g). Sie induziert daher einen Homomorphismus $g_* : \pi_n(\mathfrak{G}, e) \to \pi_n(\mathfrak{G}, g \circ g^-)$, $n \geq 1$ (s. [8], 15.5). Wegen $g \circ g^- \sim e$

können wir $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ und $\pi_n(\mathfrak{G}, g \circ g^-)$ in natürlicher Weise identifizieren (s. H). g_* wird damit zu einem Endomorphismus von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$.

Transformationen mit Elementen aus der gleichen Bogenkomponente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ sind homotope Abbildungen (s. O) und induzieren daher den gleichen Endomorphismus g_*. Bezeichnet $\bar{g}$ die Bogenkomponente von g, so können wir also durch die Festsetzung $\bar{g}_* = g_*$ in eindeutiger Weise jeder Bogenkomponente $\bar{g}$ von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$, d.h. jedem Element von $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ (s. L), einen Endomorphismus $\bar{g}_*$ von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ zuordnen.

Eine Transformation erst mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$, dann mit $g' \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ ergibt eine Transformation mit $g' \circ g$ (s. N). Also ist $(g' \circ g)_* = g'_* \circ g_*$. Daraus folgt $(\overline{g' \circ g})_* = \overline{g'}_* \circ \overline{g}_*$. Die Identität von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ ist eine Transformation mit e, also $\bar{e}_*$ die Identität von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$. Wir erhalten somit:

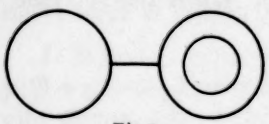


Fig. 1.

Durch die Zuordnung $\bar{g} \to \bar{g}_*$ wird $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ zur Operatorengruppe von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$, $n > 0$.

Diese Aussage bleibt richtig für $n = 0$, wenn wir dann unter $\bar{g}_*$ den durch $\bar{g}$ bestimmten inneren Automorphismus von $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ verstehen.

Bemerkung 1. Die Menge der Homöomorphismen von Y auf sich ist in $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) enthalten. Das Beispiel der Sphären könnte vielleicht zur Vermutung führen, daß allgemein jede Homotopieäquivalenz $Y \to Y$ sich in einen Homöomorphismus deformieren läßt, zumindest wenn Y zusammenhängend ist. Wir geben folgendes Gegenbeispiel:

Y bestehe aus einem abgeschlossenen Kreisring, einer Kreislinie und einer Strecke, die beide verbindet (s. Fig. 1). Die Abbildung $g: Y \to Y$ bestehe darin, daß man zunächst den Kreisring radienweise auf den äußeren Randkreis drückt und dann das so entstehende Gebilde an der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke spiegelt. Dann ist $g \circ g \simeq e$, aber g nicht in eine topologische Abbildung deformierbar.

§ 2. Faserweise Abbildungen und faserweise Homotopieäquivalenz.

R. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Faserraum (fibre bundle bei STEENROD [8], § 2). Durch die Schreibweise $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ bringen wir zum Ausdruck, daß B der gefaserte Raum (bundle space), X die Basis (base space), $p: B \to X$ die Projektion (projection), und G die Strukturgruppe (group of the bundle) von $\mathfrak{B}$ ist.

Ist A ein Teilraum von X, dann bezeichnet $\mathfrak{B}|A = \{p^{-1}(A), p_A, A, Y, G\}$ den über A gelegenen Teil von $\mathfrak{B}$; $p_A: p^{-1}(A) \to A$ ist dabei die durch p definierte Abbildung[5]) (vgl. [8], 9.2).

Definition 1. *Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \to X'$ eine stetige Abbildung. Unter einer* faserweisen

[5]) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ seien Mengen, $\mu: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ eine Abbildung, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ und $\mu(\mathfrak{M}') \subset \mathfrak{N}'$. Wir nennen die Abbildung $\mu': \mathfrak{M}' \to \mathfrak{N}'$, die durch $\mu'(m) = \mu(m)$, $m \in \mathfrak{M}'$ gegeben ist, die durch μ definierte Abbildung.

Abbildung $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ (*kurz*: f-Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$) *verstehen wir eine stetige Abbildung* $h:B\to B'$ *mit der Eigenschaft*

$$\bar{h}\circ p = p'\circ h. \tag{2}$$

Ist insbesondere $X=X'$ *und* $\bar{h}$ *die Identität, dann sprechen wir von* f*-Abbildungen schlechthin (ohne den Zusatz: zur Abbildung* $\bar{h}$*).*

Eine f-Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$ bildet also für jedes $x\in X$ die Faser $p^{-1}(x)$ stetig in die Faser $p^{-1}(h(x))$ ab, im Gegensatz zu einer fasertreuen Abbildung (s. [8], 2.5) jedoch im allgemeinen nicht topologisch.

Definition 2. *Es seien* $\mathfrak{B}=\{B, p, X, Y, G\}$ *und* $\mathfrak{B}'=\{B', p', X', Y', G'\}$ *Faserräume,* $\bar{h}:X\to X'$ *eine stetige Abbildung und* $\mathfrak{B}\times I=\{B\times I, q, X\times I, Y, G\}$ *das Produkt von* $\mathfrak{B}$ *mit* $I=[0,1]$ (s. [8], 11.1). $\varrho:X\times I\to X$ *sei durch* $\varrho(x,t)=x$, $x\in X$, $t\in I$ *definiert. Eine* f*-Abbildung* $\mathfrak{h}:\mathfrak{B}\times I\to\mathfrak{B}'$ *zur Abbildung* $\bar{\mathfrak{h}}=\bar{h}\circ\varrho$ (s. Def. 1) *heißt* f-Homotopie zur Abbildung $\bar{h}$.

Ist insbesondere $X=X'$ *und* $\bar{h}$ *die Identität, dann sprechen wir von* f*-Homotopien schlechthin (ohne den Zusatz: zur Abbildung* $\bar{h}$*).*

Definition 3. *Es seien* $\mathfrak{B}=\{B, p, X, Y, G\}$ *und* $\mathfrak{B}'=\{B', p', X', Y', G'\}$ *Faserräume,* $\bar{h}:X\to X'$ *eine stetige Abbildung. Zwei* f*-Abbildungen* $h_k:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$, $k=0,1$, *zur Abbildung* $\bar{h}$ (s. Def. 1) *heißen* f-homotop, *in Zeichen* $h_0\underset{f}{\sim}h_1$, *wenn es eine* f*-Homotopie* $\mathfrak{h}:\mathfrak{B}\times I\to\mathfrak{B}'$ *zur Abbildung* $\bar{h}$ (s. Def. 2) *gibt mit*

$$\mathfrak{h}(b,0)=h_0(b),\qquad \mathfrak{h}(b,1)=h_1(b),\qquad b\in B.$$

$\mathfrak{h}$ *selbst heißt dann auch eine* f*-Deformation von* h_0 *in* h_1; m. a. W.: Bei einer f-Deformation von h_0 in h_1 beschreibt der Bildpunkt von $b\in B$ einen stetig von b abhängenden Weg, der $h_0(b)$ mit $h_1(b)$ verbindet und der ganz in der Faser $p^{-1}(x')$, $x'=\bar{h}\circ p(b)$, verläuft.

S. Folgendes ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen 1 bis 3: Sind $\mathfrak{B}_k=\{B_k, p_k, X_k, Y_k, G_k\}$, $k=1,2,3$, Faserräume und h_i und h_i' f-Abbildungen $\mathfrak{B}_i\to\mathfrak{B}_{i+1}$ zu den Abbildungen $\bar{h}_i:X_i\to X_{i+1}$, $i=1,2$, dann ist $h_2\circ h_1$ eine f-Abbildung $\mathfrak{B}_1\to\mathfrak{B}_3$ zur Abbildung $\bar{h}_2\circ\bar{h}_1$, und aus $h_i\underset{f}{\sim}h_i'$ folgt $h_2\circ h_1\underset{f}{\sim}h_2'\circ h_1'$. Die identische Selbstabbildung von $\mathfrak{B}=\{B, p, X, Y, G\}$ ist eine f-Abbildung (zur Identität der Basis).

Bemerkung 2. Wir werden uns im folgenden fast ausschließlich mit f-Abbildungen resp. f-Homotopien zur Identität der Basis beschäftigen (insbesondere werden also Bild- und Urbildfaserraum die gleiche Basis haben). Diese Beschränkung kann in folgendem Sinne als unwesentlich angesehen werden:

Es seien $\mathfrak{B}=\{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}'=\{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}:X\to X'$ eine stetige Abbildung, $\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')=\{\tilde{B}, \tilde{p}, X, Y', G'\}$ der induzierte Faserraum, $h^0:\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')\to\mathfrak{B}'$ die induzierte fasertreue Abbildung (s. [8], § 10) und $h_x^0:\tilde{p}^{-1}(x)\to p^{-1}(\bar{h}(x))$ die durch h^0 definierte Abbildung[5]).

Wir ordnen jeder f-Abbildung $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ die f-Abbildung $h':\mathfrak{B}\to\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ zu, die durch $h'(b)=(h_x^0)^{-1}(h(b))$, $b\in B$, $x=p(b)$ gegeben ist.

Einer f-Abbildung $h':\mathfrak{B}\to\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ hingegen ordnen wir die f-Abbildung $h^0\circ h':\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ zu.

Die beiden Zuordnungen sind invers zueinander und stiften eine eineindeutige, f-Homotopien erhaltende Beziehung zwischen den f-Abbildungen $h':\mathfrak{B}\to\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ und den f-Abbildungen $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$.

Definition 4. *Es seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Faserräume über der gleichen Basis. Eine f-Abbildung $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$* (s. Def. 1) *heißt* f-Homotopieäquivalenz, *wenn es eine f-Abbildung $h':\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}$ gibt mit* (s. Def. 3)

$$h'\circ h\underset{f}{\sim}\mathfrak{e},\qquad h\circ h'\underset{f}{\sim}\mathfrak{e}',\qquad \mathfrak{e},\mathfrak{e}' \text{ die Identitäten von } \mathfrak{B},\mathfrak{B}'.$$

Definition 5. *Zwei Faserräume $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ über der gleichen Basis heißen* f-homotopieäquivalent (*oder* vom gleichen f-Homotopietyp), *wenn es eine f-Homotopieäquivalenz $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$* (s. Def. 4) *gibt.*

Wir wollen ein einfaches Kriterium dafür angeben, daß eine f-Abbildung eine f-Homotopieäquivalenz ist. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Betrachtungen einschließlich Hilfssatz 2.

T. Es seien $\mathfrak{X},\mathfrak{X}'$ beliebige, Y, Y' lokal kompakte topologische Räume. Wir bilden die (trivialen) Faserräume $\mathfrak{X}\times Y$, $\mathfrak{X}'\times Y'$ (Basis $\mathfrak{X}$ resp. $\mathfrak{X}'$). $\pi:\mathfrak{X}'\times Y'\to Y'$ sei durch $\pi(\mathfrak{x}',y')=y'$, $\mathfrak{x}'\in\mathfrak{X}'$, $y'\in Y'$ gegeben. $\bar{\xi}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}'$ sei eine stetige Abbildung.

Ist $\xi:\mathfrak{X}\times Y\to\mathfrak{X}'\times Y'$ eine f-Abbildung zur Abbildung $\bar{\xi}$ (s. Def. 1), dann ist $\pi\circ\xi:\mathfrak{X}\times Y\to Y'$ stetig, also auch (s. B) die durch $\tilde{\xi}(\mathfrak{x})\cdot y=\pi\circ\xi(\mathfrak{x},y)$, $\mathfrak{x}\in\mathfrak{X}$, $y\in Y$ definierte Abbildung $\tilde{\xi}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Y,Y')$.

Es sei umgekehrt $\eta:\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Y,Y')$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung $(\mathfrak{x},y)\to\eta(\mathfrak{x})\cdot y$ von $\mathfrak{X}\times Y$ in Y' ist stetig (s. B), also auch die durch $\eta^*(\mathfrak{x},y)=\big(\bar{\xi}(\mathfrak{x}),\eta(\mathfrak{x})\cdot y\big)$ definierte Abbildung $\eta^*:\mathfrak{X}\times Y\to\mathfrak{X}'\times Y'$. η^* bildet die Faser $\mathfrak{x}\times Y$ in die Faser $\bar{\xi}(\mathfrak{x})\times Y'$ ab, ist also eine f-Abbildung zur Abbildung $\bar{\xi}$ (s. Def. 1).

Es ist $(\tilde{\xi})^*(\mathfrak{x},y)=\big(\bar{\xi}(\mathfrak{x}),\tilde{\xi}(\mathfrak{x})\cdot y\big)=\big(\bar{\xi}(\mathfrak{x}),\pi\circ\xi(\mathfrak{x},y)\big)=\xi(\mathfrak{x},y)$, also $(\tilde{\xi})^*=\xi$, ebenso $(\widetilde{\eta^*})=\eta$. Die beiden Zuordnungen $\xi\to\tilde{\xi}$ und $\eta\to\eta^*$ sind also invers zueinander und stiften somit eine eineindeutige Beziehung zwischen den f-Abbildungen $\xi:\mathfrak{X}\times Y\to\mathfrak{X}'\times Y'$ zur Abbildung $\bar{\xi}$ und den stetigen Abbildungen $\tilde{\xi}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{G}(Y,Y')$.

Hilfssatz 2. *V sei eine abgeschlossene n-dimensionale Vollkugel ($n>0$), S ihre Randsphäre. Y, Y' seien lokal kompakte topologische Räume. $V\times Y$, $V\times Y'$, $S\times Y$, und $S\times Y'$ werden als (triviale) Faserräume über der Basis V resp. S aufgefaßt. Es seien gegeben:*

α) Eine f-Abbildung (s. Def. 1) *$H:V\times Y\to V\times Y'$ mit der Eigenschaft: Die durch H definierte Abbildung $h_v:v\times Y\to v\times Y'$*[5]*) ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $v\in V$,*

β) eine f-Abbildung $h':S\times Y'\to S\times Y$,

γ) eine f-Homotopie (s. Def. 2) *$\varphi:S\times Y\times I\to S\times Y$, $I=[0,1]$, mit $\varphi(x,y,0)=h'\big(H(x,y)\big)$, $\varphi(x,y,1)=(x,y)$, $x\in S$, $y\in Y$.*

Dann gibt es eine f-Abbildung $H' : V \times Y' \to V \times Y$ *und eine f-Homotopie* $\Phi : V \times Y \times I \to V \times Y$ *mit*

$$H'(x, y') = h'(x, y'), \quad \Phi(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \quad \Phi(v, y, 0) = H' \circ H(v, y),$$
$$\Phi(v, y, 1) = (v, y), \quad x \in S, \quad v \in V, \quad y' \in Y', \quad t \in I.$$

Beweis. Wir übersetzen entsprechend der in T gegebenen eineindeutigen Beziehung die Voraussetzungen α) bis γ) und die Behauptung des Hilfssatzes 2.

Es seien gegeben die stetigen Abbildungen

$\tilde{\alpha}$) $\tilde{H} : V \to \mathfrak{G}(Y, Y')$ mit $\tilde{H}(V) \subset \mathfrak{G}_1(Y, Y')$ (s. I),

$\tilde{\beta}$) $\tilde{h}' : S \to \mathfrak{G}(Y', Y)$,

$\tilde{\gamma}$) $\tilde{\varphi} : S \times I \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ mit $\tilde{\varphi}(x, 0) = \tilde{h}'(x) \circ \tilde{H}(x)$, $\tilde{\varphi}(x, 1) = e$, $x \in S$, e die Identität von Y.

Dann gibt es stetige Abbildungen $\tilde{H}' : V \to \mathfrak{G}(Y', Y)$ und $\tilde{\Phi} : V \times I \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ mit

$$\tilde{H}' | S = \tilde{h}', \quad \tilde{\Phi}(v, 0) = \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v), \quad \tilde{\Phi}(v, 1) = e, \quad \tilde{\Phi} | S \times I = \tilde{\varphi}, \quad v \in V.$$

[Die der Abbildung ξ in T entsprechenden Abbildungen $\overline{H}, \overline{h}', \overline{H}'$ sind gleich der Identität, während $\overline{\Phi}$ und $\overline{\varphi}$ durch $\overline{\Phi}(v, t) = v$, $\overline{\varphi}(x, t) = x$, $v \in V$, $x \in S$, $t \in I$ gegeben sind.]

Es sei x_0 ein fester Punkt aus S. $\tilde{H}(x_0)$ ist eine Homotopieäquivalenz (s. $\tilde{\alpha}$) und $\tilde{h}'(x_0) \circ \tilde{H}(x_0) \simeq e$ (s. $\tilde{\gamma}$), also $\tilde{H}(x_0) \circ \tilde{h}'(x_0) \simeq e$ (s. J). Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{h}' &= \tilde{h}' \oplus e^{6}) && \text{s. (1)} \\
&\simeq \tilde{h}' \oplus \left(\tilde{H}(x_0) \oplus \tilde{h}'(x_0)\right) && \text{s. F} \\
&= \left(\tilde{h}' \oplus \tilde{H}(x_0)\right) \oplus \tilde{h}'(x_0) \\
&\simeq \left(\tilde{h}' \oplus (\tilde{H} | S)\right) \oplus \tilde{h}'(x_0) && \text{wegen } \tilde{H} | S \simeq \tilde{H}(x_0)^{6}) \text{ und F} \\
&\simeq e \oplus \tilde{h}'(x_0) = \tilde{h}'(x_0) && \text{s. } \tilde{\gamma}.
\end{aligned}$$

$\tilde{h}'$ ist also homotop einer konstanten Abbildung, d.h. stetig auf V erweiterbar. Sei

$$(3) \qquad {}'\tilde{H} : V \to \mathfrak{G}(Y', Y), \quad {}'\tilde{H} | S = \tilde{h}'$$

eine solche Erweiterung. Ferner sei $S^* = V \times 0 \cup V \times 1 \cup S \times I$ die Randsphäre von $V \times I$ und ${}'\tilde{\Phi} : S^* \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ durch

$$(4). \quad {}'\tilde{\Phi}(v, 0) = {}'\tilde{H}(v) \circ \tilde{H}(v), \quad {}'\tilde{\Phi}(v, 1) = e, \quad {}'\tilde{\Phi} | S \times I = \tilde{\varphi}, \quad v \in V$$

definiert. Diese Definition ist widerspruchsfrei. Nach $\tilde{\gamma}$ ist nämlich $\tilde{\varphi} \equiv e$ in $S \times 1$, und in $S \times 0$ ist $\tilde{\varphi}(x, 0) = \tilde{h}'(x) \circ \tilde{H}(x) = {}'\tilde{H}(x) \circ \tilde{H}(x)$, letzteres nach (3).

[6]) Wir verwenden hier wie auch später manchmal dasselbe Zeichen für einen Punkt eines topologischen Raumes und die entsprechende konstante Abbildung in diesen Raum.

$'\tilde{\Phi}$ repräsentiert ein gewisses Element α aus $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ [wir denken uns S^n orientiert und nehmen als Bezugspunkte etwa $(x_0, 1)$]. Wir wählen nun eine Abbildung $''\tilde{\Phi}: (S^n, (x_0, 1)) \to (\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ aus der Homotopieklasse $-\alpha$ derart, daß

$$''\tilde{\Phi} \mid S \times I \cup V \times 1 = e^{6}) \tag{5}$$

ist. Das ist immer möglich; sollte $''\tilde{\Phi}$ die Eigenschaft (5) zunächst noch nicht besitzen, so kann dies durch eine einfache Deformation (durch „Konzentration" der Abbildung $''\tilde{\Phi}$ in $V \times 0$) erreicht werden.

Die Abbildung $''\tilde{\Phi} \circledcirc {}'\tilde{\Phi}$ repräsentiert nach Hilfssatz 1 das Element $\alpha - \alpha = 0$ aus $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, kann also auf $V \times I$ stetig erweitert werden. Es sei

$$\tilde{\Phi}: V \times I \to \mathfrak{G}(Y, Y), \quad \tilde{\Phi} \mid S^n = ''\tilde{\Phi} \circledcirc {}'\tilde{\Phi} \tag{6}$$

eine solche Erweiterung.

Definieren wir $\tilde{H}': V \to \mathfrak{G}(Y', Y)$ durch

$$\tilde{H}'(v) = ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ {}'\tilde{H}(v), \quad v \in V, \tag{7}$$

dann sind $\tilde{H}'$ und $\tilde{\Phi}$ die gesuchten Abbildungen. Ist nämlich $x \in S$, $v \in V$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}'(x) &= ''\tilde{\Phi}(x, 0) \circ {}'\tilde{H}(x) && \text{s. (7)} \\
&= \tilde{h}'(x) && \text{s. (5) und (3)}, \\
\tilde{\Phi}(v, 0) &= ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ {}'\tilde{\Phi}(v, 0) && \text{s. (6) und (1)} \\
&= ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ {}'\tilde{H}(v) \circ \tilde{H}(v) && \text{s. (4)} \\
&= \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v) && \text{s. (7)}, \\
\tilde{\Phi}(v, 1) &= ''\tilde{\Phi}(v, 1) \circ {}'\tilde{\Phi}(v, 1) && \text{s. (6) und (1)} \\
&= e && \text{s. (5) und (4)}, \\
\tilde{\Phi} \mid S \times I &= (''\tilde{\Phi} \mid S \times I) \circledcirc ({}'\tilde{\Phi} \mid S \times I) && \text{s. (6)} \\
&= \tilde{\varphi} && \text{s. (5) und (4)}.
\end{aligned}$$

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X, Y', G'\}$ Faserräume, Y und Y' lokal kompakt, X ein Polyeder. $h: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ sei eine f-Abbildung* (s. Def. 1) *und $h_x: p^{-1}(x) \to p'^{-1}(x)$, $x \in X$, die durch h definierte Abbildung*[5]).

h ist genau dann eine f-Homotopieäquivalenz (s. Def. 4), *wenn h_x eine Homotopieäquivalenz* (s. I) *ist für jedes $x \in X$.*

Korollar 1. *Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, Y und Y' lokal kompakt, X ein Polyeder. $\bar{h}: X \to X'$ sei eine stetige Abbildung, $h: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ eine f-Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$* (s. Def. 1), *und für jedes $x \in X$ sei die durch h definierte Abbildung $h_x: p^{-1}(x) \to p'^{-1}(\bar{h}(x))$*[5]) *eine Homotopieäquivalenz* (s. I).

Dann sind $\mathfrak{B}$ und der induzierte Faserraum $\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ (s. [8], § 10) *f-homotopieäquivalent* (s. Def. 5).

Korollar 1 folgt aus Satz 1 auf Grund der Bemerkung 2, S. 117.

Korollar 2. *Ein Faserraum* $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$, *X ein Polyeder, Y lokal kompakt, ist genau dann dem Produkt* $X \times Y$ *f-homotopieäquivalent* (s. Def. 5), *wenn es eine stetige Abbildung* $h: B \to Y$ *gibt derart, daß* $h|p^{-1}(x)$ *eine Homotopieäquivalenz ist für jedes* $x \in X$.

Zu Korollar 2. $\pi: X \times Y \to Y$ sei durch $\pi(x, y) = y$, $x \in X$, $y \in Y$ definiert.

$H: \mathfrak{B} \to X \times Y$ sei eine f-Homotopieäquivalenz. Dann ist $h = \pi \circ H$ eine stetige Abbildung von B in Y. Die durch H definierte Abbildung $H_x: p^{-1}(x) \to x \times Y$ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$ (s. Satz 1), also auch $h|p^{-1}(x) = (\pi|x \times Y) \circ H_x$, denn $\pi|x \times Y$ ist ein Homöomorphismus.

Umgekehrt sei $h: B \to Y$ eine stetige Abbildung und $h|p^{-1}(x)$ eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$. Dann ist durch $b \to (p(b), h(b))$, $b \in B$ eine f-Abbildung $H: \mathfrak{B} \to X \times Y$ gegeben, und die durch H definierte Abbildung $H_x: p^{-1}(x) \to x \times Y$ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$. H ist also eine f-Homotopieäquivalenz (s. Satz 1).

Korollar 3. *Es sei X ein Polyeder, Y ein lokal kompakter topologischer Raum. Die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen* $X \to \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) *bilden eine Gruppe bezüglich der* $\odot$*-Multiplikation* (s. F).

Zu Korollar 3. Die Assoziativität der $\odot$-Multiplikation folgt unmittelbar aus ihrer Definition. Die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $x \to e$ (= Identität von Y) ist Einselement. Es bleibt die Existenz des Linksinversen nachzuweisen.

$\tilde{h}: X \to \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ sei eine stetige Abbildung. Durch $(x, y) \to (x, \tilde{h}(x) \cdot y)$, $x \in X$, $y \in Y$ definieren wir eine f-Selbstabbildung h von $X \times Y$ (s. T). $\tilde{h}(x)$ ist eine Homotopieäquivalenz, also auch die durch h definierte Abbildung von $x \times Y$ in sich[5]). h selbst ist also nach Satz 1 eine f-Homotopieäquivalenz. Wir wählen (s. Def. 4) eine f-Abbildung $h': X \times Y \to X \times Y$ und eine f-Deformation $\varphi: X \times Y \times I \to X \times Y$ von $h' \circ h$ in die Identität von $X \times Y$. Die in T hergestellte eineindeutige Beziehung liefert dann eine stetige Abbildung $\tilde{h}': X \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ und eine Deformation $\tilde{\varphi}: X \times I \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ von $\tilde{h}' \odot \tilde{h}$ in die konstante Abbildung $x \to e$, $x \in X$. Wegen $\tilde{h}(x) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ und $\tilde{h}'(x) \circ \tilde{h}(x) \simeq e$ ist $\tilde{h}'(x) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. J), wegen $\tilde{\varphi}(x, t) \simeq \tilde{\varphi}(x, 1) = e$ ist $\tilde{\varphi}(x, t) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. J). $\tilde{h}'$ ist also eine Abbildung von X in $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ und die Homotopieklasse von $\tilde{h}'$ ist linksinvers zu der von $\tilde{h}$.

Beweis des Satzes 1. Es sei h eine f-Homotopieäquivalenz. Aus Definition 4 und aus I folgt, daß dann h_x für jedes $x \in X$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Umgekehrt sei jetzt h_x eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$.

1. Es bezeichne X_n, $n = 0, 1, \ldots$ das n-dimensionale Gerüst einer festen Zellenzerlegung von X, $h_n: \mathfrak{B}|X_n \to \mathfrak{B}'|X_n$ (s. R) die durch h definierte f-Abbildung[5]). Wir konstruieren für jedes $n \geq 0$ eine f-Abbildung $h'_n: \mathfrak{B}'|X_n \to \mathfrak{B}|X_n$ und eine f-Deformation φ_n von $h'_n \circ h_n$ in die Identität von $\mathfrak{B}|X_n$ derart, daß $h'_n(b') = h'_{n-1}(b')$ und $\varphi_n(b, t) = \varphi_{n-1}(b, t)$ ist für $b \in p^{-1}(X_{n-1})$, $b' \in p'^{-1}(X_{n-1})$,

$t \in I$. Die f-Abbildungen h'_n setzen sich dann zu einer f-Abbildung $h' : \mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}$ zusammen, die f-Deformationen φ_n zu einer f-Deformation φ von $h' \circ h$ in die Identität von $\mathfrak{B}$.

Um den Fall $n = 0$ zu erledigen, nehmen wir für jede Ecke $x \in X$ ein Homotopieinverses h'_x von h_x (s. I) und eine Deformation von $h'_x \circ h_x$ in die Identität von $p^{-1}(x)$. h'_0 resp. φ_0 ist dann einfach die Gesamtheit dieser Abbildungen resp. Deformationen.

Wir nehmen nun an (Induktionsvoraussetzung), h'_{n-1} und φ_{n-1} $(n \geq 1)$ seien bereits konstruiert. V sei eine n-Zelle von X_n, S ihr Rand. Da V in einen Punkt zusammenziehbar ist, kann $\mathfrak{B}|V$ (s. R) resp. $\mathfrak{B}'|V$ als das Produkt $V \times Y$ resp. $V \times Y'$ aufgefaßt werden (s. [8], 11.6). Durch h_n, h'_{n-1} und φ_{n-1} werden dann f-Abbildungen $h_V : V \times Y \to V \times Y'$, $h'_S : S \times Y' \to S \times Y$ und eine f-Deformation $\varphi_S : S \times Y \times I \to S \times Y$ definiert[5]), die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 genügen. Es gibt also eine f-Abbildung $h'_V : V \times Y' \to V \times Y$ und eine f-Deformation φ_V von $h'_V \circ h_V$ in die Identität von $V \times Y$ mit $h'_V(x, y') = h'_S(x, y')$ und $\varphi_V(x, y, t) = \varphi_S(x, y, t)$, $x \in S$, $y \in Y$, $y' \in Y'$, $t \in I$.

Wir schreiben jetzt wieder $\mathfrak{B}|V$ resp. $\mathfrak{B}'|V$ statt $V \times Y$ resp. $V \times Y'$. Dann lautet das Ergebnis: Es gibt eine f-Abbildung $h'_V : \mathfrak{B}'|V \to \mathfrak{B}|V$ und eine f-Deformation φ_V von $h'_V \circ h_V$ $\left(h_V : \mathfrak{B}|V \to \mathfrak{B}'|V \text{ die durch } h \text{ definierte } f\text{-Abbildung}^5)\right)$ in die Identität von $\mathfrak{B}|V$ mit $h'_V(b') = h'_{n-1}(b')$ und $\varphi_V(b, t) = \varphi_{n-1}(b, t)$ für $b \in p^{-1}(S)$, $b' \in p'^{-1}(S)$, $t \in I$.

Wir wählen für jede n-Zelle V ein solches Paar h'_V, φ_V und erklären h'_n und φ_n durch $h'_n(b') = h'_V(b')$, $\varphi_n(b, t) = \varphi_V(b, t)$ für $b \in p^{-1}(V)$, $b' \in p'^{-1}(V)$, $t \in I$.

2. $h'_x : p'^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$, $x \in X$ sei die durch h' definierte Abbildung. Nach Konstruktion von h' ist $h'_x \circ h_x$ in die Identität von $p^{-1}(x)$ deformierbar. h'_x ist also eine Homotopieäquivalenz (s. J). Wir können demnach auf h' den im ersten Teil dieses Beweises durchgeführten Schluß anwenden und erhalten eine f-Abbildung $h'' : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ mit $h'' \circ h' \underset{f}{\sim} \mathfrak{e}'$ (= Identität von $\mathfrak{B}'$). Dann ist aber $h'' \underset{f}{\sim} h'' \circ (h' \circ h) = (h'' \circ h') \circ h \underset{f}{\sim} h$, also $h \circ h' \underset{f}{\sim} \mathfrak{e}'$. Satz 1 ist damit bewiesen.

Bemerkung 3. Die Voraussetzungen des Satzes 1 lassen sich abschwächen. Es genügt z. B. anzunehmen, daß X ein CW-Komplex ist im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD ([11], S. 223); der Beweis wird dadurch nicht wesentlich komplizierter. Auch auf die Eigenschaft von Y, lokal kompakt zu sein, kann man verzichten, allerdings nicht, ohne den Beweis erheblich zu ändern. Schließlich läßt sich die Voraussetzung über die Abbildungen h_x mit Hilfe des unten folgenden Satzes 2 reduzieren.

Dagegen wird der Satz 1 falsch, wenn man über X keinerlei einschränkende Voraussetzungen macht. Wir geben als Beispiel[7]) eine f-Selbstabbildung h eines Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ mit lokal kompakter Faser Y an, die keine f-Homotopieäquivalenz ist, obwohl für jedes $x \in X$ durch h ein Homöomorphismus $h_x : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ definiert wird[5]).

[7]) Das angeführte Beispiel findet sich in anderem Zusammenhang bei ARENS [1], S. 601.

X und Y sind Teilräume der reellen Zahlengeraden. X besteht aus den Punkten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ und 0, Y aus den Punkten $0, 1, 2, \ldots$ und $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Die Gruppe G besteht nur aus der Identität von Y, $\mathfrak{B}$ ist also das Produkt $X \times Y$, p die Projektion auf den Faktor X.

Für $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ sei

$$h\left(\frac{1}{k}, m\right)^{8}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{k}, m\right) & \text{für } m < k^{\circ}) \\ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) & \text{für } m = k \neq 1 \\ \left(\frac{1}{k}, m-1\right) & \text{für } m > k \end{cases}$$

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right) & \text{für } 0 < m < k \\ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m+1}\right) & \text{für } m \geq k \end{cases}$$

h ist stetig. $(0, 0)$ ist die einzige Stelle, an der dies fraglich scheinen könnte. Wenn aber $x \in X$ und $y \in Y$ gegen 0 konvergieren, dann konvergiert $h(x, y)$ gegen $(0, 0) = h(0, 0)$. h ist also eine f-Abbildung. Die durch h definierte Abbildung $h_x : x \times Y \to x \times Y$ ist ein Homöomorphismus für jedes $x \in X$.

Wäre h eine f-Homotopieäquivalenz, dann gäbe es (s. Def. 4) eine f-Selbstabbildung h' von $X \times Y$ mit $h \circ h' \underset{f}{\sim} e$ und $h' \circ h \underset{f}{\sim} e$ (e = Identität von $X \times Y$). In $X \times Y$ sind aber keine zwei verschiedenen Punkte durch einen Weg verbindbar. Bei einer Deformation kann sich also eine stetige Abbildung in $X \times Y$ nicht ändern. Es müßte also $h \circ h' = e$ und $h' \circ h = e$ sein, d. h. h ein Homöomorphismus und $h' = h^{-1}$. Nun ist zwar h eineindeutig, aber h^{-1} an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig. Durchläuft nämlich k die Folge $1, 2, 3, \ldots$, so konvergiert $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ gegen $(0, 0)$ aber $h^{-1}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k}, k\right)$ nicht gegen $h^{-1}(0, 0) = (0, 0)$.

Als Ergänzung zu Satz 1 beweisen wir den

Satz 2. *Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, X bogenweise zusammenhängend. $\bar{h} : X \to X'$ sei eine stetige Abbildung, $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ eine f-Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$* (s. Def. 1) *und $h_x : p^{-1}(x) \to p'^{-1}(\bar{h}(x))$, $x \in X$, die durch h definierte Abbildung*[5]). *Für ein gewisses $\bar{x} \in X$ sei $h_{\bar{x}}$ eine Homotopieäquivalenz.*

Dann ist h_x für jedes $x \in X$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Es sei x ein beliebiger Punkt aus X. $C : I \to X$, $C(0) = \bar{x}$, $C(1) = x$ sei ein Weg von $\bar{x}$ nach x und $\mathfrak{C}_t : p^{-1}(\bar{x}) \to p^{-1}(C(t))$ resp. $\mathfrak{C}'_t : p'^{-1}(\bar{h}(\bar{x})) \to p'^{-1}(\bar{h} \circ C(t))$, $t \in I$ eine Verschiebung von $p^{-1}(\bar{x})$ resp. $p'^{-1}(\bar{h}(\bar{x}))$ längs C resp. $\bar{h} \circ C$ (s. [8], 13.1).

Durch $(\mathfrak{C}'_t)^{-1} \circ h_{C(t)} \circ \mathfrak{C}_t$, $0 \leq t \leq 1$ ist eine Deformation von $h_{\bar{x}}$ in $(\mathfrak{C}'_1)^{-1} \circ h_x \circ \mathfrak{C}_1$ gegeben. Nach Voraussetzung ist $h_{\bar{x}}$ eine Homotopieäquivalenz, also auch $(\mathfrak{C}'_1)^{-1} \circ h_x \circ \mathfrak{C}_1$ (s. J) und damit h_x (denn $\mathfrak{C}'_1$ und $\mathfrak{C}_1$ sind Homöomorphismen).

[8]) Wir vereinbaren: $\frac{1}{\infty} = 0$, $\infty > m$.

Bemerkung 4. Der Begriff der f-Homotopieäquivalenz wurde neuerdings auch von M. L. CURTIS (Ann. of Math. **60**, 304) untersucht. Daneben führte CURTIS den Begriff der a-Abbildung und der a-Äquivalenz von Faserräumen ein. Eine a-Abbildung ist eine f-Abbildung $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$ (Bezeichnungen s. Def. 1) mit der Eigenschaft: Die durch h definierte Abbildung $h_x: p^{-1}(x)\to p'^{-1}(\bar{h}(x))$ induziert in allen Homotopiegruppen Isomorphismen auf. Wenn die Fasern CW-Komplexe sind, so ist dies gleichbedeutend damit, daß h_x eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $x\in X$ (s. [*11*], Theorem 1, S. 215). Eine a-Abbildung h zur Identität der Basis (d.h. $p=p'\circ h$) ist dann also nach Satz 1 eine f-Homotopieäquivalenz (zumindest wenn X ein Polyeder ist). Da nach CURTIS zwei Faserräume $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ über der gleichen Basis a-äquivalent heißen, wenn es a-Abbildungen $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'$ und $h':\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}$ zur Identität der Basis gibt, folgt hieraus insbesondere:

Sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Faserräume (im Sinne von STEENROD [*8*]; *bei* CURTIS *werden allgemeinere Faserräume zugelassen) mit CW-Komplexen als Fasern und einem Polyeder als gemeinsamer Basis und sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ a-äquivalent, dann sind sie sogar f-homotopieäquivalent (A-äquivalent bei* CURTIS).

§ 3. Faserräume über Sphären.

U. Es sei G eine topologische Transformationengruppe des lokal kompakten topologischen Raumes Y. Das bedeutet: G ist eine topologische Gruppe von Homöomorphismen von Y auf sich, und die Abbildung $\eta: G\times Y\to Y$, die dem Paar (g, y), $g\in G$, $y\in Y$ das Bild von y bei g zuordnet $(\eta(g, y)=g\cdot y)$, ist stetig (vgl. [*8*], 2.2).

Die Elemente von G sind Homöomorphismen, also insbesondere stetige Abbildungen. Indem wir so die Elemente von G als Elemente von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A) auffassen, erhalten wir die „Injektion" $j:G\to\mathfrak{G}(Y, Y)$. Aus der Stetigkeit von η folgt nach B die Stetigkeit von j. j induziert daher einen Homomorphismus $j^*:\pi_n(G, e)\to\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, e die Identität von Y, $n\geq 0$.

Wir beschreiben den Homomorphismus j^* für den Fall $n=0$ (für $n>0$ s. [*8*], 15.5):

Ist $g\in G$, so bezeichnet $\bar{g}$ die Bogenkomponente von g in G, $\overline{j(g)}$ die Bogenkomponente von $j(g)$ in $\mathfrak{G}(Y, Y)$. Wegen der Stetigkeit von j ist $j(\bar{g})<\overline{j(g)}$. Da die Elemente von G Homöomorphismen sind, ist $j(G)<\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I), also $\overline{j(g)}\in\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. L). Die Elemente von $\pi_0(G, e)$ sind die Bogenkomponenten von G (s. [*8*], 16.10) und $j^*:\pi_0(G, e)\to\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ ist durch $j^*(\bar{g})=\overline{j(g)}$, $g\in G$ gegeben. Es ist leicht einzusehen, daß die so definierte Abbildung j^* ein Homomorphismus ist.

V. $\mathfrak{B}=\{B, p, S^m, Y, G\}$ sei ein Faserraum über der m-Sphäre S^m, $m>0$, E_1 resp. E_2 sei die „obere" resp. „untere" abgeschlossene Hemisphäre von S^m, $S^{m-1}=E_1\cap E_2$ der „Äquator", x_0 ein fester Punkt aus S^{m-1}.

Da E_k, $k=1, 2$, in einen Punkt zusammenziehbar ist, gibt es fasertreue Abbildungen $\Phi_k: E_k\times Y\to\mathfrak{B}|E_k$ (s. [*8*], 11.6). Für $x\in S^{m-1}$, $y\in Y$ ist $\Phi_1^{-1}(\Phi_2(x, y))=(x, g_x\cdot y)$, $g_x\in G$, und durch $T(x)=g_x$ ist eine stetige Ab-

bildung $T: S^{m-1} \to G$ gegeben. Ist $T(x_0) = e$ (das kann durch geeignete Wahl von Φ_1 stets erreicht werden), dann heißt T eine *charakteristische Abbildung von* $\mathfrak{B}$.

Jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \to (G, e)$ kommt als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ vor (s. [8], 18.2).

Zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, Y, G\}$, $i = 1, 2$, mit den charakteristischen Abbildungen T_i sind genau dann äquivalent, wenn es ein $a \in G$ gibt, für welches die Abbildungen $x \to T_2(x)$ und $x \to a\, T_1(x)\, a^{-1}$ von S^{m-1} in G homotop sind (s. [8], 18.3). Wir beweisen den analogen

Satz 3. *Es seien* $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$, *Faserräume über der m-Sphäre* S^m, $m > 0$, Y_i *lokal kompakt und* $T_i: (S^{m-1}, x_0) \to (G_i, e_i)$ *(e_i die Identität von Y_i) charakteristische Abbildungen von* $\mathfrak{B}_i$ (s. V). j_i *bezeichne die „Injektion" von* G_i *in* $\mathfrak{G}(Y_i, Y_i)$ (s. U).

$\mathfrak{B}_1$ *und* $\mathfrak{B}_2$ *sind genau dann f-homotopieäquivalent* (s. Def. 5), *wenn es ein Element* $g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$ (s. I) *gibt, für welches die Abbildungen* $x \to j_2 \circ T_2(x)$ *und* $x \to g \circ (j_1 \circ T_1(x)) \circ g^-$ *von* S^{m-1} *in* $\mathfrak{G}(Y_2, Y_2)$ *homotop sind* (g^- *ein Homotopieinverses von* g; s. I).

Korollar. *Y sei ein lokal kompakter topologischer Raum.* $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ *bezeichne die Ordnung der Gruppe* $\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $m > 0$, (s. G *und* L).

Es gibt höchstens $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ *paarweise nicht f-homotopieäquivalente* (s. Def. 5) *Faserräume mit Basis* S^m (= *m-Sphäre*) *und Faser* Y.

Beweis des Korollars. ($\mathfrak{B}_\lambda = \{B_\lambda, p_\lambda, S^m, Y, G_\lambda\}$), $\lambda \in \Lambda$ sei eine Familie von Faserräumen, $j_\lambda: G_\lambda \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ bezeichne die „Injektion" (s. U).

Sei $T_\lambda: (S^{m-1}, x_0) \to (G_\lambda, e)$ eine charakteristische Abbildung von $\mathfrak{B}_\lambda$ (s. V). Aus $j_{\lambda_1} \circ T_{\lambda_1} \simeq j_{\lambda_2} \circ T_{\lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$) folgt nach Satz 3, daß $\mathfrak{B}_{\lambda_1}$ und $\mathfrak{B}_{\lambda_2}$ f-homotopieäquivalent sind. Es gibt also höchstens $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht f-homotopieäquivalente Faserräume in der Familie $(\mathfrak{B}_\lambda)$. Der letzte Schluß ist auch für $m = 1$ richtig: Aus der Definition von $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. L) folgt leicht, daß es höchstens $[\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht homotope Abbildungen $(S^0, x_0) \to (\mathfrak{G}_1(Y, Y), e)$ gibt.

Beweis des Satzes 3. Es seien $\Phi_k^i: E_k \times Y_i \to \mathfrak{B}_i | E_k$, $i, k = 1, 2$, fasertreue Abbildungen mit (s. V)

$$(8)\quad (\Phi_1^i)^{-1}(\Phi_2^i(x, y_i)) = (x, T_i(x) \cdot y_i) = (x, j_i \circ T_i(x) \cdot y_i), \quad x \in S^{m-1}, \quad y_i \in Y_i.$$

1. Es sei $h: \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ eine f-Homotopieäquivalenz. $h_k: \mathfrak{B}_1 | E_k \to \mathfrak{B}_2 | E_k$ sei die durch h definierte f-Abbildung[5]). Dann ist $g_k = (\Phi_k^2)^{-1} \circ h_k \circ \Phi_k^1$ eine f-Abbildung von $E_k \times Y_1$ in $E_k \times Y_2$ und es ist

$$(9)\quad h_k = \Phi_k^2 \circ g_k \circ (\Phi_k^1)^{-1}.$$

Da h_1 und h_2 auf $\mathfrak{B}_1 | S^{m-1}$ übereinstimmen, ergibt sich aus (9)

$$(10)\quad \Phi_1^2 \circ g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(b) = \Phi_2^2 \circ g_2 \circ (\Phi_2^1)^{-1}(b), \quad b \in p_1^{-1}(S^{m-1})$$

oder

$$(11)\quad g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(\Phi_2^1(x, y_1)) = (\Phi_1^2)^{-1}(\Phi_2^2 \circ g_2(x, y_1)), \quad x \in S^{m-1}, \quad y_1 \in Y_1.$$

Wir definieren $\pi_k: E_k \times Y_2 \to Y_2$ durch $\pi_k(v, y_2) = y_2$, $y_2 \in Y_2$ und $\tilde{g}_k: E_k \to \mathfrak{G}(Y_1, Y_2)$ durch $\tilde{g}_k(v) \cdot y_1 = \pi_k \circ g_k(v, y_1)$, $v \in E_k$, $y_1 \in Y_1$. Nach B ist $\tilde{g}_k$ stetig, und es ist

$$g_k(v, y_1) = \big(v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1\big), \qquad v \in E_k, \qquad y_1 \in Y_1. \tag{12}$$

Damit wird die rechte Seite von (11) zu $(\Phi_1^2)^{-1}\big(\Phi_2^2(x, \tilde{g}_2(x) \cdot y_1)\big)$ und dies nach (8) zu $\big(x, (j_2 \circ T_2(x)) \circ \tilde{g}_2(x) \cdot y_1\big)$. Die linke Seite von (11) wird bei entsprechender Behandlung zu $\big(x, \tilde{g}_1(x) \circ (j_1 \circ T_1(x)) \cdot y_1\big)$. Es ist also

$$\tilde{g}_1(x) \circ \big(j_1 \circ T_1(x)\big) = \big(j_2 \circ T_2(x)\big) \circ \tilde{g}_2(x), \qquad x \in S^{m-1} \tag{13}$$

oder (s. E)

$$(\tilde{g}_1 | S^{m-1}) \oplus (j_1 \circ T_1) = (j_2 \circ T_2) \oplus (\tilde{g}_2 | S^{m-1}). \tag{14}$$

Nun ist $\tilde{g}_k$ auf ganz E_k definiert, also $\tilde{g}_k | S^{m-1}$ in die konstante Abbildung $\tilde{g}_k(x_0)$[6]) deformierbar, also (s. F)

$$\tilde{g}_1(x_0) \oplus (j_1 \circ T_1) \simeq (j_2 \circ T_2) \oplus \tilde{g}_2(x_0) = (j_2 \circ T_2) \oplus \tilde{g}_1(x_0). \tag{15}$$

Bei der letzten Gleichung haben wir $\tilde{g}_1(x_0) = \tilde{g}_2(x_0)$ benutzt; dies ergibt sich aus (13) wegen $j_i \circ T_i(x_0) = e_i$.

h ist nach Voraussetzung eine f-Homotopieäquivalenz, also auch h_k und damit $g_k = (\Phi_k^2)^{-1} \circ h_k \circ \Phi_k^1$. Die durch g_k definierte Abbildung $v \times Y_1 \to v \times Y_2$, $v \in E_k$, führt (v, y_1) in $\big(v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1\big)$ über [s. (12)] und ist nach Satz 1 eine Homotopieäquivalenz, d.h. $\tilde{g}_k(v) \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$ (s. I). Es sei g^- ein Homotopieinverses (s. I) von $g = \tilde{g}_1(x_0)$. Dann folgt aus (15)

$$g \oplus (j_1 \circ T_1) \oplus g^- \simeq j_2 \circ T_2.$$

2. Es sei umgekehrt $g \oplus (j_1 \circ T_1) \oplus g^- \simeq j_2 \circ T_2$[6]) für geeignetes $g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$ (g^- ein Homotopieinverses von g).

Wir multiplizieren diese Homotopierelation von links mit $(j_2 \circ T_2^{-1})$[9]), von rechts mit g und erhalten (s. F)

$$(j_2 \circ T_2^{-1}) \oplus g \oplus (j_1 \circ T_1) \simeq g\ ^{6}).$$

Die Abbildung auf der linken Seite dieser Relation ist also homotop einer konstanten Abbildung, d.h. stetig auf E_2 erweiterbar. Wir wählen eine solche Erweiterung $\tilde{g}_2: E_2 \to \mathfrak{G}(Y_1, Y_2)$ und bezeichnen mit $\tilde{g}_1: E_1 \to \mathfrak{G}(Y_1, Y_2)$ die konstante Abbildung $\tilde{g}_1(E_1) = g$. Dann gilt:

$$\tilde{g}_2 | S^{m-1} = (j_2 \circ T_2^{-1}) \oplus (\tilde{g}_1 | S^{m-1}) \oplus (j_1 \circ T_1) \qquad \text{oder}$$

$$(\tilde{g}_1 | S^{m-1}) (j_1 \circ T_1) = (j_2 \circ T_2) \oplus (\tilde{g}_2 | S^{m-1}). \tag{16}$$

Wir definieren eine f-Abbildung $g_k: E_k \times Y_1 \to E_k \times Y_2$ durch

$$g_k(v, y_1) = \big(v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1\big), \qquad v \in E_k, \ y_1 \in Y_1. \tag{17}$$

(Zur Stetigkeit von g_k vgl. B.)

[9]) T_2^{-1} ist die Abbildung $x \to (T_2(x))^{-1}$ von S^{m-1} in G_2.

Die Formeln (16) und (17) stimmen mit (14) und (12) überein. Wir können die Rechnung, die von (10) über (12) zu (14) geführt hat, rückwärts verfolgen und erhalten:

$$\Phi_1^2 \circ g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(b) = \Phi_2^2 \circ g_2 \circ (\Phi_2^1)^{-1}(b), \qquad b \in p_1^{-1}(S^{m-1}).$$

Die beiden f-Abbildungen $\Phi_k^2 \circ g_k \circ (\Phi_k^1)^{-1} : \mathfrak{B}_1 | E_k \to \mathfrak{B}_2 | E_k$, $k = 1, 2$, stimmen also auf $\mathfrak{B}_1 | S^{m-1}$ überein und setzen sich daher zu einer f-Abbildung $h : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ zusammen.

h ist eine f-Homotopieäquivalenz. Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die durch h definierte Abbildung $h_v : p_1^{-1}(v) \to p_2^{-1}(v)$ [5]) eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $v \in S^m$. Das ist nach Satz 2 der Fall, wenn h_{x_0} eine Homotopieäquivalenz ist. Da Φ_1^i die Faser $x_0 \times Y_i$ homöomorph auf $p_i^{-1}(x_0)$ abbildet, genügt es zu zeigen, daß die durch g_1 definierte Abdildung $x_0 \times Y_1 \to x_0 \times Y_2$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dies folgt wegen (17) aus $\tilde{g}_1(x_0) = g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$.

W. Es sei Y ein lokal kompakter topologischer Raum, $\mathfrak{G}(Y, Y)$ der Raum der stetigen Selbstabbildungen von Y (s. A).

Zwei Elemente α_1 und α_2 von $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $n \geq 0$, heißen *äquivalent bezüglich der Operatorengruppe* $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. Q), wenn es einen Operator $\gamma \in \pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ gibt, der α_1 in α_2 überführt (γ^{-1} führt dann α_2 in α_1 über; die Definition ist also symmetrisch).

Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, Y, G\}$, $i = 1, 2$, Faserräume mit den charakteristischen Abbildungen $T_i : (S^{m-1}, x_0) \to (G, e)$ (s. V). $j : G \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ bezeichne die „Injektion" (s. U). Nach Satz 3 sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ genau dann f-homotopieäquivalent, wenn es ein $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ gibt, für welches die Abbildungen $x \to j \circ T_2(x)$ und $x \to g \circ \big(j \circ T_1(x)\big) \circ g^-$ von S^{m-1} in $\mathfrak{G}(Y, Y)$ homotop sind (g^- ein Homotopieinverses von g). Dies bedeutet aber gerade, daß die durch $j \circ T_1$ und $j \circ T_2$ repräsentierten Elemente von $\pi_n\big(\mathfrak{G}(Y, Y), e\big)$ äquivalent sind bezüglich $\pi_0\big(\mathfrak{G}(Y, Y), e\big)$. Da nach [8], 18.2 jede stetige Abbildung $T : (S^{m-1}, x_0) \to (G, e)$ als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ vorkommt, ergibt sich hieraus der

Satz 4. *Y sei ein lokal kompakter Raum, G eine topologische Transformationengruppe von Y* (s. U). *Es bezeichne $\mathfrak{G}(Y, Y)$ den Raum der stetigen Selbstabbildungen von Y* (s. A), *$j : G \to \mathfrak{G}(Y, Y)$ die „Injektion", $j^* : \pi_n(G, e) \to \pi_n\big(\mathfrak{G}(Y, Y), e\big)$, $n \geq 0$, den durch j induzierten Homomorphismus* (s. U) *und S^m, $m > 0$, die m-Sphäre.*

Die Klassen f-homotopieäquivalenter (s. Def. 5) *Faserräume mit Basis S^m, Faser Y und Strukturgruppe G stehen in eineindeutiger Beziehung zu den Klassen von Elementen von $j^*\big(\pi_{m-1}(G, e)\big)$, die bezüglich $\pi_0\big(\mathfrak{G}(Y, Y), e\big)$ äquivalent sind* (s. W). *Man erhält eine solche Beziehung, wenn man jedem $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ das durch $j \circ T$ ($T : (S^{m-1}, x_0) \to (G, e)$ eine charakteristische Abbildung von $\mathfrak{B}$*; s. V) *repräsentierte Element von $j^*\big(\pi_{m-1}(G, e)\big)$ zuordnet.*

Wir betrachten im folgenden Faserräume über der m-Sphäre S^m mit einer n-Sphäre als Faser ($m > 0$, $n > 0$). Dabei setzen wir zur Abkürzung $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A); e bezeichnet die identische Selbstabbildung von S^n.

Hilfssatz 3. *Es sei $y_0 \in S^n$ ein fester Punkt. Durch $p(g) = g \cdot y_0$, $g \in \mathfrak{G}^n$ ist eine stetige Abbildung $p: \mathfrak{G}^n \to S^n$ gegeben. p ist Projektion eines Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ mit der Faser $G^n = p^{-1}(y_0)$ und der orthogonalen Gruppe in n-Variablen als Strukturgruppe.*

Beweis. Die Identität von $\mathfrak{G}^n$ ist stetig. Nach B ist also die Abbildung $(g, y) \to g \cdot y$ von $\mathfrak{G}^n \times S^n$ in S^n stetig, also erst recht die Abbildung p.

Es sei O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n, $j: O_{n+1} \to \mathfrak{G}^n$ die „Injektion" (s. U). Die Abbildung $p \circ j$ ist Projektion eines Faserraumes $\{O_{n+1}, p \circ j, S^n, O_n, O_n\}$ mit Faser und Gruppe $O_n = (p \circ j)^{-1}(y_0)$ (s. [8], 7.6). Es gibt also ein System offener Mengen $V_k \subset S^n$ und stetiger Abbildungen $\varphi_k: V_k \to O_{n+1}$ mit $\bigcup_k V_k = S^n$ und $x = (p \circ j)\left(\varphi_k(x)\right) = \left(j \circ \varphi_k(x)\right) \cdot y_0$, $x \in V_k$ (d. s. lokale Schnittflächen in O_{n+1}).

Wir machen O_n zur topologischen Transformationengruppe von G^n (s. U), indem wir die Elemente r von O_n als „Linksverschiebungen" von G^n auffassen: $r \cdot g = j(r) \circ g$, $g \in G^n$. Wir müssen nachweisen, daß $r \cdot g$ stetig ist in beiden Variablen. Das ist aber der Fall, weil j und die $\circ$-Multiplikation stetig sind (s. D).

Wir definieren nun $\Phi_k: V_k \times G^n \to p^{-1}(V_k)$ durch $\Phi_k(x, g) = \left(j \circ \varphi_k(x)\right) \circ g$, $x \in V_k$, $g \in G^n$. Φ_k ist stetig, weil j, φ_k und die $\circ$-Multiplikation stetig sind. Entsprechend ist die durch $\Phi_k^-(b) = \left(p(b), (j \circ \varphi_k^{-1}(p(b))) \circ b\right)$[10]), $b \in p^{-1}(V_k)$, definierte Abbildung $\Phi_k^-: p^{-1}(V_k) \to V_k \times G^n$ stetig.

Für $x \in V_k$, $g \in G^n$ ist

$$p \circ \Phi_k(x, g) = p\left((j \circ \varphi_k(x)) \circ g\right) = \left(j \circ \varphi_k(x)\right) \circ g \cdot y_0 = x,$$

und daher für $x \in V_i \cap V_k$, $g \in G^n$:

$$\Phi_i^-\left(\Phi_k(x, g)\right) = \left(x, (j \circ \varphi_i^{-1}(x)) \circ (j \circ \varphi_k(x)) \circ g\right) = \left(x, (j(\varphi_i^{-1}(x)\, \varphi_k(x))) \circ g\right).$$

Daraus geht hervor

1. $\Phi_k^- \circ \Phi_k(x, g) = (x, g)$, $x \in V_k$, $g \in G^n$. Man beweist entsprechend: $\Phi_k \circ \Phi_k^-(b) = b$, $b \in p^{-1}(V_k)$. Φ_k ist also ein Homöomorphismus, $\Phi_k^- = \Phi_k^{-1}$.

2. Für $x \in V_i \cap V_k$, $g \in G^n$ ist $\Phi_i^{-1}\left(\Phi_k(x, g)\right) = \left(x, g_{ik}(x) \cdot g\right)$, $g_{ik}(x) = \varphi_i^{-1}(x)\, \varphi_k(x) \in O_n$, und $g_{ik}(x)$ hängt stetig von x ab.

Durch $\mathfrak{G}^n$, S^n, p, G^n, O_n, V_k, Φ_k ist also ein „Koordinatenbündel" (s. [8], 2.3) eines Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ gegeben, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Wir betrachten die Homotopiefolge des Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ (s. [8], § 17):

$$(18) \qquad \to \pi_{m+1}(S^n, y_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_m(G^n, e) \xrightarrow{i^*} \pi_m(\mathfrak{G}^n, e) \xrightarrow{p^*} \pi_m(S^n, y_0) \to, \quad m > 0.$$

(Wir hätten uns zur Herleitung dieser Folge auch auf das allgemeine Theorem 4 in [3] berufen können.)

Die Folge (18) ist exakt, also

$$\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)/i^*\left(\pi_m(G^n, e)\right) \approx p^*\left(\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)\right).$$

[10]) φ_k^{-1} ist die Abbildung $x \to (\varphi_k(x))^{-1}$ von V_k in O_{n+1}.

Bezeichnen wir allgemein die Ordnung einer Gruppe π mit $[\pi]$, so folgt hieraus

$$(19)\qquad \begin{cases} [\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)] = [i^*(\pi_m(G^n, e))] \cdot [p^*(\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)] \\ \qquad\qquad \leq [\pi_m(G^n, e)] \cdot [\pi_m(S^n, y_0)], \qquad m > 0. \end{cases}$$

G_1^n sei der Teilraum von G^n, der aus den stetigen Abbildungen vom Grade 1 besteht. Eine Selbstabbildung von S^n vom Grade 1, die den Punkt y_0 festläßt, kann so in die Identität von S^n deformiert werden, daß der Bildpunkt von y_0 während der ganzen Deformation fest bleibt; m. a. W. G_1^n ist die Bogenkomponente von e in G^n (s. C). Wir können daher $\pi_m(G^n, e)$ und $\pi_m(G_1^n, e)$, $m > 0$, in natürlicher Weise identifizieren. Nach [*10*], 2.10 läßt sich ein Isomorphismus $I_1 : \pi_m(G_1^n, e) \to \pi_{m+n}(S^n, y_0)$ angeben. Auf Grund der Identifikation $\pi_m(G^n, e) = \pi_m(G_1^n, e)$ wird hieraus

$$(20)\qquad I_1 : \pi_m(G^n, e) \approx \pi_{m+n}(S^n, y_0), \qquad m, n > 0.$$

Aus (20) und (19) folgt

$$(21)\qquad [\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)] \leq [\pi_{m+n}(S^n, y_0)] \cdot [\pi_m(S^n, y_0)], \qquad m, n > 0.$$

Hieraus und aus dem Korollar zu Satz 3 folgt

Satz 5. *Es gibt höchstens* $[\pi_{m+n-1}(S^n)] \cdot [\pi_{m-1}(S^n)]$ *paarweise nicht* f*-homotopieäquivalente* (s. Def. 5) *Faserräume mit Basis* S^m, $m > 1$, *und Faser* S^n, $n > 0$. ($[\pi_i(S^n)]$ *bezeichnet die Ordnung der Gruppe* $\pi_i(S^n, y_0)$.)

Satz 5 gewinnt wesentlich an Inhalt durch die Ergebnisse von J. P. Serre über die Gruppen $\pi_m(S^n)$. Bekanntlich ist $\pi_m(S^n) = 0$ für $m < n$ und $\pi_n(S^n)$ frei zyklisch (s. Lefschetz: Introduction to Topology, S. 176). Hieraus und aus [*6*], S. 498, Prop. 5 ergibt sich:

$$(22)\qquad \begin{cases} \text{Die Gruppen } \pi_m(S^n) \text{ sind endlich mit Ausnahme von } \pi_k(S^k) \text{ und} \\ \pi_{4k-1}(S^{2k}),\ k, m, n = 1, 2, \ldots.\ \pi_k(S^k) \text{ ist frei zyklisch und } \pi_{4k-1}(S^{2k}) \\ \text{ist direkte Summe einer frei zyklischen und einer endlichen Gruppe.} \end{cases}$$

Wir gehen nun auf die Frage ein, für welche (m, n) es Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ (O_{n+1} = Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n) gibt, die f-homotopieäquivalent (s. Def. 5) aber nicht äquivalent sind. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in Satz 6 zusammengefaßt.

Hilfssatz 4. *Es sei* O_{n+1} *die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen der n-Sphäre* S^n, $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A).

Die Gruppen $\pi_m(O_{n+1}, e)$ *und* $\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)$, $e =$ *Identität von* S^n, $m, n > 0$, *sind endlich erzeugt, und wenn* $p_{m,n}$ *resp.* $\mathfrak{p}_{m,n}$ *den Rang von* $\pi_m(O_{n+1}, e)$ *resp.* $\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)$ *bezeichnet* (*Rang = Rang des freien Anteils*), *so gilt*

1. *für* $m \equiv 0$ (2) $\qquad p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n}$,
2. *für* $m \equiv 1$ (4) $\qquad p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n}$ *für* $n \neq m$,
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad p_{m,m} = 1 = \mathfrak{p}_{m,m}$,

3. *für* $m \equiv -1$ (4) $\quad p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n}$ *für* $n < \frac{m+1}{2}$,

$$p_{m,\frac{m+1}{2}} = 1 = \mathfrak{p}_{m,\frac{m+1}{2}},$$

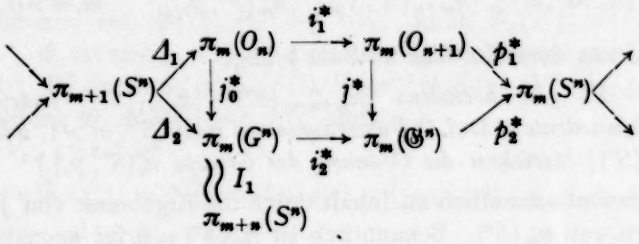
$$p_{m,n} = 1, \quad \mathfrak{p}_{m,n} = 0 \quad \text{für} \quad n > \frac{m+1}{2}, \quad m \neq n,$$

$$p_{m,m} = 2, \quad \mathfrak{p}_{m,m} = 1.$$

Der Kern von $j^* : \pi_m(O_{n+1}, e) \to \pi_m(\mathfrak{G}^n, e)$ (s. U) *hat den Rang* 1 *für* $m \equiv -1$ (4), $n > \frac{m+1}{2}$ *und den Rang* 0 *in allen anderen Fällen.*

Beweis. Wir betrachten den Faserraum $\tilde{\mathfrak{G}}^n = \{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ des Hilfssatzes 3. Die Abbildung $p \circ j : O_{n+1} \to S^n$ (s. U) ist Projektion eines Faserraumes $\tilde{O}_{n+1} = \{O_{n+1}, p \circ j, S^n, O_n, O_n\}$ (s. [8], 7.6). j ist also eine f-Abbildung von $\tilde{O}_{n+1}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}^n$ (s. Def. 1) und induziert daher einen Homomorphismus der Homotopiefolge von $\tilde{O}_{n+1}$ in die von $\tilde{\mathfrak{G}}^n$ (vgl. hierzu [8], 17.5; dort werden zwar faserteue Abbildungen betrachtet, benutzt wird jedoch nur, daß es sich um fasernweise Abbildungen handelt):

(23)



Wir haben bei der Bezeichnung der Homotopiegruppen in (23) die Bezugspunkte weggelassen. Der Bezugspunkt ist y_0 bei $\pi_i(S^n)$ und e bei den übrigen vorkommenden Homotopiegruppen. $j_0 : O_n \to G^n$ bezeichnet die durch j definierte Abbildung[5], j_0^* den durch j_0 induzierten Homomorphismus.

Ist $L \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\mu} N$ eine exakte Folge abelscher Gruppen und sind L und N endlich erzeugt, dann ist auch M endlich erzeugt, und es ist Rang $(M) =$ Rang $(\lambda(L))$ + Rang $(\mu(M)) \leq$ Rang (L) + Rang (N). Dies wird im folgenden ohne besonderen Hinweis benutzt werden. Der Beweis dafür ist sehr einfach; wir führen ihn für die erste Behauptung durch:

L und N sind endlich erzeugt, also auch $\lambda(L)$ (als Faktorgruppe von L) und $\mu(M)$ (als Untergruppe von N). $\{l_i\}, \{M_k\}$ seien endliche Erzeugendensysteme von $\lambda(L), \mu(M)$. Für jedes k sei $m_k \in M$ so gewählt, daß $\mu(m_k) = M_k$ ist. Dann ist $\{l_i\} \cup \{m_k\}$ ein Erzeugendensystem von M. Sei nämlich α ein beliebiges Element aus M. Es ist $\mu(\alpha) = \sum_k b_k M_k$ mit gewissen ganzen Zahlen b_k. Setzen wir $\alpha' = \alpha - \sum_k b_k m_k$, so ist $\mu(\alpha') = 0$, also $\alpha' \in \lambda(L)$, also $\alpha' = \sum_i a_i l_i$ mit gewissen ganzen Zahlen a_i. Hieraus ergibt sich aber $\alpha = \sum_i a_i l_i + \sum_k b_k m_k$.

Nach (20) und (22) sind $\pi_m(G^n)$ und $\pi_m(S^n)$ endlich erzeugt. Aus der zweiten Zeile von (23) folgt dann, daß $\pi_m(\mathfrak{G}^n)$ endlich erzeugt ist. Entsprechend folgt

aus der ersten Zeile von (23) durch vollständige Induktion nach n, daß $\pi_m(O_{n+1})$ endlich erzeugt ist. Den Anfang der Induktion liefert $\pi_m(O_2) \approx \pi_m(S^1)$ (s. [8], § 22).

1. $m \equiv 0\ (2)$.

Nach (21) und (22) ist $\pi_m(\mathfrak{G}^n)$ endlich außer eventuell für $n = m$. Ferner ist $p_2^*: \pi_m(\mathfrak{G}^m) \to \pi_m(S^m)$ Null. Wäre nämlich $p_2^* \neq 0$, gäbe es also eine stetige Abbildung $\tilde{f}$: $(S^m, y_0) \to (\mathfrak{G}^m, e)$ derart, daß $p \circ \tilde{f}$ ein von 0 verschiedenes Element $\alpha \in \pi_m(S^m)$ repräsentierte, so wäre $f: S^m \times S^m \to S^m$, definiert durch $f(x, x') = \tilde{f}(x) \cdot x'$, eine wegen B stetige Abbildung vom Typus $(\alpha, 1)$ (s. [4], S. 431). Eine solche gibt es aber nicht nach [4], Satz III und Satz I, S. 427. $i_2^*: \pi_m(G^m) \to \pi_m(\mathfrak{G}^m)$ ist also ein Homomorphismus auf. Daraus folgt aber nach (20) und (22), daß $\pi_m(\mathfrak{G}^m)$ endlich ist.

Aus der ersten Zeile von (23) schließt man durch Induktion nach n und unter Benutzung von (22), daß $\pi_m(O_{n+1})$ endlich ist für $n < m$. Ferner ist $p_1^*: \pi_m(O_{m+1}) \to \pi_m(S^m)$ Null, denn $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ und $p_2^* = 0$. Also ist $\pi_m(O_{m+1})$ endlich, und durch vollständige Induktion nach n folgt aus der ersten Zeile von (23): $\pi_m(O_{n+1})$ ist endlich für $n \geq m$.

Da $\pi_m(O_{n+1})$ endlich ist für $m \equiv 0\ (2)$, muß auch der Kern von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \to \pi_m(\mathfrak{G}^n)$ endlich sein.

2. und 3. $m \equiv 1\ (2)$.

Nach [8], 23.4 ist $p_1^*: \pi_m(O_{m+1}) \to \pi_m(S^m)$ nicht Null [mindestens alle durch zwei teilbaren Elemente von $\pi_m(S^m)$ sind Bild]. Daher ist Rang $(\pi_m(O_{m+1})) =$ Rang $(i_1^*(\pi_m(O_m))) + 1$. Nun ist $\pi_{m+1}(S^m)$ endlich nach (22), also Rang $(\pi_m(O_m))$ = Rang $(i_1^*(\pi_m(O_m)))$, somit

$$p_{m,m} = p_{m,m-1} + 1, \qquad m \equiv 1\ (2). \tag{24}$$

Aus $p_1^*(\pi_m(O_{m+1})) \neq 0$ und $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ folgt:

a) $p_2^*: \pi_m(\mathfrak{G}^m) \to \pi_m(S^m)$ ist nicht Null. Da $\pi_m(G^m)$ endlich ist nach (20) und (22), ergibt sich aus der zweiten Zeile von (23)

$$\mathfrak{p}_{m,m} = 1, \qquad m \equiv 1\ (2). \tag{25}$$

b) Der Kern von $j^*: \pi_m(O_{m+1}) \to \pi_m(\mathfrak{G}^m)$ hat höchstens den Rang $p_{m,m} - 1$. Wegen $\mathfrak{p}_{m,m} = 1$ hat er mindestens den Rang $p_{m,m} - 1$, d.h.

(26) der Kern von $j^*: \pi_m(O_{m+1}) \to \pi_m(\mathfrak{G}^m)$, $m \equiv 1\ (2)$, hat den Rang $p_{m,m} - 1$.

Der Homomorphismus $p_1^*: \pi_{m+1}(O_{m+2}) \to \pi_{m+1}(S^{m+1})$ ist Null wegen $m + 1 \equiv 0\ (2)$ (s. 1. Teil dieses Beweises). $\Delta_1: \pi_{m+1}(S^{m+1}) \to \pi_m(O_{m+1})$ ist also ein Isomorphismus und der Kern von $i_1^*: \pi_m(O_{m+1}) \to \pi_m(O_{m+2})$ hat den Rang 1. Dasselbe gilt für den Kern von $i_2^*: \pi_m(G^{m+1}) \to \pi_m(\mathfrak{G}^{m+1})$. Wegen $\pi_m(S^{m+1}) = 0$ folgt hieraus und aus der ersten Zeile von (23)

$$p_{m,m+1} = p_{m,m} - 1, \qquad m \equiv 1\ (2), \tag{27}$$

aus der zweiten Zeile Rang $(\pi_m(\mathfrak{G}^{m+1})) =$ Rang $(\pi_m(G^{m+1})) - 1$, also wegen (20) und (22)

$$\mathfrak{p}_{m,m+1} = 0, \qquad m \equiv 1\ (2). \tag{28}$$

Wir unterscheiden nun

2. $m \equiv 1\ (4)$.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n: $p_{m,n} = 0$ für $n < m$, aus (24) $p_{m,m} = 1$, aus (27) $p_{m,m+1} = 0$ und wiederum durch vollständige Induktion nach n aus der ersten Zeile von (23): $p_{m,n} = 0$ für $n \geq m+1$.

Hieraus und aus (26) folgt die über den Rang des Kernes von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \to \pi_m(\mathfrak{G}^n)$ im Falle $m \equiv 1\ (4)$ gemachte Aussage.

Nach (21) und (22) ist $\mathfrak{p}_{m,n} = 0$ außer eventuell für $n = m$ oder $n = m+1$. Nach (25) und (28) ist $\mathfrak{p}_{m,m} = 1$, $\mathfrak{p}_{m,m+1} = 0$.

3. $m \equiv -1\ (4)$.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n: $p_{m,n} = 0$ für $n < \frac{m+1}{2}$. Für diese n ist dann auch der Kern von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \to \pi_m(\mathfrak{G}^n)$ endlich, wie behauptet.

$\pi_{m-1}\left(O_{\frac{m+1}{2}}\right)$ ist endlich wegen $m-1 \equiv 0\,(2)$ (s. 1. Teil dieses Beweises), und $\pi_m\left(S^{\frac{m+1}{2}}\right)$ hat den Rang 1 [s. (22)]. Der Kern von $\Delta_1: \pi_m\left(S^{\frac{m+1}{2}}\right) \to \pi_{m-1}\left(O_{\frac{m+1}{2}}\right)$, d. i. $p_1^*\left(\pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}+1}\right)\right)$, muß also den Rang 1 haben. $\pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}}\right)$ ist endlich, also $p_{m,\frac{m+1}{2}} = 1$.

Aus Rang $\left(p_1^*\left(\pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}+1}\right)\right)\right) = 1 = p_{m,\frac{m+1}{2}}$ und $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ folgt:

a) Rang $\left(p_2^*\left(\pi_m\left(\mathfrak{G}^{\frac{m+1}{2}}\right)\right)\right) = 1$. Da $\pi_m\left(G^{\frac{m+1}{2}}\right)$ endlich ist nach (20) und (22), ergibt sich aus der zweiten Zeile von (23)

$$\mathfrak{p}_{m,\frac{m+1}{2}} = 1, \qquad m \equiv -1\ (4). \tag{29}$$

b) Der Kern von $j^*: \pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}+1}\right) \to \pi_m\left(\mathfrak{G}^{\frac{m+1}{2}}\right)$ hat den Rang 0.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n: $p_{m,n} = 1$ für $\frac{m+1}{2} \leq n < m$, aus (24) $p_{m,m} = 2$, aus (27) $p_{m,m+1} = 1$ und wiederum durch vollständige Induktion nach n aus der ersten Zeile von (23): $p_{m,n} = 1$ für $n \geq m+1$.

Nach (21) und (22) ist $\mathfrak{p}_{m,n} = 0$ außer eventuell für $n = \frac{m+1}{2}$, $n = m$ oder $n = m+1$. Nach (29), (25) und (28) ist $\mathfrak{p}_{m,\frac{m+1}{2}} = 1$, $\mathfrak{p}_{m,m} = 1$, $\mathfrak{p}_{m,m+1} = 0$.

Der Rang des Kernes von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \to \pi_m(\mathfrak{G}^n)$ ist 1 für $n > \frac{m+1}{2}$. Dies folgt für $n \neq m$ aus $p_{m,n} = 1$, $\mathfrak{p}_{m,n} = 0$ und für $n = m$ aus $p_{m,m} = 2$ und (26).

Bemerkung 5. Nach [7], Prop. 3, Coroll. 2, S. 289 ist $p_{m,n}$ gleich der m-ten Bettischen Zahl von R_{n+1} (= Gruppe der Drehungen der S^n). Die

Bettischen Zahlen von R_{n+1} sind von PONTRJAGIN [5] u. a. bestimmt worden. Wir hätten uns also, was die $p_{m,n}$ betrifft, auf diese Ergebnisse berufen können. Der Beweis des Hilfssatzes 4 wäre dadurch jedoch nicht wesentlich einfacher geworden.

Satz 6. *Es seien m und n natürliche Zahlen, O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen der n-Sphäre S^n.*

I. Genau dann, wenn $m \equiv 0\ (2)$, $n = m-1$
oder $m \equiv 0\ (4)$, $n \geq \frac{m}{2}$ *ist,*

gibt es unendlich viele paarweise nicht äquivalente Faserräume

$$\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}.$$

II. Ist $m \equiv 0\ (2)$, $n = m-1$
oder $m \equiv 0\ (4)$, $n = \frac{m}{2}$,

so gibt es unendlich viele paarweise nicht f-homotopieäquivalente (s. Def. 5) *Faserräume* $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$.

Ist dagegen (m, n) ein Zahlenpaar, das keiner dieser beiden Bedingungen genügt, so gibt es nur endlich viele paarweise nicht f-homotopieäquivalente Faserräume mit Basis S^m und Faser S^n.

III. Ist $m \equiv 0\ (4)$ *und* $n > \frac{m}{2}$ *so gibt es zu jedem Faserraum*

$$\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$$

unendlich viele zu $\mathfrak{B}$ f-homotopieäquivalente aber untereinander paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B}_\nu = \{B_\nu, p_\nu, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Ist dagegen $m \not\equiv 0\ (4)$ *oder* $n \leq \frac{m}{2}$, *so gibt es nur endlich viele f-homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume mit Basis S^m, Faser S^n und Gruppe O_{n+1}.*

IV. Sind $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i = 1, 2$, *f-homotopieäquivalente Faserräume und ist* $m \leq 3$ *oder* $n \leq 2$, *dann sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ äquivalent.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A), $j: O_{n+1} \to \mathfrak{G}^n$ die „Injektion", $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \to \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$ der durch j induzierte Homomorphismus (s. U), e die Identität von S^n.

O_{n+1} zerfällt in zwei Bogenkomponenten; die eine, R_{n+1}, enthält die Drehungen der S^n, die andere enthält Abbildungen vom Grade -1. $\mathfrak{G}_1(S^n, S^n)$ (s. I) zerfällt ebenfalls in zwei Bogenkomponenten; die eine besteht aus den Selbstabbildungen der S^n vom Grade 1, die andere aus den Abbildungen vom Grade -1. Die Gruppen $\pi_0(O_{n+1}, e)$ (s. [8], 16.10) und $\pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ (s. L) sind also zyklisch von der Ordnung 2 und $j^*: \pi_0(O_{n+1}, e) \to \pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ ist ein Isomorphismus auf. Wir identifizieren: $\pi_0(O_{n+1}, e) = \pi_0(\mathfrak{G}^n, e) = \pi_0$. $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \to \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ wird damit zu einem Operatorhomomorphismus bezüglich der Operatorengruppe π_0 (s. [8], 16.10 und Q).

Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i = 1, 2$, Faserräume mit den charakteristischen Abbildungen T_i (s. V). T_i^* bezeichne das durch T_i repräsentierte Element von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$.

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann äquivalent, wenn T_1^* und T_2^* äquivalent sind bezüglich π_0 (s. [8], 18.3).

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann f-homotopieäquivalent, wenn $j^*(T_1^*)$ und $j^*(T_2^*)$ äquivalent sind bezüglich π_0 (s. Satz 4).

Jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \to (O_{n+1}, e)$ kommt als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ vor (s. [8], 18.2).

Hieraus ergibt sich:

a) Ist $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \to \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ ein Isomorphismus und sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ f-homotopieäquivalent, dann sind sie sogar äquivalent.

b) Ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \to \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ endlich, dann gibt es nur endlich viele f-homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$. Ist nämlich $\alpha \in \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ und α' das Bild von α bei dem einzigen eventuell nicht trivialen Operator aus π_0, dann gibt es nur endlich viele Elemente von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$, die sich bei j^* in α oder α' abbilden.

c) Ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \to \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ unendlich, dann gibt es zu jedem Faserraum $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ unendlich viele zu $\mathfrak{B}$ f-homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B}_\nu = \{B_\nu, p_\nu, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Dann gibt es nämlich zu jedem $\alpha \in j^*(\pi_{m-1}(O_{n+1}, e))$ unendlich viele $\beta_\mu \in \pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ mit $j^*(\beta_\mu) = \alpha$. Höchstens je zwei der β_μ sind äquivalent bezüglich π_0.

Wir beweisen zunächst die Aussagen des Satzes 6 für den Fall $m = 1$. Es gibt zwei nicht äquivalente Faserräume $\{B, p, S^1, S^n, O_{n+1}\}$, denn $\pi_0(O_{n+1}, e)$ enthält zwei Elemente (s. [8], 18.5). Diese beiden Faserräume sind nicht f-homotopieäquivalent, denn $j^*: \pi_0(O_{n+1}, e) \to \pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ ist ein Isomorphismus [s. a)]. Es gibt nur zwei nicht f-homotopieäquivalente Faserräume mit Basis S^1 und Faser S^n, denn $\pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ enthält nur zwei Elemente (s. Koroll. zu Satz 3).

Wir setzen von nun an $m > 1$ voraus.

I. Die Gruppe $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ ist nach Hilfssatz 4 genau dann unendlich, wenn $m \equiv 0\ (2)$, $n = m - 1$ oder $m \equiv 0\ (4)$, $n \geq \frac{m}{2}$ ist. Höchstens je zwei Elemente von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ sind äquivalent bezüglich π_0. Hieraus und aus [8], 18.5 folgt die Behauptung.

II. Ist $m \equiv 0\ (2)$, $n = m - 1$ oder $m \equiv 0\ (4)$, $n = \frac{m}{2}$, so ist die Gruppe $j^*(\pi_{m-1}(O_{n+1}, e))$ nach Hilfssatz 4 unendlich. Höchstens je zwei Elemente dieser Gruppe sind äquivalent bezüglich π_0. Hieraus und aus Satz 4 folgt die erste Behauptung von II. Genügt das Zahlenpaar (m, n) keiner der beiden eben genannten Bedingungen, so ist die Gruppe $\pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ endlich nach Hilfssatz 4. Hieraus und aus dem Korollar zu Satz 3 folgt die zweite Behauptung von II.

III. Nach Hilfssatz 4 ist der Kern von $j^*:\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)\to\pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ genau dann unendlich, wenn $m\equiv 0\ (4)$ und $n>\frac{m}{2}$ ist. Hieraus und aus b) und c) S. 134 folgt die Behauptung.

IV. Wir beweisen, daß $j^*:\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)\to\pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ ein Isomorphismus ist für $m\leq 3$ oder $n\leq 2$. Dann folgt die Behauptung aus a) S. 134. Da R_{n+1} die Bogenkomponente von e in O_{n+1} ist, unterscheiden wir nicht zwischen $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ und $\pi_{m-1}(R_{n+1}, e)$.

$m=2$. Wir betrachten das Diagramm (23) mit $m=1$. Nach [*10*], 5.2 ist $I_1\circ j_0^*:\pi_1(O_n)\to\pi_{n+1}(S^n)$ ein Isomorphismus auf, also wegen (20) auch j_0^*. Sei $\alpha\in\pi_1(O_{n+1})$ und $j^*(\alpha)=0$. Dann ist $p_1^*(\alpha)=p_2^*\circ j^*(\alpha)=0$. Die erste Zeile von (23) ist exakt, also $\alpha=i_1^*(\beta)$ für geeignetes $\beta\in\pi_1(O_n)$. Nun ist $i_2^*\circ j_0^*(\beta)=j^*\circ i_1^*(\beta)=j^*(\alpha)=0$ und die zweite Zeile von (23) exakt, also $j_0^*(\beta)=\Delta_2(\gamma)$ für geeignetes $\gamma\in\pi_2(S^n)$. Hieraus folgt $\beta=(j_0^*)^{-1}\circ\Delta_2(\gamma)=\Delta_1(\gamma)$. Die erste Zeile von (23) ist exakt, also $0=i_1^*\circ\Delta_1(\gamma)=i_1^*(\beta)=\alpha$. $j^*:\pi_1(O_{n+1})\to\pi_1(\mathfrak{G}^n)$ ist also ein Isomorphismus.

$m=3$. Nach [*8*], 22.10 ist $\pi_2(O_{n+1})=0$. $j^*:\pi_2(O_{n+1})\to\pi_2(\mathfrak{G}^n)$ ist also sicher ein Isomorphismus.

$n=1$. Wir betrachten das Diagramm (23) mit $n=1$ und $m-1$ statt m. $p_1^*:\pi_{m-1}(O_2)\to\pi_{m-1}(S^1)$ ist ein Isomorphismus auf $(\pi_{m-1}(O_2)=\pi_{m-1}(R_2)$, $R_2=S^1)$. Wegen $p_1^*=p_2^*\circ j^*$ ist also auch $j^*:\pi_{m-1}(O_2)\to\pi_{m-1}(\mathfrak{G}^1)$ ein Isomorphismus.

$n=2$. Wir setzen $m>2$ voraus und betrachten (23) mit $n=2$ und $m-1$ statt m. Nach [*8*], 22.2 ist $\pi_{m-1}(O_2)=0$, also $i_1^*(\pi_{m-1}(O_2))=0$, also $p_1^*:\pi_{m-1}(O_3)\to\pi_{m-1}(S^2)$ ein Isomorphismus und wegen $p_1^*=p_2^*\circ j^*$ auch $j^*:\pi_{m-1}(O_3)\to\pi_{m-1}(\mathfrak{G}^2)$ ein Isomorphismus.

X. Die einfachsten Beispiele von Faserräumen $\mathfrak{B}_i=\{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i=1, 2$, die f-homotopieäquivalent aber nicht äquivalent sind, erhält man nach Satz 6 für $m=4$, $n=3$. Wir geben zur Erläuterung der allgemeinen Ergebnisse einen Faserraum $\mathfrak{B}=\{B, p, S^4, S^3, O_4\}$ an, der dem Produkt $S^4\times S^3$ f-homotopieäquivalent aber nicht äquivalent ist. Wir definieren $\mathfrak{B}$ durch eine charakteristische Abbildung $T:S^3\to O_4$ (s. V).

$\pi_3(O_3, e)$ ist frei zyklisch und ein erzeugendes Element dieser Gruppe wird durch die zweiblättrige Überlagerung $\tau:S^3\to R_3$ repräsentiert (s. [*8*], 22.3). $\tau^{12}:S^3\to O_3$ sei durch $x\to(\tau(x))^{12}$, $x\in S^3$ erklärt. τ^{12} repräsentiert das Element $12\,\tau^*\in\pi_3(O_3, e)$ (s. [*8*], 16.7).

Wir betrachten das Diagramm (23) für $m=3$, $n=3$. Nach [*7*], Prop. 10, S. 284 hat $\pi_6(S^3)$ die Ordnung 12. Hieraus und aus (20) folgt $j_0^*(12\tau^*)=12j_0^*(\tau^*)=0$. Dagegen ist $i_1^*(12\tau^*)\neq 0$, denn $i_1^*:\pi_3(O_3)\to\pi_3(O_4)$ ist ein Isomorphismus (s. [*8*], 22.6).

Es sei nun $\mathfrak{B}=\{B, p, S^4, S^3, O_4\}$ ein Faserraum mit charakteristischer Abbildung $T=i_1\circ\tau^{12}$ (s. [*8*], 18.2), $i_1:O_3\to O_4$ die Injektion. $\mathfrak{B}$ ist dem

Produkt $S^4 \times S^3$ nicht äquivalent (s. [8], 18.3). Wegen $j^*(i_1^*(12\tau^*)) = i_2^* \circ j_0^*(12\tau^*) = 0$ ist $j \circ T$ nullhomotop, also $\mathfrak{B}$ dem Produkt $S^4 \times S^3$ f-homotopieäquivalent[11]) (s. Satz 3).

Literatur.

[1] ARENS, R.: Topologies for homeomorphism groups. Amer. J. Math. **68**, 593—610 (1946). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, chap. X: Espaces fonctionnels. — [3] FOX, R. H.: On fibre spaces II. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 733—735 (1943). — [4] HOPF, H.: Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fundamenta Mathematicae **25**, 427—440 (1935). — [5] PONTRJAGIN, L.: Sur les nombres de Betti des groupes de Lie. C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 1277—1280 (1935). — [6] SERRE, J.P.: Homologie singulière des espaces fibrés; applications. Ann. of Math. **54**, 425—505 (1951). — [7] SERRE, J. P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. **58**, 258—294 (1953). — [8] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton Math., Ser. 14. — [9] THOM, R.: Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. École norm. sup. (3) **69**, 109—182 (1952). — [10] WHITEHEAD, G. W.: On products in homotopy groups. Ann. of Math. **47**, 460—475 (1946). — [11] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial Homotopy. I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).

[11]) Dagegen ist der zu $\mathfrak{B}$ assoziierte Hauptfaserraum $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\tilde{B}, \tilde{p}, S^4, O_4, O_4\}$ dem Produkt $S^4 \times O_4$ nicht f-homotopieäquivalent (vgl. M. L. CURTIS, Ann. of Math. **60**, Theorem 10.1). Sonst gäbe es nämlich eine f-Abbildung $S^4 \times O_4 \to \tilde{\mathfrak{B}}$. Eine Schnittfläche in $S^4 \times O_4$ ginge dabei in eine Schnittfläche in $\tilde{\mathfrak{B}}$ über. $\tilde{\mathfrak{B}}$ wäre also dem Produkt $S^4 \times O_4$ äquivalent (s. [8], 8.3), also auch $\mathfrak{B}$ äquivalent zu $S^4 \times S^3$ (s. [8], 8.2). Dies beantwortet eine Frage von R. THOM [9], S. 167.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. Dezember 1954.)

André, J.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 137—160 (1955)

Projektive Ebenen über Fastkörpern.

Von
Johannes André.

Einleitung.

1. Ziel dieser Arbeit ist es, als Beginn genauerer Untersuchungen über die Struktur der Translationsebenen (das sind projektive Ebenen, deren Translationsgruppe die eigentlichen Punkte transitiv permutiert, vgl. [1], Definition 6), besonders einfache Typen solcher Ebenen genauer zu betrachten. Eine Translationsebene kann nach [1] und [4][1]) aufgefaßt werden als eine Ebene über einem Quasikörper; das ist eine algebraische Struktur, in der im wesentlichen alle Schiefkörperaxiome gelten, mit Ausnahme des Assoziativgesetzes der Multiplikation und des rechtsseitigen Distributivgesetzes $a(b+c)=ab+ac$ (Definition 10 in [1]).

Es erweisen sich nun unter den Translationsebenen nächst den Desarguesschen Ebenen die Ebenen über einem *Fastkörper* („Fastkörperebenen") als besonders einfach. Dabei verstehen wir unter einem Fastkörper einen Quasikörper, in dem noch zusätzlich die Multiplikation assoziativ ist. Ebenen dieser Art werden im Verlauf der Arbeit genauer untersucht. Gingerich kennzeichnete in [3] (vgl. auch [6]) die Fastkörperebenen unter den Translationsebenen auf folgende Weise: Es gibt eine eigentliche Gerade und einen nicht auf dieser gelegenen uneigentlichen Punkt derart, daß die Gruppe aller Perspektivitäten mit diesem Punkt als Zentrum und jener Geraden als Achse transitiv ist in denjenigen Punkten der uneigentlichen Geraden, die von dem Schnittpunkt mit der Achse und dem Zentrum verschieden sind. Klingenberg kennzeichnete in [5] die Fastkörperebenen durch einen Schließungssatz (Fig. 4 in [5], s. auch S. 128 unten). Lombardo-Radice und Zappa untersuchten in [7] bzw. [9] projektive Ebenen, die zu den hier betrachteten Fastkörperebenen dual sind.

Eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit ist der sog. *Eindeutigkeitssatz* (Satz 7), der besagt, daß nichtisomorphe Fastkörper auch nichtisomorphe Fastkörperebenen erzeugen. Einen entsprechenden Satz für beliebige Quasikörper und Translationsebenen gibt es bekanntlich nicht, wie bereits Hall in [4] (Thm. 5.8) gezeigt hat. Außerdem wird hier eine weitgehende Übersicht über die Struktur der Kollineationsgruppe einer Fastkörperebene gegeben; genauer gesagt: Die Untersuchung der Kollineationsgruppe wird zurückgeführt auf diejenige der multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen Fastkörperelemente und der Automorphismengruppe des Fastkörpers. Dabei ist allerdings zu bemerken, daß die Ebene über dem kleinsten eigentlichen

[1]) Vgl. etwa [1], § 5.

Fastkörper (dieser besteht aus 9 Elementen) — im folgenden kurz „Ausnahme-Ebene" genannt — eine wesentlich anders geartete Kollineationsgruppe besitzt als die übrigen Fastkörperebenen.

2. Der erste Paragraph bringt einige rein algebraische Eigenschaften von Fastkörpern, welche später benötigt werden, die aber auch für sich von Interesse sind. § 2 bringt einiges über die Kennzeichnung von Fastkörperebenen, welche über die oben erwähnten Untersuchungen von GINGERICH hinausgehen. Entscheidend ist hierfür der Begriff der *Zulässigkeit* eines geordneten Paares von Punkten der uneigentlichen Geraden einer Translationsebene. Ein solches Paar nennen wir zulässig, wenn die Gruppe aller Perspektivitäten mit dem einen Punkt des Paares als Zentrum und einer eigentlichen Geraden durch den anderen Punkt als Achse transitiv ist in den von diesen verschiedenen Punkten der uneigentlichen Geraden. (Die genaue Definition steht zu Beginn des § 2.) Für die Menge der zulässigen Punktepaare gibt es nur sechs wesentlich verschiedene Möglichkeiten, von der jede eine ganz bestimmte Art von Translationsebenen kennzeichnet (Satz 4). Zwei dieser Möglichkeiten (nämlich IV und V von Satz 4) charakterisieren die Ebenen über Fastkörpern, welche keine Schiefkörper sind. Solche Ebenen werden in den folgenden Paragraphen ausschließlich behandelt.

Es soll gleich bemerkt werden, daß eine Ebene über einem eigentlichen Fastkörper sich weitgehend verschieden verhält, je nachdem, ob sie vom Typ IV oder V (im Sinne von Satz 4) ist. Man kann diese Ebenen kurz folgendermaßen unterscheiden: In Ebenen vom Typ IV läßt *jede* Kollineation zwei verschiedene ausgezeichnete Punkte der uneigentlichen Geraden fest oder vertauscht sie (vgl. § 3, Satz 6). Dagegen ist in der einzigen Ebene vom Typ V, der schon oben erwähnten Ausnahme-Ebene, die Kollineationsgruppe einfach transitiv auf den Punkten der uneigentlichen Geraden (Satz 17).

In den §§ 3 bis 5 werden die von der Ausnahme-Ebene verschiedenen Fastkörperebenen näher untersucht. Allerdings gelten manche der dort gebrachten Untersuchungen auch für die Ausnahme-Ebene, zum Teil in etwas abgeänderter Form. In § 3 wird der oben erwähnte Eindeutigkeitssatz für Fastkörperebenen bewiesen. Die beiden nächsten Paragraphen bringen Untersuchungen über die Kollineationen der Fastkörperebenen. Aus [*1*], Satz 18 folgt sofort, daß jede Kollineation affin ist, d. h. die uneigentliche Gerade festläßt (Satz 5). § 4 untersucht diejenigen Kollineationen, welche sich aus Perspektivitäten zusammensetzen, das sind die projektiven Kollineationen. Die Struktur ihrer Gruppe ist eng verknüpft mit derjenigen der multiplikativen Gruppe des Fastkörpers (Satz 9). Die Gruppe aller Kollineationen, die in § 5 untersucht wird, erweist sich, modulo der projektiven Gruppe genommen, im wesentlichen als isomorph zur Automorphismengruppe des Koordinatenfastkörpers. Es ergibt sich, daß die Fastkörperebenen wesentlich weniger Kollineationen enthalten, als die DESARGUESschen Ebenen mit gleicher Punktanzahl (vgl. dazu Satz 13).

Im letzten Paragraphen wird, im Gegensatz zu den vorherigen, die Ausnahme-Ebene näher untersucht, insbesondere ihre Kollineationsgruppe. Es

zeigt sich, daß diese Gruppe viel reichhaltiger ist als die bei den übrigen Fastkörperebenen. Sie ist jedoch immer noch kleiner als die der DESARGUESschen Ebene mit gleicher Punkteanzahl. Die projektiven Kollineationen der Ausnahme-Ebene lassen sich dadurch kennzeichnen, daß sie gerade Permutationen auf den Punkten der uneigentlichen Geraden induzieren (Satz 22). Einige Ergebnisse des § 6 wurden bereits von M. HALL in [4], Anhang II, ohne Beweis angegeben.

§ 1. Algebraisches über Fastkörper.

1. Definition. Ein *Fastkörper*[2]) F, auch *assoziativer Quasikörper* genannt, ist ein Quasikörper[3]), in dem zusätzlich das Assoziativitätsgesetz der Multiplikation erfüllt ist. Wir stellen die Axiome, die in einem Fastkörper gelten, hier noch einmal zusammen:

Q0. *F besteht aus mindestens zwei Elementen.*

Q1. *Bezüglich der Addition ist F eine Gruppe.*

Q2. *Es gilt das linksseitige Distributivgesetz*

$$(b+c)\,a = b\,a + c\,a \quad \text{für alle} \quad a, b, c \in F.$$

Q3. *Es gilt $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in F$.*

Q4. *Es gibt ein $1 \in F$, so daß $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in F$ gilt.*

Q5. *Ist $a \neq 0$, so ist $ay = b$ eindeutig nach y lösbar.*

Q6. *Ist $a \neq b$, so ist $-xb + xa = c$ nach x lösbar.*

Q7. *Die Multiplikation von F ist assoziativ.*

Die von 0 verschiedenen Elemente eines Fastkörpers F bilden also bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, die *multiplikative Gruppe* $F^\times$ von F. Aus den Axiomen Q0 bis Q6 folgt nach [1], Satz 13 oder [8], Satz 1 die Kommutativität der Addition von F. Einen Fastkörper nennen wir *eigentlich*, wenn er kein Schiefkörper ist, d. h., wenn in ihm das rechtsseitige Distributivgesetz nicht immer erfüllt ist. Unter dem *Kern* $K(F)$ eines Fastkörpers F verstehen wir die Menge aller $s \in F$, für die $s(x+y) = sx + sy$ für alle $x, y \in F$ erfüllt ist. $K(F)$ ist ein Schiefkörper, wie in [1], § 6 gezeigt wurde.

ZASSENHAUS hat in [10] alle Fastkörper mit endlichvielen Elementen aufgestellt.

2. In der üblichen Weise folgt aus dem linksseitigen Distributivgesetz, daß in einem Fastkörper F die Beziehungen $0 \cdot a = 0$ und $(-a)b = -ab$ für alle $a, b \in F$ erfüllt sind. $a(-b) = -ab$ kann nicht auf die übliche Art gezeigt werden, da ja das rechtsseitige Distributivgesetz nicht notwendig gilt. Dennoch ist diese Beziehung richtig.

[2]) In [10] (allerdings mit rechts- statt linksseitigem Distributivgesetz und mit $b = 0$ in Q 6) *vollständiger Fastkörper* genannt.

[3]) Vgl. [1], S. 170ff.

Satz 1. *Die multiplikative Gruppe eines Fastkörpers F besitzt bei Charakteristik $\neq 2$ genau eine Involution*[4]*, nämlich -1, bei Charakteristik 2 keine Involution. Für alle $a, b \in F$ gilt:*

$$a(-b) = -ab. \tag{1}$$

Beweis[5]. O. B. d. A. können wir $a \neq 0$ voraussetzen. c sei die nach Q5 eindeutig bestimmte Lösung von $ac = -a$. Hieraus folgt $ac^2 = (-a)c = -ac = -(-a) = a$, also $c^2 = 1$ wegen Q4 und Q5. Bei Charakteristik 2 ist $c = 1$, im anderen Fall ist c eine Involution. Sei nun umgekehrt c eine Involution von $F^\times$. Zu jedem $a \in F$ gibt es dann nach Q6 ein $b \in F$ mit $-b + bc = a$. Hieraus folgt $ac = (-b + bc)c = -bc + b = -a$. Es gibt also höchstens eine Involution in $F^\times$. Bei Charakteristik 2 folgt $c = 1$ im Widerspruch zu unserer Annahme; F enthält also in diesem Fall keine Involution. Bei Charakteristik 2 ist -1 eine Involution, also ist $c = -1$, mithin $a(-1) = -a$[6], also auch (1) erfüllt.

3. Für spätere Untersuchungen benötigen wir den folgenden auch für sich interessanten

Satz 2. *Ein Fastkörper F, in dem zusätzlich die Beziehung*

$$a(b + c - bc) = ab + ac - abc \tag{2}$$

für alle $a, b, c \in F$ gilt, ist ein Schiefkörper.

Wir müssen also die Gültigkeit des rechtsseitigen Distributivgesetzes für F beweisen. Zweimalige Anwendung von (2) ergibt:

$$a(a'b + a'c - a'bc) = aa'(b + c - bc) = aa'b + aa'c - aa'bc$$

für alle $a, a', b, c \in F$.

O. B. d. A. seien b und c von 0 verschieden; dann erhalten wir, $a' = b^{-1}$ gesetzt:

$$a(1 + b^{-1}c - c) = a + ab^{-1}c - ac. \tag{2'}$$

Nun können offenbar $b^{-1}c = c'$ und $-c = d'$ bei geeigneter Wahl von b und c beliebige von 0 verschiedene Werte von F annehmen. Multiplizieren wir (2') von rechts mit einem $b' \neq 0$ aus F und ersetzen dann b', $c'b'$ und $d'b'$ durch b, c und d, so erhalten wir unter Berücksichtigung von Satz 1, daß

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad \tag{3}$$

ist für alle $a \in F$ und alle $b, c, d \in F^\times$.

---

[4]) Eine *Involution* in einer Gruppe ist ein von der Gruppeneinheit verschiedenes Element der Ordnung 2.

[5]) Dieser Beweis ist nachgebildet dem entsprechenden von [*10*], S. 189/190. ZASSENHAUS führte ihn allerdings nur für endliche Fastkörper durch.

[6]) Für allgemeine Quasikörper braucht diese Beziehung nicht zu stimmen. Vgl. [*4*], S. 274, Beispiel *U*

Durch zweimalige Anwendung von (3) ergibt sich:

$$(3') \qquad a\sum_{i=1}^{5} b_i = \sum_{i=1}^{5} a\,b_i,$$

wenn $a \in F$, die $b_i \in F^\times$ sind und mindestens eine dreigliedrige Summe $b_j + b_k + b_l \neq 0$ ist (hierbei bedeuten j, k, l paarweise verschiedene Indizes zwischen 1 und 5). Verschwinden in der linken Seite von (3') alle dreigliedrigen Summen, so ist also $b_j + b_k + b_l = b_j + b_k + b_m = 0$ für paarweise verschiedene j, k, l, m zwischen 1 und 5, und es ergibt sich $b_l = b_m$, d.h. alle b_i in (3') stimmen überein. Auch dann verschwinden die dreigliedrigen Summen nur bei Charakteristik 3; in diesem Fall ist aber (3') wegen $5 = -1$ nach Satz 1 erfüllt. Also gilt (3') für alle $a \in F$ und alle $b_i \in F^\times$ $(i = 1, \ldots, 5)$.

Besteht F nur aus zwei Elementen, so ist F der Primkörper der Charakteristik 2. Sonst gibt es ein $d \neq 0$ aus F, so daß auch $1 + d \neq 0$ wird. Setzen wir in (3') nun $b_1 = b$, $b_2 = c$, $b_3 = 1$, $b_4 = d$ und $b_5 = -1 - d$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (3) und (3') die Beziehung

$$a(b + c) = a\big(b + c + 1 + d + (-1 - d)\big) = a\,b + a\,c + a + a\,d + a(-1 - d)$$
$$= a\,b + a\,c + a\big(1 + d + (-1 - d)\big) = a\,b + a\,c,$$

d.h. das rechtsseitige Distributivgesetz, zunächst für $b, c \neq 0$, trivialerweise dann jedoch auch allgemein.

4. Geometrisch von besonderem Interesse und besonderer Eigenart sind die Ebenen über den eigentlichen Fastkörpern mit der folgenden zusätzlichen Eigenschaft

A. *Es gilt* $a^2 = -1$ *für alle von* $0, +1$ *und* -1 *verschiedenen Fastkörperelemente* a [7]).

Die geometrischen Eigenschaften dieser Fastkörper werden in den §§ 2 und 6 genauer untersucht. Hier wollen wir eine Übersicht über alle möglichen Fastkörper mit dieser Eigenschaft gewinnen.

Satz 3. *Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen eigentlichen* [8]) *Fastkörper mit der Eigenschaft* A. *Er ist eindeutig dadurch gekennzeichnet, daß er unter allen vorkommenden eigentlichen Fastkörpern möglichst wenig Elemente, nämlich* 9, *enthält. Seine multiplikative Gruppe ist isomorph zur Quaternionengruppe.*

Dem Beweis stellen wir einige Hilfssätze voran. Hierbei sei F stets ein eigentlicher Fastkörper mit der Eigenschaft A.

Hilfssatz 1. *Für* $a \neq 0, \pm 1$ *aus* F *gilt* $a^{-1} = -a$. *Ist ferner* $b \neq 0, \pm 1$ *aus* F *und außerdem* $b \neq \pm a$, *so gilt auch* $ba = -ab$.

Beweis. Der erste Teil folgt sofort aus der Eigenschaft A. Haben a und b die im Hilfssatz genannten Eigenschaften, so ist $ab^{-1}ab^{-1} = -1$, also

[7]) Dies ist ein Spezialfall der von Hall in [4], S. 274 untersuchten Quasikörper vom Rang 2 über ihrem Kern.

[8]) An Schiefkörpern mit der Eigenschaft A gibt es noch genau die Primkörper der Charakteristiken 2, 3 und 5. Dieses Ergebnis wird jedoch im folgenden nicht benutzt.

$ab^{-1} = -ba^{-1}$; hieraus folgt wegen des ersten Teiles unter Berücksichtigung von Satz 1 auch der zweite Teil des Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. *F hat die Charakteristik* 3.

Da F eigentlich sein soll, so hat F zwei über dem Primkörper seines Kernes linear unabhängige Elemente 1 und u. Wegen ihrer Unabhängigkeit folgt aus A und Hilfssatz 1 nunmehr

$$-1 = (1+u)^2 = 1+u+u(1+u) = 1+u-(1+u)u = 1+u-u+1 = 2,$$

d.h. $3 = 0$, wie behauptet.

Hilfssatz 3. *F enthält über dem Primkörper seines Kernes keine drei linear unabhängigen Elemente. Der Kern von F ist der Primkörper der Charakteristik* 3. *Über seinem Kern hat F den Rang* 2 *und besteht aus* 9 *Elementen.*

Beweis. Seien 1, u und v über dem Primkörper des Kernes von F linear unabhängig. Dann ergibt sich, ganz entsprechend wie bei Hilfssatz 2, daß

$$-1 = (1+u+v)^2 = 1+u+v-(1+u+v)u-(1+u+v)v = 3 = 0$$

ist. Es ergibt sich also der Widerspruch $-1 = 0$. Die restlichen Behauptungen des Hilfssatzes sind nun trivial.

Beweis von Satz 3. Ein eigentlicher Fastkörper mit der Eigenschaft A enthält nach den eben bewiesenen Hilfssätzen also notwendig 9 Elemente. Sei nun umgekehrt F ein eigentlicher Fastkörper aus 9 Elementen. Dann ist $F^\times$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8. Insbesondere enthält also $F^\times$ kein Element der Ordnung 8 (denn sonst wäre $F^\times$ zyklisch). Ferner hat $F^\times$ außer dem Einselement 1 nach Satz 1 genau ein Element der Ordnung 2, nämlich -1. Die übrigen Elemente $a \in F^\times$ haben mithin die Ordnung 4, also gilt für sie $a^2 = -1$. Somit hat F die Eigenschaft A und $F^\times$ ergibt sich nach [*11*], S. 110 als isomorph zur Quaternionengruppe. Nun ist leicht zu sehen, daß F zum Bereich R in [*4*], S. 273 isomorph ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß es keine eigentlichen Fastkörper mit weniger als 9 Elementen gibt. Die Elementanzahl eines endlichen eigentlichen Fastkörpers ist eine Primzahlpotenz, aber keine Primzahl, wie sofort aus Satz 15 von [*1*] folgt. Ein eigentlicher Fastkörper mit weniger als 9 Elementen enthält also notwendig 4 oder 8 Elemente; dessen multiplikative Gruppe hat also die Ordnung 3 oder 7, d.h. Primzahlordnung. Solche Gruppen sind aber zyklisch und kommen mithin als multiplikative Gruppen *eigentlicher* Fastkörper nicht in Frage.

§ 2. Zulässige Punktepaare.

1. Es sei A im folgenden eine *Translationsebene* ([*1*], Definition 6), d.h. eine Ebene mit transitiver Translationsgruppe. Nach [*1*], Satz 14 ist A darstellbar als Ebene über einem Quasikörper Q, wir schreiben dafür $\mathsf{A} = \beta(Q)$, in dem Sinne, daß die eigentlichen Punkte von A die geordneten Paare (x, y) von Quasikörperelementen x und y werden, und die Geraden als Punkt-

mengen durch die Gleichungen $y = xa + b$ bzw. $x = c$ $(a, b, c \in Q)$ gekennzeichnet sind. Mit U bezeichnen wir durchweg die uneigentliche Gerade von A.

Eine *Perspektivität* π [9]) von A ist eine Kollineation, welche eine Gerade (ihre *Achse*) punktweise festläßt; π bestimmt eindeutig einen Punkt (ihr *Zentrum*) derart, daß π jede Gerade durch ihn (als Ganzes) festläßt.

Eine Perspektivität von A heißt *eigentlich*, wenn ihre Achse eigentlich ist und ihr Zentrum p auf U liegt. Die eigentliche Gerade H möge U in q schneiden. Wir reden von (p, H)-*Transitivität*[9]), wenn es zu irgend zwei von p und q verschiedenen Punkten r und s aus U eine Perspektivität π mit dem Zentrum p und der Achse H [eine sog. (p, H)-*Perspektivität*[9])] mit $\pi r = s$ gibt. Ist die (p, H)-Transitivität erfüllt und ist H' eine weitere eigentliche Gerade von A, die U in q schneidet, so gilt auch die (p, H')-Transitivität. Es gibt nämlich eine Translation τ, die H in H' überführt, und hat π die eben erwähnte Eigenschaft, so ist $\tau\pi\tau^{-1}$ eine (p, H')-Perspektivität, die ebenfalls r in s überführt. Dies führt zu der folgenden

Definition. Ein *geordnetes* Paar (p, q) von Punkten p und q der uneigentlichen Geraden U einer Translationsebene A heißt *zulässig*, wenn für eine (und damit nach dem eben bemerkten für jede) *eigentliche* Gerade H durch q die Gruppe der (p, H)-Perspektivitäten *transitiv* in den Punkten von $U - \{p\} - \{q\}$ ist, d. h. wenn die (p, H)-Transitivität erfüllt ist. Ein zulässiges Punktepaar geht durch eine affine Kollineation wieder in ein solches über.

Im folgenden betrachten wir im allgemeinen (p, H)-Perspektivitäten, deren Achsen H durch einen festen eigentlichen Punkt, den Nullpunkt des Koordinatensystems, gehen. Perspektivitäten mit dieser Eigenschaft nennen wir kurz (p, q)-Perspektivitäten, wenn $q = H \cap U$ ist. Entsprechend wird der Begriff der (p, q)-Transitivität eingeführt. (p, q)-Transitivität bedeutet (p, H)-Transitivität für alle durch q gehenden Geraden H (s. auch [2]).

2. Die geordneten Paare (p, q) kann man auffassen als Elemente der Produktmenge $U \times U$. Wir untersuchen jetzt, welche Teilmengen von $U \times U$ als die Menge aller zulässigen Paare einer (geeignet gewählten) Translationsebene A in Frage kommen. Es gibt sechs wesentlich verschiedene Möglichkeiten.

Satz 4. *Es gibt genau die folgenden Möglichkeiten für die Menge Z aller zulässigen Punktepaare der uneigentlichen Geraden U einer Translationsebene* A:

I. *Z ist leer.*

II. *Z besteht aus genau einem Paar (p, p). Genau in diesem Fall ist* A *eine Ebene über einem distributiven Quasikörper*[10]), *der kein Linksalternativkörper ist.*

III. *Z besteht aus genau allen Paaren (p, p). Genau in diesem Fall ist* A *eine Ebene über einem Linksalternativkörper, der kein Schiefkörper ist.*

[9]) Baer nennt in [2] diese Abbildungen (p, H)-Transformationen. Nach Thm. 6.2 aus [2] ist übrigens die (p, H)-Transitivität gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Desarguesschen Satzes für das Zentrum p und die Achse H.

[10]) Ein *distributiver Quasikörper* ist ein Quasikörper, in dem *beide* Distributivgesetze gelten; in einem *Linksalternativkörper* gilt außerdem noch das Linksalternativgesetz $a(ab) = (aa)b$ für alle a und b des Bereiches. Vgl. auch [1], § 7.

IV. *Z besteht aus genau den beiden Paaren* (p, q) *und* (q, p) *mit* $p \neq q$. *Genau in diesem Falle ist* A *eine Ebene über einem Fastkörper, der mehr als* 9 *Elemente enthält und kein Schiefkörper ist.*

V. *Zu jedem* $p \in U$ *gibt es genau ein von* p *verschiedenes* $q \in U$ *derart, daß* (p, q) *und* (q, p) *in Z liegen. Z enthält keine weiteren Paare. Es gibt (bis auf Isomorphie) genau eine Translationsebene* A *mit einer derartig beschaffenen Menge Z, nämlich die Ebene über dem (eindeutig bestimmten) eigentlichen Fastkörper, der aus* 9 *Elementen besteht.*

VI. *Z besteht aus allen Paaren. Genau in diesem Falle ist* A DESARGUESsch.

Zum Beweis benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen. Ist (p, p) für ein $p \in U$ zulässig, so läßt sich nach [6], Satz 4 [11]) die Translationsebene darstellen als eine Ebene über einem distributiven Quasikörper D derart, daß die Verbindungsgerade $\langle a, p\rangle$ von a mit p die y-Achse zu dem zu D (nach [1], § 5) gehörenden Koordinatensystem wird für jeden eigentlichen Punkt a und umgekehrt. Wir erhalten also den

Hilfssatz 4. *Liegt ein* (p, p) *in Z, so ist* A *darstellbar als eine Ebene über einem distributiven Quasikörper D und umgekehrt.*

Die (p, p)-Perspektivitäten sind in diesem Falle genau die durch

$$(x, y) \to (x, x\,k + y) \tag{4}$$

mit $x, y, k \in D$ definierten Abbildungen ([6], S. 27/28).

Hilfssatz 5. *Mit* (p, p) *und* (q, q) $[p, q \in U;\ p \neq q]$ *liegen alle* (r, r) *in Z. Genau in diesem Falle ist* A *eine Ebene über einem Linksalternativkörper.*

Denn wegen $(p, p) \in Z$ kann q durch eine geeignete (p, p)-Perspektivität in jedes von p verschiedene $r \in U$ übergeführt werden. Der zweite Teil des Hilfssatzes folgt dann aus einem Satz von LENZ ([6], Satz 6 [12])), denn A hat in diesem Falle ein Schiebungsdiagramm (im Sinne von [6], S. 24/25) vom Typ VIb oder VII.

Hilfssatz 6. *Mit* (p, q) $[p, q \in U; p \neq q]$ *ist auch* (q, p) *zulässig.* A *ist genau in diesem Falle darstellbar als eine Ebene über einem Fastkörper. Die Gruppe der* (p, q)*-Perspektivitäten ist isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Fastkörpers. Es gibt in* A *eine eigentliche Perspektivität, die* p *mit* q *vertauscht* (GINGERICH [3]).

Beweis. (a) Sei $(p, q) \in Z$. Die Koordinatenachsen seien so gewählt, daß q bzw. p zu uneigentlichen Punkten der x- bzw. y-Achse werden. F sei ein zu diesen Achsen (gemäß [1], § 5) gehörender Quasikörper. Wir zeigen, daß F sogar ein Fastkörper ist.

Eine (p, q)-Perspektivität π ist unter der eben gemachten Annahme über die Koordinatenachsen eine Abbildung der Form:

$$\pi(x, y) = (x, \hat{\pi}\, y) \qquad (x, y \in F),$$

[11]) In [6] sind gegenüber [1] und dieser Arbeit x mit y und die Reihenfolge der Faktoren in den Geradengleichungen vertauscht. Der folgende Hilfssatz wurde bereits von GINGERICH in [3] bewiesen.

[12]) In [1], S. 176 irrtümlich als „Hilfssatz 7" bezeichnet.

wobei $\hat{\pi}$ eine eineindeutige Abbildung von F auf sich ist. Insbesondere geht (x, x) in $(x, \hat{\pi}x)$ über. Andererseits hat aber die aus allen (x, x) bestehende Gerade als Bild eine Gerade, die aus allen $(x, x\,k)$ für ein $k \neq 0$ aus F besteht, also gilt $\hat{\pi}\,x = x\,k$ für alle $x \in F$. Wegen der (p, q)-Transitivität gibt es zu *jedem* $k \neq 0$ aus F ein $\hat{\pi}$ und dazu eine (p, q)-Perspektivität π mit der eben genannten Eigenschaft. Zu k' gehöre die (p, q)-Perspektivität π'. Dann ist auch $\pi'\,\pi$ eine (p, q)-Perspektivität und es gilt:

$$(x\,k)\,k' = \hat{\pi}'(x\,k) = \hat{\pi}'(\hat{\pi}\,x) = (\hat{\pi}'\,\hat{\pi})\,x = \widehat{\pi'\pi}\,x = x\,k''$$

für ein $k'' \neq 0$ und alle $x \in F$. Aus $x = 1$ folgt $k'' = kk'$. Es folgt also das Assoziativgesetz der Multiplikation zunächst für $k, k' \neq 0$, aber trivialerweise auch sonst. F ist also ein Fastkörper. Die Zuordnung $\pi \leftrightarrow k^{-1}$ ist außerdem ein Isomorphismus zwischen der Gruppe der (p, q)-Perspektivitäten und $F^{\times}$.

(b) Ist umgekehrt A eine Ebene über einem Fastkörper F, so gibt es $p, q \in U$ mit $p \neq q$ und $(p, q) \in Z$. Nehmen wir nämlich q bzw. p als uneigentliche Punkte der x- bzw. y-Achse, so ist für jedes $k \neq 0$ die durch

$$\bar{k}(x, y) = (x, y\,k) \tag{5}$$

definierte Abbildung $\bar{k}$ eine (p, q)-Perspektivität. Die Gerade $y = xa$ wird durch (5) mit $k = a^{-1}b$ in $y = xb$ ($a, b \neq 0$ aus F) abgebildet; hieraus folgt die (p, q)-Transitivität.

(c) Ist A eine Ebene über einem Fastkörper, so ist die Abbildung ε, welche durch

$$\varepsilon(x, y) = (y, x) \qquad (x, y \in F) \tag{6}$$

definiert ist, eine eigentliche Perspektivität von A, welche die Gerade $y = xa + b$ in $y = xa^{-1} - ba^{-1}$ und die Gerade $x = 0$ ($y = 0$) in $y = 0$ ($x = 0$) überführt. Die Achse dieser Perspektivität ist die Gerade $y = x$, das Zentrum der uneigentliche Punkt der Geraden $y = -x$.

Das Zentrum von ε liegt also genau bei Charakteristik 2 auf der Achse.

Die Kollineation ε vertauscht p mit q; die Zulässigkeit von (p, q) zieht also diejenige von (q, p) nach sich. Damit ist auch der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen[13]).

Hilfssatz 7. *Sind für paarweise verschiedene $p, q, r \in U$ die Paare (p, q) und (p, r) zulässig, so ist* A DESARGUESsch (GINGERICH [3]).

Beweis. Wir können o. B. d. A. p, q und r als die uneigentlichen Punkte der Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $y = x$ annehmen. Wegen $(p, q) \in Z$ ist A nach Hilfssatz 6 eine Ebene über einem Fastkörper F. Wir zeigen jetzt, daß F bei der weiteren Voraussetzung $(p, r) \in Z$ ein Schiefkörper ist.

Eine (p, r)-Perspektivität π hat die Form:

$$\pi(x, y) = (x, \pi^*(x, y)).$$

[13]) Zu (b) und (c) vgl. auch [6], Hilfssatz 4.

Die Gerade $y = y_0$ geht durch π in eine Gerade $y = xk + y_0 - y_0 k$ über, wenn wir annehmen, daß die x-Achse auf die Gerade $y = xk$ abgebildet wird; also ist $\pi^*(x, y) = xk + y - yk$. Wegen der (p, r)-Transitivität gibt es zu *jedem* $k \neq 1$ aus F eine (p, r)-Perspektivität π mit:

$$\pi(x, y) = (x, xk + y - yk).$$

Ist die (p, r)-Perspektivität π' auf dieselbe Weise durch $k' \neq 1$ aus F bestimmt, so ist auch $\pi'\pi(x, y) = (x, xk' + xk - xkk' + y - yk' - yk + ykk')$ eine (p, r)-Perspektivität. Es gibt also ein $k'' \neq 1$ aus F mit $xk + xk' - xkk' = xk''$ für alle $x \in F$. Für $x = 1$ folgt hieraus $k'' = k + k' - kk'$ und hieraus die Bedingung (2) von § 1, zunächst für $k, k' \neq 1$, aber trivialerweise dann auch allgemein. Nach Satz 2 ist also F ein Schiefkörper und mithin **A** DESARGUESsch.

Hilfssatz 8. **A** *ist genau dann* DESARGUESsch, *wenn alle Paare zulässig sind, d.h. wenn* $Z = U \times U$ *gilt.*

Beweis. (a) Gilt $Z = U \times U$, so sind erst recht die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt, also ist **A** DESARGUESsch.

(b) Sei umgekehrt **A** als DESARGUESsch angenommen. Dann ist nach einem Satz von BAER ([2], Thm. 6.2) die (p, H)-Transitivität für jeden Punkt p und jede Gerade H von **A** erfüllt. Also sind erst recht alle Paare von Punkten der uneigentlichen Geraden zulässig.

Hilfssatz 9. *Liegen ein* (p, p) *und ein* (r, s) *mit* $r \neq s$ *in* Z, *so ist* **A** DESARGUESsch.

Zum Beweis können wir o. B. d. A. annehmen, daß U aus mehr als drei Punkten besteht.

(a) Ist $p = r$, so gibt es eine (p, p)-Perspektivität, die s in ein $t \neq s$ überführt. Aus der Zulässigkeit von (p, s) und der von (p, t) folgt nun die Behauptung nach Hilfssatz 7.

(b) Ist $p = s$, so folgt die Behauptung aus (a) und Hilfssatz 6.

(c) Ist p von r und s verschieden und sei t ein von p, r und s verschiedener Punkt auf U, so gibt es eine (r, s)-Perspektivität, die p in t überführt, also $(t, t) \in Z$. Ferner gibt es eine (p, p)-Perspektivität, die r in t und s in ein $t' \neq t$ überführt, also ist (t, t') zulässig. Anwendung von (a) ergibt jetzt den Hilfssatz.

Hilfssatz 10. *Liegen ein* (p, q) *mit* $p \neq q$ *und ein von* (p, q) *und* (q, p) *verschiedenes Paar* (r, s) *mit* $r \neq s$ *in* Z, *so ist, von genau einer Ausnahme abgesehen,* **A** DESARGUESsch. *Die Ausnahme-Ebene ist die Ebene über dem Fastkörper aus* 9 *Elementen und ist vom Typ* V.

Beweis. O. B. d. A. seien wieder q und p die uneigentlichen Punkte der x- bzw. y-Achse einer Ebene **A** über einem Fastkörper F. Ferner sei o. B. d. A. [wegen $(p, q) \in Z$] r der uneigentliche Punkt der Geraden $y = x$; mit r' werde der uneigentliche Punkt von $y = -x$ bezeichnet. Nach Hilfssatz 6 (c) ist die Abbildung ε, welche durch $\varepsilon(x, y) = (y, x)$ [Abbildung (6)] definiert ist, eine (r', r)-Perspektivität mit $\varepsilon p = q$ und $\varepsilon q = p$.

Ist $s \neq r'$, so ist $\varepsilon s \neq s$. Aus der Zulässigkeit von (r, s) und der von $(r, \varepsilon s)$ ergibt sich nun nach Hilfssatz 7, daß A DESARGUESsch ist.

Es sei also von nun an $s = r'$. Besteht F nur aus drei Elementen, so ist F ein Schiefkörper, A also DESARGUESsch. Sei nun t der uneigentliche Punkt der Geraden $y = xa$ mit einem von 0 und ± 1 verschiedenen a aus F. Wegen $(r', r) = (s, r) \in Z$ gibt es eine (r', r)-Perspektivität ϱ mit $\varrho p = t$. Wir setzen $t' = \varrho q = \varrho \varepsilon p$; dann ist $(t, t') \in Z$. Es ist $\varrho \varepsilon = \varepsilon \varrho$ nach Satz 1 wegen $\varepsilon^2 = \underline{1}$ und weil die Gruppe der (r', r)-Perspektivitäten die multiplikative Gruppe eines Fastkörpers ist [wegen $(r', r) \in Z$ nach Hilfssatz 6]. Hieraus folgt $t' = \varepsilon t$ und es gilt also $(t, \varepsilon t) \in Z$ für jedes von r und r' verschiedene $t \in U$. Nun gibt es wegen $(p, q) \in Z$ auch eine (p, q)-Perspektivität π mit $t = \pi r$. Es gilt $(t, \pi r') \in Z$; gilt nun $\pi r' \neq \varepsilon t$, so ist A nach Hilfssatz 7 DESARGUESsch.

Es sei also von nun an $\pi r' = \varepsilon t$, d.h. $r' = \pi^{-1} \varepsilon t$. Da t der uneigentliche Punkt der Geraden $y = xa$ ($a \neq 0, \pm 1$ aus F) ist, so ist π durch $\pi(x, y) = (x, ya)$ definiert, und es ergibt sich nun leicht r' als der uneigentliche Punkt der Geraden $y = xa^{-2}$. Andererseits ist aber r' der uneigentliche Punkt der Geraden $y = -x$, also folgt $a^2 = -1$ für alle $a \neq 0, +1$ und -1 aus F.

Damit unter der Voraussetzung unseres Hilfssatzes die Ebene A nicht-DESARGUESsch ist, muß also notwendig der erzeugende Fastkörper F eigentlich sein und die Eigenschaft A (s. § 1) erfüllen. Nun gibt es nach Satz 3 nur einen Fastkörper mit diesen beiden Eigenschaften, nämlich den (eindeutig bestimmten) aus 9 Elementen. Die Ebene über diesem Fastkörper ist nicht-DESARGUESsch, dennoch sind in ihr alle Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, wie im letzten Paragraph dieser Arbeit gezeigt wird. Ebenso wird dort bewiesen, daß in dieser Ausnahme-Ebene die Menge Z vom Typ V ist.

Beweis von Satz 4. Ist ein $(p, p) \in Z$, so ist A nach Hilfssatz 4 eine Ebene über einem distributiven Quasikörper (II). Wenn ein von (p, p) verschiedenes Paar (q, q) in Z liegt, so liegen nach Hilfssatz 5 alle Paare (r, r) $[r \in U]$ in Z, und A ist eine Ebene über einem Linksalternativkörper (III). Liegt dagegen außer (p, p) ein (r, s) mit $r \neq s$ in Z, so ist A nach Hilfssatz 9 DESARGUESsch (VI).

Liegt ein (p, q) mit $p \neq q$ in Z, so nach Hilfssatz 6 auch (q, p), und A ist eine Ebene über einem Fastkörper (IV). Enthält aber Z noch ein weiteres von diesen verschiedenes Paar, so besteht Z nach Hilfssatz 10, abgesehen von einer Ausnahme (V), aus allen Paaren und A ist DESARGUESsch. Das „genau" in VI ergibt sich schließlich aus Hilfssatz 8.

§ 3. Der Eindeutigkeitssatz in Fastkörperebenen.

In diesem und den beiden folgenden Paragraphen sei A eine Ebene über einem *eigentlichen* Fastkörper F [14]), der aus *mehr* als 9 Elementen besteht. Ebenen dieser Art nennen wir fortan *Fastkörperebenen*. Die *Ausnahme-Ebene* über dem Fastkörper aus 9 Elementen wird in dem letzten Paragraphen gesondert behandelt. Wir interessieren uns hauptsächlich für die Gruppe $\mathfrak{A}$

[14]) Das heißt $A = \beta(F)$ in der Bezeichnung von [1], S. 171.

aller *affinen* Kollineationen von A, das sind diejenigen, welche die uneigentliche Gerade von A festlassen. Ist $\mathfrak{T}$ die Translationsgruppe von A, so gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\mathfrak{A}_0$. Hierbei ist $\mathfrak{A}_0$ die Gruppe der *homogenen* affinen Kollineationen, d.h. derjenigen affinen, welche den Nullpunkt (0, 0) des Koordinatensystems von A festlassen[15]). Zunächst folgt aus [*1*], Satz 18 und [*6*], Satz 2 der

Satz 5[16]). *Jede Kollineation einer Fastkörperebene läßt die uneigentliche Gerade fest, ist also affin. Keine Fastkörperebene ist zu sich selbst dual.*

Eine Fastkörperebene ist eine Ebene vom Typ IV im Sinne von § 2, Satz 4. Die ausgezeichneten Punkte p und q aus U, für die $(p, q) \in Z$ gilt, bleiben also bei jeder Kollineation fest oder werden vertauscht, da ja Z bei jeder Kollineation[17]) in sich übergeht. Daraus folgt

Satz 6. *Jede homogene (affine) Kollineation einer Fastkörperebene läßt ihre Koordinatenachsen $x = 0$ und $y = 0$ fest oder vertauscht sie.*

Diejenigen Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$, welche die Achsen festlassen, bilden offenbar eine Untergruppe $\mathfrak{A}_0$ vom Index 2, denn die Kollineation (6) von § 2 vertauscht die Achsen und hat die Ordnung 2.

Die eigentlichen Punkte von A, welche nicht auf den Koordinatenachsen liegen, werden durch $\mathfrak{A}_0$ transitiv permutiert, denn der Punkt (1, 1) kann in (a, b) $[a, b \in F^\times]$ übergeführt werden durch die homogene Kollineation

$$(x, y) \to (x\,a, y\,b).$$

Nach § 2, Satz 4 (IV) sind alle Koordinatenachsen, die zu Koordinatensystemen über Fastkörpern gehören, zur x- bzw. y-Achse parallel. Sie gehen also aus diesen beiden Achsen hervor durch eine geeignete Translation, eventuell zusammengesetzt mit einer Abbildung (6).

Die Koordinatensysteme (die sich aus den beiden nichtparallelen Koordinatenachsen und dem nicht auf diesen gelegenen Einheitspunkt zusammensetzen), die zu assoziativen Quasikörpern (d.h. Fastkörpern) gehören (im Sinne von [*1*], § 5), werden also durch die volle Kollineationsgruppe $\mathfrak{A}$ von A transitiv permutiert, was aus den beiden letzten Bemerkungen folgt. Da aber der Koordinaten-Quasikörper durch ein solches Koordinatensystem eindeutig bestimmt ist (s. etwa [*1*], Schluß des § 5), so folgt der

Satz 7 (Eindeutigkeitssatz). *Ein Fastkörper ist durch seine erzeugte Ebene eindeutig bestimmt;* m. a. W.: *nichtisomorphe Fastkörper erzeugen nichtisomorphe Fastkörperebenen.*

Dieser Satz ist auch für die Ausnahme-Ebene erfüllt, denn wir wissen aus § 1, daß es bis auf Isomorphie nur einen Fastkörper mit 9 Elementen gibt.

Fastkörperebenen werden allerdings auch durch andere Quasikörper (die dann aber *keine* Fastkörper sind) erzeugt. Jedoch werden wir im Verlauf dieser Arbeit davon keinen Gebrauch machen.

---

[15]) Vgl. [*1*], § 7, insbesondere S. 177/178.

[16]) Dieser Satz gilt auch für die Ausnahme-Ebene.

[17]) Genauer gesagt: Bei jeder Abbildung $\bar{\alpha}$ von $U \times U$, die vermöge $\bar{\alpha}(p, q) = (\alpha p, \alpha q)$ durch eine Kollineation α induziert wird.

§ 4. Projektive Kollineationen in Fastkörperebenen.

1. Wir untersuchen jetzt die Struktur der Gruppe der projektiven Kollineationen (das sind Kollineationen, die Produkte von Perspektivitäten sind, vgl. [1], S. 180) einer Fastkörperebene A, und zwar zunächst die Struktur der Untergruppe $\mathfrak{N}_0$ der homogenen eigentlichen projektiven Kollineationen. Dabei bezeichnen wir eine homogene Kollineation als *eigentlich projektiv*[18], wenn sie sich als Produkt eigentlicher homogener Perspektivitäten [d.h. von Perspektivitäten mit uneigentlichem Zentrum und durch den Nullpunkt (0, 0) gehender Achse] darstellen läßt[19]. Zunächst benötigen wir eine Übersicht über die eigentlichen homogenen Perspektivitäten einer Fastkörperebene.

Wir bezeichnen mit u und v die uneigentlichen Punkte der x- bzw. y-Achse des Fastkörper-Koordinatensystemes. Dann sind eigentliche Perspektivitäten die (u, v)-Perspektivitäten $\underline{a}$, welche durch

$$\underline{a}(x, y) = (x\,a, y) \qquad (a \in F^\times) \tag{7}$$

und die (v, u)-Perspektivitäten $\overline{b}$, welche durch

$$\overline{b}(x, y) = (x, y\,b) \qquad (b \in F^\times) \tag{7'}$$

definiert sind. Weitere (u, v)- bzw. (v, u)-Perspektivitäten kommen nicht vor, weil jede solche Perspektivität durch ihre Wirkung auf einen von u und v verschiedenen Punkt der uneigentlichen Geraden U eindeutig bestimmt ist. Die eineindeutigen Zuordnungen $\underline{a} \leftrightarrow a^{-1}$ bzw. $\overline{b} \leftrightarrow b^{-1}$ vermitteln offenbar Isomorphismen zwischen der Gruppe $\underline{\mathfrak{N}}_0$ der (u, v)-Perspektivitäten bzw. der Gruppe $\overline{\mathfrak{N}}_0$ der (v, u)-Perspektivitäten und der multiplikativen Gruppe $F^\times$ von F.

Weitere (u, w)- bzw. (v, w)-Perspektivitäten mit von u und v verschiedenen $w \in U$ gibt es nicht. Eine solche würde nämlich u (bzw. v) festlassen und v (bzw. u) bewegen, was nach Satz 6 nicht geht. Aus demselben Grunde gibt es auch keine (w, u)- bzw. (w, v)-Perspektivitäten.

Wir fragen nun nach nichtidentischen (w, w')-Perspektivitäten für von u und v verschiedene Punkte w und w' aus U. Nach Satz 6 muß eine solche u mit v vertauschen; es gibt also zu jedem Paar w, w' mit obiger Eigenschaft höchstens eine (w, w')-Perspektivität, und diese hat dann die Ordnung 2. Sei nun auch $w'' \in U$ von u und v verschieden, ferner π die (als existierend angenommene) nichtidentische (w, w')-Perspektivität und ϱ die nichtidentische (w, w'')-Perspektivität. Dann ist $\pi\varrho$ eine (w, w^*)-Perspektivität für ein $w^* \in U$, ferner $\pi\varrho\,u = \pi\,v = u$, also $\pi\varrho = \underline{1}$, d.h. $\pi = \varrho^{-1}$. Hieraus folgt aber $w' = w''$. Es gibt also zu jedem $w \in U$ höchstens *ein* $w' \in U$ derart, daß eine nichtidentische (w, w')-Perspektivität existiert.

[18]) Das sind im wesentlichen die in [1], Fußnote 43 als „projektiv" bezeichneten Kollineationen. Statt „projektiver Kollineation" sagen wir im folgenden häufig auch „Projektivität".

[19]) Eine homogene Kollineation, die Produkt von eigentlichen Perspektivitäten ist, läßt sich auch als Produkt homogener eigentlicher Perspektivitäten darstellen. Dies folgt leicht aus den Untersuchungen in [1], S. 180.

Ist nun w der uneigentliche Punkt der Geraden $y = x$, so gibt es auch tatsächlich eine nichtidentische (w, w')-Perspektivität für ein $w' \in U$, nämlich die Abbildung ε, welche durch (6) [in § 2] definiert ist. Ist w der uneigentliche Punkt der Geraden $y = xa$ $(a \in F^\times)$, so ist $\bar{a}\,\varepsilon\,\bar{a}^{-1}$ eine [und damit die einzige] (w, w')-Perspektivität. w' ist hierbei der uneigentliche Punkt von $y = -xa$. Wir haben jetzt erhalten den

Hilfssatz 11. *Die einzigen eigentlichen homogenen Perspektivitäten sind die Abbildungen* (7) *und* (7'), *sowie die durch*

$$(x, y) \to (y\,a^{-1}, x\,a) \tag{8}$$

mit $a \in F^\times$ *definierten Abbildungen.*

Bei den Perspektivitäten (7) *und* (7') *liegt das Zentrum nicht auf der Achse. Die Perspektivitäten* (8) *haben genau dann ein auf der Achse gelegenes Zentrum, wenn* F *die Charakteristik* 2 *hat.*

Die Abbildungen (8) sind nämlich gerade die Perspektivitäten $\bar{a}\,\varepsilon\,\bar{a}^{-1}$. Der letzte Teil des Hilfssatzes folgt aus einer Bemerkung auf S. 145.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß sich jede homogene eigentliche projektive Kollineation aus den Abbildungen (7), (7') und (8) zusammensetzt, und jede Kollineation von $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_0 \cap \hat{\mathfrak{N}}_0$ aus den Abbildungen (7) und (7')[20]; also gilt wegen $\underline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\underline{a}$ der

Satz 8. *Die eigentlichen homogenen Projektivitäten einer Fastkörperebene, welche die Koordinatenachsen festlassen* (*d.h. die Abbildungen aus* $\hat{\mathfrak{N}}_0$) *sind genau die durch*

$$(x, y) \to (x\,a, y\,b) \tag{9}$$

mit von 0 *verschiedenen Fastkörperelementen* a *und* b *definierten Abbildungen. Es ist also* $\hat{\mathfrak{N}}_0 = \underline{\mathfrak{N}}_0 \times \overline{\mathfrak{N}}_0$[21], *d.h.* $\hat{\mathfrak{N}}_0$ *ist isomorph zum direkten Produkt der multiplikativen Gruppe* $F^\times$ *des Fastkörpers* F *mit sich.*

Die eigentlichen homogenen Projektivitäten (*d.h. die Abbildungen aus* $\mathfrak{N}_0$) *sind genau die Abbildungen* (9) *und die Abbildungen der Form*

$$(x, y) \to (y\,b, x\,a) \quad \textit{mit} \quad a, b \in F^\times. \tag{9'}$$

Jede eigentliche Projektivität ist Produkt aus höchstens zwei eigentlichen Perspektivitäten.

Nur die letzte Aussage des Satzes ist noch zu beweisen. Die Abbildung (9) setzt sich zusammen aus den Perspektivitäten $\underline{a}$ und $\overline{b}$. Wegen

$$\overline{b\,a} \cdot \underline{b}\,\varepsilon\,\underline{b}^{-1}(x, y) = \overline{b\,a}\,\underline{b}\,\varepsilon(x\,b^{-1}, y) = \overline{b\,a}\,\underline{b}(y, x\,b^{-1}) = \overline{b\,a}(y\,b, x\,b^{-1}) = (y\,b, x\,a)$$

[20]) Denn Abbildungen (8) können nur in gerader Anzahl in einer Produktzerlegung eines $\nu \in \hat{\mathfrak{N}}_0$ vorkommen. Also tritt auch ε nur in gerader Anzahl auf. Wegen $\bar{c}\,\varepsilon = \varepsilon\,\underline{c}$ und $\varepsilon^2 = \underline{1}$ gelingt es nun aber, die Perspektivitäten vom Typ (8) aus einer solchen Produktzerlegung zu eliminieren.

[21]) Zur Definition des direkten Produktes s. etwa [*10*], S. 75.

ist (9') Produkt der beiden eigentlichen Perspektivitäten $\overline{ba}$ und $\underline{b}\,\varepsilon\,\underline{b}^{-1}$. Es ist $\mathfrak{N}_0$ eine Untergruppe von $\mathfrak{N}_0$ vom Index 2.

2. Wir wollen jetzt die Gruppe $\mathfrak{M}$ aller projektiven Kollineationen bestimmen. Eine Kollineation heißt *projektiv*, wenn sie sich aus Perspektivitäten zusammensetzen läßt. In Fastkörperebenen treten außer den eigentlichen Perspektivitäten wegen Satz 5 nur noch die Translationen und Streckungen[22]) als Perspektivitäten auf. Wegen der Transitivität der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ hat jede Streckung die Form $\tau\,\sigma\,\tau^{-1}$ mit $\tau \in \mathfrak{T}$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_0$, wo $\mathfrak{S}_0$ die Gruppe der Streckungen mit dem Fixpunkt (0, 0) [die sog. 0-Streckungen] bedeuten soll. Ebenso hat jede eigentliche Perspektivität (Definition in § 2, Ziffer 1) die Form $\tau\,\nu\,\tau^{-1}$ mit $\tau \in \mathfrak{T}$ und $\nu \in \mathfrak{N}_0$. Mithin ist $\mathfrak{M}$ das Erzeugnis der Gruppen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{S}_0$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist die kleinste Untergruppe von $\mathfrak{A}$, welche diese drei Untergruppen enthält. Es ist sogar

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{N}_0\,\mathfrak{S}_0\,^{23}),$$

weil $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{M}$ (sogar in $\mathfrak{A}$) und $\mathfrak{N}_0$ ein Normalteiler in der von $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{S}_0$ erzeugten Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist.

Nunmehr ist es leicht, die Kollineationen aus $\mathfrak{M}$ anzugeben. Die 0-Streckungen sind nach [*1*], Satz 16 genau die durch

$$(x, y) \to (s\,x, s\,y)$$

definierten Abbildungen, wo s ein von 0 verschiedenes Element des Kernes K (Definition in § 1) des Fastkörpers F ist. Nun folgt sofort der

Satz 9. *Die projektiven Kollineationen einer Fastkörperebene (über dem Fastkörper F) sind genau die Abbildungen*

$$(10) \qquad (x, y) \to (s\,x\,a + c, s\,y\,b + d)$$

und

$$(10') \qquad (x, y) \to (s\,y\,b + d, s\,x\,a + c)$$

mit $s \in K$, $s \neq 0$, $a, b \in F^\times$ *und* $c, d \in F$.

Jede projektive Kollineation ist als Produkt von höchstens vier Perspektivitäten darstellbar.

3. Welche 0-Streckungen sind eigentlich, d.h. als Produkt von eigentlichen (homogenen) Perspektivitäten darstellbar? Darüber gibt Auskunft der

Satz 10. *Eine Streckung*

$$(11) \qquad (x, y) \to (s\,x, s\,y) \quad \textit{mit} \quad s \in K \quad \textit{und} \quad s \neq 0$$

ist genau dann eigentlich, wenn s mit jedem Element des Fastkörpers F vertauschbar ist.

---

[22]) Zu den Definitionen s. [*1*], § 1 (Definitionen 4 und 4a). Nach Satz 5 ist auch die in [*1*], Fußnote 42 geäußerte Vermutung für Fastkörperebenen (und auch für die Ausnahme-Ebene) erfüllt.

[23]) Diese Formel gilt für beliebige Translationsebenen. Die Produktdarstellung eines $\mu \in \mathfrak{M}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. (a) Ist s mit allen $x \in F$ vertauschbar, so ist $(sx, sy) = \underline{s}\bar{s}(x, y)$, also (11) eigentlich.

(b) Ist umgekehrt die Streckung (11) eigentlich, so hat sie nach Satz 8 die Form (9), weil sie die Koordinatenachsen festläßt. Es ist also $sx = xa$ und $sy = yb$ für alle $x, y \in F$. Für $x = y = 1$ folgt hieraus $s = a = b$, also die Vertauschbarkeit von s mit allen $x \in F$.

§ 5. Weitere Kollineationen in Fastkörperebenen.

1. Es sei mit $\mathfrak{A}_0$ die Gruppe derjenigen Kollineationen einer Fastkörperebene A bezeichnet, welche die Punkte $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ [einzeln] in sich überführen. Jede Kollineation von A setzt sich aus einer projektiven Kollineation und einer aus $\mathfrak{A}_0$ zusammen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{A}_0$ genügt es, sich auf homogene Kollineationen zu beschränken. Jede Kollineation $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ läßt nach Satz 6 die Koordinatenachsen fest oder vertauscht sie. Vertauscht α die Koordinatenachsen, so läßt $\alpha\,\varepsilon = \beta$ sie fest, wenn mit ε wieder die Kollineation (6) [vgl. § 2] bezeichnet wird. Wenn also $\mathfrak{Z}_0$ die aus $\underline{1}$ und ε bestehende Gruppe ist, so gilt $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0\,\mathfrak{Z}_0$. Wegen $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{Z}_0 = \underline{1}$ ist diese Produktdarstellung eindeutig bestimmt.

Es möge nun $\beta \in \mathfrak{A}_0$ den Einheitspunkt $(1, 1)$ in den Punkt (a, b) mit $a, b \in F^\times$ überführen. Dann läßt $\sigma = \beta\,\underline{a}^{-1}\bar{b}^{-1}$ den Einheitspunkt fest und führt die Achsen in sich über. σ bildet also auch die Geraden $y = 1$ und $x = 1$ in sich ab, mithin auch die Punkte $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, 0)$, d.h. $\sigma \in \mathfrak{A}_0$. Aus $\beta = \sigma\,\underline{a}\,\bar{b}$ folgt die Produktdarstellung $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{N}_0\,\mathfrak{A}_0$. Ferner gilt $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{N}_0 = \underline{1}$, denn aus $\underline{a}\,\bar{b}(1, 1) = (1, 1)$ folgt $a = 1$ und $b = 1$. Es ist also auch die letztgenannte Produktdarstellung eindeutig bestimmt. Außerdem gilt wegen $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_0\,\mathfrak{Z}_0$ auch $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{N}_0\,\mathfrak{A}_0$ mit $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{N}_0 = \underline{1}$ und ferner

$$\mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{A}_0/\mathfrak{N}_0 \cong \mathfrak{A}_0/\mathfrak{N}_0. \tag{12}$$

Aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{A}_0$ erhält man ferner die eindeutige Produktdarstellung $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{N}_0\,\mathfrak{A}_0$.

2. Es bleibt jetzt noch die Struktur von $\mathfrak{A}_0$ zu untersuchen. Für ein $\sigma \in \mathfrak{A}_0$ setzen wir $\sigma(x, 0) = (\bar{\sigma}x, 0)$ und $\sigma(0, y) = (0, \bar{\bar{\sigma}}y)$ für alle $x, y \in F$. Die so definierten Abbildungen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\bar{\sigma}}$ bilden F eineindeutig auf sich ab. Wegen der Additivität der homogenen affinen Kollineation σ (vgl. [1], § 7, Satz 19) gilt:

$$\sigma(x, y) = \sigma\big((x, 0) + (0, y)\big) = (\bar{\sigma}x, 0) + (0, \bar{\bar{\sigma}}y) = (\bar{\sigma}x, \bar{\bar{\sigma}}y).$$

Die aus allen (x, x) bestehende Gerade geht durch σ in sich über, weil ja $(0, 0)$ und $(1, 1)$ Fixpunkte von σ sind. Hieraus folgt $\bar{\sigma} = \bar{\bar{\sigma}}$. Nun schließt man die Additivität von $\bar{\sigma}$ wegen $\bar{\sigma}0 = 0$ aus der von σ durch:

$$\begin{aligned}\big(\bar{\sigma}(x + x'), 0\big) &= \sigma(x + x', 0) = \sigma\big((x, 0) + (x', 0)\big) = \sigma(x, 0) + \sigma(x', 0)\\ &= (\bar{\sigma}x, 0) + (\bar{\sigma}x', 0) = (\bar{\sigma}x + \bar{\sigma}x', 0),\end{aligned}$$

also:

$$\bar{\sigma}(x + x') = \bar{\sigma}x + \bar{\sigma}x' \quad \text{für alle} \quad x, x' \in F. \tag{13}$$

Es gilt ferner $\bar{\sigma}1 = 1$ wegen $\sigma(1, 1) = (1, 1)$.

Die Gerade $y = xa$ geht durch $\bar{\sigma}$ in eine Gerade $y = x\sigma^* a$ über; wir können also schreiben:

$$\sigma(x, xa) = \big(\bar{\sigma}x, \bar{\sigma}(xa)\big) = (\bar{\sigma}x, \bar{\sigma}x\sigma^* a) \tag{14}$$

für alle $x, a \in F$. Für $x = 1$ folgt hieraus:

$$\bar{\sigma}a = \bar{\sigma}(1 \cdot a) = \bar{\sigma}1\,\sigma^* a = \sigma^* a \quad \text{für alle} \quad a \in F,$$

also $\bar{\sigma} = \sigma^*$. Wir erhalten aus (14) somit

$$\bar{\sigma}(xx') = \bar{\sigma}x\bar{\sigma}x' \quad \text{für alle} \quad x, x' \in F. \tag{13'}$$

Zusammen mit (13) folgt nun, daß $\bar{\sigma}$ ein Automorphismus von F ist. Umgekehrt definiert jeder Automorphismus $\bar{\sigma}$ von F eine Abbildung $\sigma \in \mathfrak{A}_0$ durch $\sigma(x, y) = (\bar{\sigma}x, \bar{\sigma}y)$. Die so hergestellte eineindeutige Zuordnung $\sigma \leftrightarrow \bar{\sigma}$ zwischen $\mathfrak{A}_0$ und der Automorphismengruppe $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(F)$ von F ist offenbar ein Isomorphismus:

Satz 11. *Die Gruppe derjenigen Kollineationen, welche jeden der Punkte* (0, 0), (1, 0), (0, 1) [*und damit auch* (1, 1)] *auf sich abbilden, ist isomorph zur vollen Automorphismengruppe des Koordinatenfastkörpers*[24]).

3. Damit haben wir eine volle Übersicht über die Struktur von $\mathfrak{A}$ erhalten, falls die von $F^\times$ und $\mathfrak{a}(F)$ bekannt ist.

Satz 12. *Die Gruppe* $\mathfrak{A}$ *der Kollineationen einer Fastkörperebene* A *erlaubt die folgende Produktdarstellung*:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\mathfrak{N}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{Z}_0. \tag{15}$$

Diese Produktdarstellung ist eindeutig bestimmt. Jede in dieser Produktentwicklung auftretende Gruppe ist Normalteiler in demjenigen Teilprodukt von (15), *welches aus dieser und den folgenden Gruppen von* (15) *besteht.*

Die Darstellung (15) folgt aus

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{T}\mathfrak{N}_0\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{T}\mathfrak{N}_0\mathfrak{Z}_0\mathfrak{A}_0.$$

Die Eindeutigkeit der Produktdarstellung gilt, weil jede in (15) vorkommende Gruppe mit dem Produkt der ihr in (15) folgenden Gruppen jeweils nur das Einselement gemeinsam hat. Die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ ist Normalteiler in $\mathfrak{A}$; ferner ist $\mathfrak{N}_0$ Normalteiler in $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{N}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{Z}_0$. Ist nämlich $\nu = \pi_1 \dots \pi_r \in \mathfrak{N}_0$ (wo die π_ϱ mit $\varrho = 1, \dots, r$ eigentliche homogene Perspektivitäten bedeuten, welche die Koordinatenachsen festlassen) und $\alpha \in \mathfrak{A}_0$, so ist $\alpha\nu\alpha^{-1}$ Produkt der eigentlichen Perspektivitäten $\alpha\pi_\varrho\alpha^{-1}$, welche ebenfalls die Achsen festlassen, also $\alpha\nu\alpha^{-1} \in \mathfrak{N}_0$. Weil $\mathfrak{A}_0$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}_0\mathfrak{Z}_0$ vom Index 2 ist, so ist $\mathfrak{A}_0$ sogar Normalteiler in $\mathfrak{A}_0\mathfrak{Z}_0$. Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen. Aus ihm folgt sofort der

[24]) Dieser Satz gilt für beliebige Translationsebenen, wenn der Ausdruck „Koordinatenfastkörper" durch „Koordinatenquasikörper" ersetzt wird. Denn bei dem Beweis wurde von dem Assoziativgesetz der Multiplikation kein Gebrauch gemacht.

Satz 13. *Die Kollineationen einer Fastkörperebene sind genau die Abbildungen*

$$(x, y) \to (\sigma(x)\, a + c, \sigma(y)\, b + d) \tag{16}$$

und

$$(x, y) \to (\sigma(y)\, b + d, \sigma(x)\, a + c) \tag{16'}$$

mit $\sigma \in \mathfrak{a}(F)$; $a, b \in F^\times$ *und* $c, d \in F$.

Die Abbildungen (16) *sind genau die Kollineationen, welche die uneigentlichen Punkte der Koordinatenachsen festlassen (also diejenigen aus* $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{T}$*).*

Die Strukturen der Faktoren in der Produktentwicklung (15) sind bekannt, wenn man eine Übersicht über F (genauer: über die additive Gruppe von F, $F^\times$ und $\mathfrak{a}(F)$) hat. $\mathfrak{T}$ ist nämlich als Translationsgruppe von A isomorph zur direkten Summe der aditiven Gruppe von F mit sich (vgl. [1], S. 171/172). Nach Satz 8 ist $\mathfrak{N}_0 \cong F^\times \times F^\times$; ferner ist $\mathfrak{N}_0$ isomorph zur Automorphismengruppe $\mathfrak{a}(F)$ von F und $\mathfrak{Z}_0$ ist, abstrakt gesehen, die zyklische Gruppe der Ordnung 2.

Die Gruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{Z}_0$ sind abelsch, also erst recht auflösbar. $\mathfrak{A}$ ist nach Satz 12 also genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{N}_0$ es sind.

Satz 14. *Die Kollineationsgruppe einer Fastkörperebene ist genau dann auflösbar, wenn die multiplikative Gruppe und die Automorphismengruppe des Koordinatenfastkörpers auflösbar sind*[25]).

Besteht A aus endlich vielen Punkten und Geraden, so ist auch $\mathfrak{A}$ endlich. Sei nun q die Elementeanzahl von F (q ist eine Primzahlpotenz), ferner a die Ordnung von $\mathfrak{a}(F)$, so ergibt sich für die Ordnung n von $\mathfrak{A}$ aus Satz 12 die Formel:

$$n = 2q^2(q-1)^2 a. \tag{17}$$

4. Wir untersuchen jetzt, welche der Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$ *linear* sind, d.h. zu $\mathfrak{L}_0$ gehören. $\mathfrak{L}_0$ ist definiert als Menge derjenigen Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$, welche mit jedem Element von $\mathfrak{S}_0 \cong K^\times$ [26]) vertauschbar sind, d.h. $\mathfrak{L}_0$ ist der Zentralisator von $\mathfrak{S}_0$ in $\mathfrak{A}_0$. Nach Satz 11 besteht $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{L}_0 \cap \mathfrak{N}_0$ aus genau denjenigen durch ein $\sigma \in \mathfrak{a}(F)$ induzierten Abbildungen $(x, y) \leftrightarrow (\sigma x, \sigma y)$, welche linear sind. Das bedeutet für den zugehörigen Automorphismus σ genau:

$$\sigma(s)\,\sigma(x) = \sigma(s\,x) = s\,\sigma(x) \quad \text{für alle} \quad s \in K \quad \text{und} \quad x \in F,$$

d.h. $\sigma(s) = s$ für alle $s \in K$.

Satz 15. *Die Gruppen* $\mathfrak{T}_0$ *bzw.* $\mathfrak{L}_0/\mathfrak{N}_0$ *sind isomorph zur Gruppe* $\mathfrak{a}(F/K)$ *derjenigen Automorphismen von* F*, welche* K *elementweise festlassen, also der Automorphismen von* F *bezüglich* K.

[25]) Aus [10], insbesondere den Sätzen 1 und 18, kann man jetzt schließen, daß — von endlich vielen Ausnahmen abgesehen — die endlichen Fastkörperebenen auflösbare Kollineationsgruppen haben.

[26]) $K^\times$ ist die multiplikative Gruppe des Kernes K von F. Die Isomorphie mit der Streckungsgruppe $\mathfrak{S}_0$ folgt aus [1], Satz 11 und dem Zusatz zu Satz 16 (S. 175). Vgl. auch S. 151 dieser Arbeit.

Die Abbildungen aus $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_0 \mathfrak{S}_0$ haben die Form $(x, y) \leftrightarrow (s\,x\,a, s\,y\,b)$ mit $s \in K^\times$ und $a, b \in F^\times$. In $\mathfrak{\bar{M}}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{\bar{A}}_0$ liegen genau diejenigen Abbildungen dieser Art, welche gleichzeitig Automorphismen von F sind. Hierzu ist $s\,x\,a\,s\,y\,a = s\,x\,y\,a$ für alle $x, y \in F$ notwendig, d.h. $x\,a\,s\,y = x\,y$, mithin $a = s^{-1}$. Eine Abbildung $x \leftrightarrow s\,x\,s^{-1}$ mit $s \in K^\times$ ist aber ein Automorphismus von F, denn es gilt auch $s(x+y)s^{-1} = s\,x\,s^{-1} + s\,y\,s^{-1}$ für alle $x, y \in F$. Solche Automorphismen nennen wir *innere Automorphismen* des Fastkörpers F.

$\mathfrak{\bar{M}}_0$ oder $\mathfrak{M}_0/\mathfrak{N}_0$ ist also isomorph zur Gruppe der inneren Automorphismen von F.

Nach Satz 10 gilt $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_0$ genau dann, wenn jedes $s \in K$ mit jedem $x \in F$ vertauschbar ist, d.h. wenn der Kern in dem *Zentrum*[27]) von F liegt. In diesem Fall ist:

$$\mathfrak{a}(F/K) \cong \mathfrak{L}_0/\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{L}_0/\mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M},$$

d.h. $\mathfrak{L} > \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}(F/K) > \underline{1}$[28]).

Eine Übersicht über die wichtigsten in diesem Paragraphen vorkommenden Untergruppen von $\mathfrak{A}_0$ gibt das nebenstehende Diagramm.

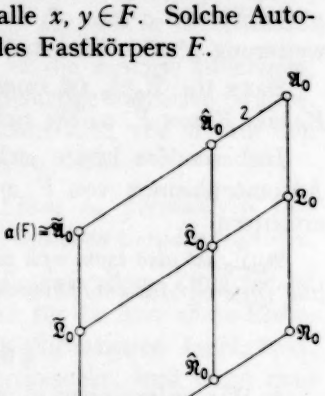


Fig. 1.

5. Was für eine Bedeutung hat $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0$ in Fastkörperebenen? Nach [*1*], Satz 20 ist diese Gruppe isomorph zu einer Untergruppe der vollen Automorphismengruppe von K. Wegen $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{N}_0 \mathfrak{\bar{A}}_0$ (vgl. Ziffer 1) und $\mathfrak{N}_0 \subseteq \mathfrak{L}_0$ gilt auch $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{L}_0 \mathfrak{\bar{A}}_0$, also auch:

$$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_0 \mathfrak{\bar{A}}_0/\mathfrak{L}_0 \cong \mathfrak{\bar{A}}_0/\mathfrak{L}_0 \cap \mathfrak{\bar{A}}_0 = \mathfrak{\bar{A}}_0/\mathfrak{\bar{L}}_0. \tag{18}$$

Wegen $\mathfrak{\bar{A}}_0 \cong \mathfrak{a}(F)$ und $\mathfrak{\bar{L}}_0 \cong \mathfrak{a}(F/K)$ gilt also:

$$\mathfrak{\bar{A}}_0/\mathfrak{\bar{L}}_0 \cong \mathfrak{a}(F)/\mathfrak{a}(F/K). \tag{18'}$$

Sei ϱ ein Automorphismus von K, der sich auf F *erweitern* läßt, d.h. zu dem es (mindestens) einen Automorphismus ϱ^* von F gibt, der ϱ in K induziert. Sind ϱ^* und ϱ^{**} zwei solche Erweiterungsautomorphismen von ϱ, so induziert $\varrho^{*-1}\varrho^{**}$ in K den identischen Automorphismus, d.h. $\varrho^{*-1}\varrho^{**} \in \mathfrak{a}(F/K)$. Umgekehrt induziert mit ϱ^* auch jedes $\varrho^*\sigma$ mit $\sigma \in \mathfrak{a}(F/K)$ dasselbe ϱ in K. Die Menge aller Erweiterungsautomorphismen eines Automorphismus ϱ von

[27]) Das Zentrum Z eines Fastkörpers F besteht aus denjenigen $a \in F$, für welche $a\,x = x\,a$ für alle $x \in F$ gilt. Z enthält stets die Elemente 0, 1 und -1 (letzteres nach Satz 1) und ist abgeschlossen bezüglich der Multiplikation und Division, jedoch *nicht* notwendig bezüglich der Addition und Subtraktion. Stets gilt $Z \subseteq K$.

[28]) Ist F der (eindeutig bestimmte) Fastkörper der Form $K_{q^n, n}$ (in der Bezeichnung von [*10*], S. 190; für Fastkörper dieser Art stimmen Zentrum und Kern überein) mit $q = 5$ und $n = 2$, so ist nach [*10*], Satz 18 die Automorphismengruppe von F zyklisch von der Ordnung 2; ferner gilt $\mathfrak{a}(F) = \mathfrak{a}(F/K) > \underline{1}$. Es gibt also Translationsebenen mit kommutativem Kern, für welche $\mathfrak{L} > \mathfrak{M}$ gilt. Für Desarguessche Ebenen ist dagegen stets $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$ (nach [*1*], Schluß von § 7).

K ist also ein Element aus $\mathfrak{a}(F)/\mathfrak{a}(F/K)$. Umgekehrt besteht ein solches Element stets aus allen Erweiterungen eines Automorphismus von K auf F.

Diese eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von $\mathfrak{a}(F)/\mathfrak{a}(F/K)$ und denen der Gruppe derjenigen Automorphismen von K, welche sich auf F erweitern lassen, ist ein Isomorphismus, denn erlaubt ϱ eine Erweiterung $\varrho^* \in \mathfrak{a}(F)$ und σ eine σ^*, so erlaubt der Automorphismus $\varrho\sigma$ von K eine Erweiterung $\varrho^*\sigma^*$. Wir erhalten also mittels (18) und (18') den

Satz 16. *$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0$ ist isomorph zur Gruppe derjenigen Automorphismen des Kernes K von F, welche sich zu Automorphismen von F erweitern lassen.*

Insbesondere lassen sich die inneren Automorphismen von K stets zu Automorphismen von F, nämlich zu den inneren Automorphismen von F erweitern.

$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0$ ist also isomorph zu einer Gruppe von Automorphismen von K, welche alle inneren Automorphismen enthält[29]).

§ 6. Die Ausnahme-Ebene.

1. Wir untersuchen nunmehr die schon in § 2 eingeführte Ebene A_9 über dem Fastkörper F_9 aus 9 Elementen, insbesondere deren Kollineationsgruppe. Zunächst zeigen wir, daß A_9 eine Ebene vom Typ V (im Sinne von Satz 4) ist[30]). Hierzu beweisen wir zunächst:

Satz 17. *Die Kollineationsgruppe $\mathfrak{A}$ der Ausnahme-Ebene A_9 permutiert die Punkte der uneigentlichen Geraden transitiv.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß der uneigentliche Punkt u der x-Achse durch eine geeignete Kollineation in jeden anderen Punkt der uneigentlichen Geraden U übergeführt werden kann. ε führt u in den uneigentlichen Punkt v der y-Achse über [vgl. § 2, (6)]. Die durch

$$\eta(x, y) = (x - y, x + y) \tag{19}$$

definierte Abbildung η von A_9 auf sich ist eine Kollineation. Denn η führt die x-Achse in die Gerade $y = x$, diese in die y-Achse, diese in die Gerade $y = -x$ und diese schließlich wieder in die x-Achse über. Jede Gerade $y = xa$ für $a \neq 0, \pm 1$ aus F_9 wird durch η auf sich abgebildet, denn wegen der Ausnahmebedingung A von F_9 (vgl. § 1, Ziffer 4) ergibt sich $(x - xa)a = x + xa$. Somit führt η das Büschel der Geraden durch den Nullpunkt (m. a. W. die Kongruenz von A_9 im Sinne von [1], § 2) in sich über. Außerdem ist η linear über dem Kern von F_9. Nach [1], Satz 19 ist also η eine homogene Kollineation. Sie führt u in den uneigentlichen Punkt w von $y = x$ über. Da u durch $\bar{c}\,\eta$ in den uneigentlichen Punkt der Geraden $y = xc$ $(c \in F_9^\times)$ abgebildet wird, so ist die Transitivität von $\mathfrak{A}_0$ und damit auch die von $\mathfrak{A}$ auf U bewiesen.

Ist $p \in U$ mit $p = \alpha u$ $(\alpha \in \mathfrak{A}_0)$ gegeben, so sind wegen der Zulässigkeit von (u, v) auch $(p, \alpha v)$ und $(\alpha v, p)$ zulässig. Wäre (p, q) für ein $q \neq \alpha v$ aus U zulässig, so wäre A_9 DESARGUESsch nach Hilfssatz 7 von § 2.

[29]) Diese letzte Bemerkung läßt sich für beliebige Translationsebenen beweisen und liefert dann eine Verschärfung des Satzes 20 aus [1].

$\mathfrak{A}_9$ *ist also eine Ebene vom Typ* V[30]).

2. Nach Satz 17 werden die Geraden durch den Nullpunkt durch $\mathfrak{A}_0$ transitiv permutiert.

Hilfssatz 12. *Die von dem Nullpunkt und dem uneigentlichen Punkt verschiedenen Punkte einer Geraden G durch* (0, 0) *werden transitiv permutiert durch die Untergruppe derjenigen Kollineationen von* $\mathfrak{A}_0$, *welche G festlassen.*

Denn wir können (nach Satz 17) o. B. d. A. G als die x-Achse annehmen, und nun bilden die Kollineationen der Form $\underline{a}$ eine derartige transitive Gruppe. Aus Satz 17 und Hilfssatz 12 folgt sofort die Transitivität von $\mathfrak{A}_0$ auf den von (0, 0) verschiedenen eigentlichen Punkten von $\mathfrak{A}_9$, d. h.

Satz 18. *Die Kollineationen der Ausnahme-Ebene* $\mathfrak{A}_9$ *permutieren ihre eigentlichen Punkte zweifach transitiv, mithin ihre eigentlichen Geraden transitiv.*

3. Wir wollen jetzt die Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$ alle aufstellen. Zunächst ist zu bemerken, daß die Ergebnisse der §§ 4 und 5 auch für die Ausnahme-Ebene richtig bleiben, wenn man sich auf diejenigen Kollineationen beschränkt, welche die Koordinatenachsen festlassen oder vertauschen, und wenn man Kollineationen als „projektiv" nur dann bezeichnen würde, wenn sie Produkt von Perspektivitäten sind, welche ebenfalls die Achsen vertauschen oder festlassen.

Eine Kollineation aus $\mathfrak{A}_0$, die (1, 0) in einen Punkt der Geraden $y = xd$ $(d \in F_9^\times)$ bzw. $x = 0$ bzw. $y = 0$ abbildet, führt (0, 1) notwendig über in einen Punkt von $y = -xd$ bzw. $y = 0$ bzw. $x = 0$, denn $\mathfrak{A}_9$ ist eine Ebene vom Typ V.

Die Kollineation $\underline{a}\,\bar{b}\,\eta\,\bar{c}$ bildet (1, 0) auf (a, b) und (0, 1) auf $(-ca, cb)$ $(a, b, c \in F_9^\times)$ ab. Durch $\underline{a}\,\bar{b}$ bzw. $\varepsilon\,\underline{a}\,\bar{b}$ wird (1, 0) in $(a, 0)$ bzw. $(0, a)$ und (0, 1) in $(0, b)$ bzw. $(b, 0)$ abgebildet. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}_0$ den Komplex, der aus allen Kollineationen der Form $\underline{a}\,\bar{b}\,\eta\,\bar{c}$, $\underline{a}\,\bar{b}$ und $\varepsilon\,\underline{a}\,\bar{b}$ mit $a, b, c \in F_9^\times$ besteht. $\mathfrak{K}_0$ enthält $8^3 + 8^2 \cdot 2 = 8^2 \cdot 10 = 640$ Elemente. Nach der im vorigen Absatz gemachten Bemerkung gibt es zu jedem $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ genau ein $\varkappa \in \mathfrak{K}_0$, welches auf (1, 0) und (0, 1) dieselbe Wirkung wie α hat. $\alpha\varkappa^{-1}$ läßt also (1, 0) und (0, 1) fest, wird mithin nach Satz 11 durch einen Automorphismus von F_9 induziert. Es ist also $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{K}_0\mathfrak{A}_0$, und diese Produktzerlegung ist für jedes $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ eindeutig bestimmt. Nach [*10*], Satz 18 ist die Automorphismengruppe von F_9 isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ in drei Ziffern, also hat $\mathfrak{A}_0$ die Ordnung 6. Mithin hat $\mathfrak{A}_0$ die Ordnung $6 \cdot 8^2 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$. Wir erhalten mithin den

Satz 19. *Jede Kollineation* $\alpha \in \mathfrak{A}$ *der Ausnahme-Ebene* $\mathfrak{A}_9$ *ist eindeutig darstellbar durch* $\underline{a}\,\bar{b}\,\eta\,\bar{c}\,\sigma\,\tau$ *oder* $\underline{a}\,\bar{b}\,\sigma\,\tau$ *oder* $\varepsilon\,\underline{a}\,\bar{b}\,\sigma\,\tau$ $(a, b, c \in F_9^\times)$, *wo* $\sigma \in \mathfrak{A}_0$ *und* τ *eine Translation bedeutet. Die Ordnungen von* $\mathfrak{A}_0$ *bzw.* $\mathfrak{A}$ *sind* $2^8 \cdot 3 \cdot 5$ *bzw.* $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5 = 311040$.

[30]) Es wurde bereits in § 2 bewiesen, daß keine weitere Translationsebene vom Typ V sein kann.

Der letzte Teil des Satzes folgt aus der Bemerkung, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{T}$ und 9^2 die Ordnung der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ ist.

Die Gruppe $\mathfrak{A}_0$ wird also von η, den Kollineationen der Form $\underline{a}$ und $\overline{b}$ ($a, b \in F_9^\times$) sowie den Elementen aus $\mathfrak{A}_0$ erzeugt. Man kann nun zeigen, daß $\mathfrak{A}_0$ bereits in dem Erzeugnis von η und den $\underline{a}$ und $\overline{b}$ liegt, d.h.

Satz 20[31]. *Die Gruppe aller Kollineationen der Ausnahme-Ebene wird erzeugt durch die Translationen, die (in § 4 erklärten) homogenen Perspektivitäten $\underline{a}$ und $\overline{b}$ ($a, b \in F_9^\times$) und die (durch (19) definierte) Kollineation η.*

Beweis. η^{-1} ist durch $\eta^{-1}(x, y) = (-x-y, x-y)$ gekennzeichnet. Dies ergibt sich nach leichter Rechnung, wenn man berücksichtigt, daß F_9 die Charakteristik 3 hat. Daraus folgt nun: Die Kollineation

$$\sigma_c = \underline{(-1+c)}\,\overline{(-1-c)}\,\eta^{-1}\,\overline{c}^{-1}\,\eta\,\overline{c}\,\eta \tag{20}$$

ist für von 0 und ± 1 verschiedene $c \in F_9^\times$ eine Kollineation aus $\mathfrak{A}_0$ der Ordnung 2[32]. Es ist $\sigma_c = \sigma_{-c}$ jedoch sind σ_c, σ_{c+1} und σ_{c-1} paarweise verschieden und stellen wegen $\mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{S}_3$ alle Automorphismen der Ordnung 2 dar. Die zwei Automorphismen der Ordnung 3 sind Produkte von je zwei Automorphismen der Ordnung 2. Damit ist alles gezeigt.

4. Die von $\mathfrak{A}_0$ auf den Punkten der uneigentlichen Geraden U induzierte Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ ist isomorph zu $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{S}_0$ und hat die Ordnung $2^7 \cdot 3 \cdot 5 = 1920$[33]. Sie ist (nach Satz 17) transitiv, ferner ist sie imprimitiv. Eine Schar konjugierter Imprimitivitätssysteme (vgl. [*11*], S. 36) bilden offenbar die Paare zulässiger Punkte, wenn man von ihrer Anordnung absieht, m.a.W. die Mengen $\{p, q\} \subset U$ mit $(p, q) \in Z$. Bezeichnen wir die aus diesen Systemen bestehende Menge mit U^*, so können wir sagen, daß $\mathfrak{P}$ auf U^* eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ vom Grade 5 induziert. Nennen wir $\mathfrak{R}_0$ die Gruppe derjenigen homogenen Kollineationen, welche jedes dieser Imprimitivitätssysteme (d.h. jedes Element aus U^*) in sich überführen, so ist $\mathfrak{P}^*$ isomorph zu $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{R}_0$. Weil $\mathfrak{P}^*$ höchstens die Ordnung 120 hat, so hat $\mathfrak{R}_0$ mindestens die Ordnung $3840 : 120 = 2^5 = 32$. Die von $\mathfrak{R}_0$ auf U induzierte Permutationsgruppe $\mathfrak{Q} \cong \mathfrak{R}_0/\mathfrak{S}_0$ hat also mindestens die Ordnung 16. Da jedes $\pi \in \mathfrak{Q}$ die Punkte $p, q \in U$ mit $(p, q) \in Z$ entweder vertauscht oder festläßt, so hat andererseits $\mathfrak{Q}$ höchstens die Ordnung 32. Aus beiden Bemerkungen folgt: Die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ ist entweder 16 oder 32. Im ersteren Falle ist $\mathfrak{P}^*$ isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_5$, im zweiten isomorph zur alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_5$ in 5 Ziffern. Jedenfalls folgt also

Satz 21. *Die Kollineationsgruppe $\mathfrak{A}$ der Ausnahme-Ebene enthält die alternierende Gruppe in 5 Ziffern, ist also insbesondere nicht auflösbar.*

---

[31]) Dieses Ergebnis wurde im wesentlichen bereits in [*4*], Anhang II ohne Beweis angegeben.

[32]) Der durch σ_c auf F_9 induzierte Automorphismus $\overline{\sigma}_c$ hat die Form

$$\overline{\sigma}_c x = (x - xc)(-1+c).$$

Es ist $\overline{\sigma}_c(c) = -c$, dagegen $\overline{\sigma}_{c\pm1}(c) = -c \pm 1$.

[33]) Nicht, wie in [*4*], Anhang II angegeben, die Ordnung 3840.

Es ist jetzt auch leicht zu entscheiden, welcher der beiden oben genannten Fälle nun tatsächlich auftritt. Die Permutation, welche η auf U^* induziert, ist nämlich nach Ziffer 1 (vgl. den Beweis von Satz 17) eine Transposition, also ungerade. Somit ist $\mathfrak{P}^*$ isomorph zu $\mathfrak{S}_5$ und $\mathfrak{Q}$ hat die Ordnung 16, mithin $\mathfrak{R}_0$ die Ordnung 32. Ferner ist $\mathfrak{Q}$ abelsch vom Typus (2, 2, 2, 2), denn jede nichtidentische Permutation aus $\mathfrak{Q}$ hat die Ordnung 2. Mithin enthält $\mathfrak{P}$ einen elementar-abelschen Normalteiler der Ordnung 16 mit einer zu $\mathfrak{S}_5$ isomorphen Faktorgruppe. Weitere einfache[34]) Gruppen treten also in $\mathfrak{P}$ und auch in $\mathfrak{A}$ nicht auf.

5. Wir wollen jetzt unter den Kollineationen aus $\mathfrak{A}$ die projektiven kennzeichnen, d.h. diejenigen, welche sich als Produkt von Perspektivitäten darstellen lassen. Wir beweisen den

Satz 22. *Eine Kollineation der Ausnahme-Ebene ist genau dann projektiv, wenn die von ihr auf den Punkten der uneigentlichen Geraden U induzierte Permutation gerade ist. Die Gruppe der projektiven Kollineationen ist ein Normalteiler vom Index 2 in der Gruppe aller Kollineationen.*

Beweis. (a) Zunächst zeigen wir, daß jede Perspektivität eine gerade Permutation auf U induziert. Eine Translation induziert auf U die identische Permutation, welche gerade ist. Sei nun π eine eigentliche Perspektivität. Deren Zentrum ist ein $p \in U$, und deren Achse geht durch ein $q \in U$ mit $(p, q) \in Z$. Nach Satz 17 können wir o. B. d. A. annehmen, daß $p = (\infty)$ und $q = (0)$ ist[35]). Dann ist $\pi = \bar{a}$ für ein $a \in F_9^\times$. Sei außerdem zunächst $a \neq \pm 1$. Dann induziert $\bar{a}$ auf U ein Produkt von zwei viergliedrigen Zyklen der Form $\big((b), (ba), (-b), (-ba)\big)$ mit $b \neq 0$, also eine gerade Permutation. Ebenso induzieren $\bar{1}$ und $\overline{-1}$ gerade Permutationen, letztere wegen $\overline{-1} = \bar{a}^2$ und erstere, weil $\bar{1}$ die identische Kollineation ist. Jede Perspektivität, mithin also auch jede projektive Kollineation, induziert also auf U eine gerade Permutation.

(b) η induziert auf U nach Ziffer 1 den viergliedrigen Zyklus

$$\big((0), (1), (\infty), (-1)\big),$$

also eine ungerade Permutation. Wegen (a) können wir also sagen:

η ist nicht projektiv.

(c) Um die Umkehrung von (a) zu beweisen, beschränken wir uns auf Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$, was wir o. B. d. A. tun können wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{T}$, und weil jedes $\tau \in \mathfrak{T}$ auf U die Identität induziert.

Jede Kollineation aus $\mathfrak{R}_0$ ist projektiv, denn $\mathfrak{R}_0$ besteht genau aus den projektiven Kollineationen $\underline{a}\,\bar{a}$, ε und $\overline{-1}$ sowie den Produkten daraus. Jedenfalls liegen diese Abbildungen in $\mathfrak{R}_0$; das sind aber bereits 32, so daß $\mathfrak{R}_0$ auch nicht mehr Kollineationen enthalten kann[36]). $\mathfrak{R}_0$ ist also eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{N}_0$ aller homogenen projektiven Kollineationen. $\mathfrak{R}_0$ liegt

[34]) „Einfach" ist hier im Sinne von „einfach und nicht abelsch" gemeint.

[35]) Mit (a) bezeichnen wir den uneigentlichen Punkt der Geraden $y = xa$ $(a \in F_9)$, mit (∞) den uneigentlichen Punkt von $x = 0$, ganz entsprechend wie es in [4] geschehen ist.

[36]) Dies kann man auch leicht unter Zuhilfenahme von Satz 13 nachrechnen.

sogar echt in $\mathfrak{N}_0$, weil z.B. $\bar{a}$ in $\mathfrak{N}_0$, jedoch für $a \neq \pm 1$ nicht in $\mathfrak{N}_0$ liegt. $\mathfrak{N}_0$ ist Normalteiler in $\mathfrak{A}_0$ (vgl. [1], S. 180); dieser liegt sogar echt in $\mathfrak{A}_0$ wegen $\eta \notin \mathfrak{N}_0$.

Wir haben also $\mathfrak{R}_0 < \mathfrak{N}_0 < \mathfrak{A}_0$ mit $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{R}_0 \cong \mathfrak{P}^* \cong \mathfrak{S}_5$ gezeigt. Hieraus folgt nach bekannten Sätzen der Gruppentheorie (vgl. [11], S. 54), daß $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{R}_0$ zu $\mathfrak{A}_5$ isomorph ist.

$\mathfrak{N}_0$ ist also Normalteiler von $\mathfrak{A}_0$ vom Index 2; und nun folgt sofort die Projektivität derjenigen Kollineationen, welche gerade Permutationen induzieren.

Man sieht jetzt auch leicht unter Zuhilfenahme von Satz 20, daß $\mathfrak{P}$ das Erzeugnis der Viererzyklen $(pqrs)$ mit zulässigen (p, r) und (q, s) ist[37]).

Literatur.

[1] ANDRÉ, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954). — [2] BAER, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137—152 (1942). — [3] GINGERICH, H. F.: Generalized fields and Desargues configurations. Abstract of a Thesis of the University of Illinois. Urbana, Ill. 1945. 12 S. — [4] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [5] KLINGENBERG, W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **18**, 120—143 (1952). — [6] LENZ, H.: Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Jber. DMV **57**, 20—31 (1954). — [7] LOMBARDO-RADICE, L.: Sui sistemi cartesiani di coordinate dei piani grafici h-l-transitivi. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9**, 24—29 (1954). — [8] PICKERT, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. Math. **3**, 335—342 (1952). — [9] ZAPPA, G.: Sui piani grafici finiti h-l-transitivi. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9**, 16—24 (1954). — [10] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 187—220 (1936). — [11] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. Hamburger mathematische Einzelschriften, H. 21. Leipzig 1937.

[37]) $\mathfrak{P}$ ist nicht, wie in [4], Anhang II angegeben, der Zentralisator des Produktes aller Zyklen zulässiger Punktepaare. Denn läge dieses Produkt in $\mathfrak{P}$ und damit auch in $\mathfrak{Q}$, so auch jede Transposition $(p\,q)$ mit $(p, q) \in Z$. Dann hätte aber $\mathfrak{Q}$ die Ordnung 32 und nicht, wie hier gezeigt, die Ordnung 16.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 18. Dezember 1954.)

MESCHKOWSKI, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 161—166 (1955)

Darstellung analytischer Funktionen durch den Randwinkel des Bildbereiches.

Von
HERBERT MESCHKOWSKI.

I. Einleitung.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein einfach zusammenhängender schlichter Bereich mit stückweis stetiger Tangente in der ζ-Ebene. Ist $\zeta = \zeta(z)$ eine Funktion, die den Einheitskreis der z-Ebene schlicht auf $\mathfrak{B}$ abbildet, so ist bekanntlich (Literaturverzeichnis [1]) die Ableitung $\zeta'(z)$ so darstellbar:

$$\zeta'(z) = C \cdot e^{-\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \log(1 - z\cdot e^{-i\vartheta})\, d\psi(\vartheta)} \tag{1}$$

Dabei ist $z = e^{i\vartheta}$ (auf dem Einheitskreis) und $\psi = \psi(\vartheta)$ der Randwinkel von $\mathfrak{B}$.

(1) wird unter Benutzung der Beziehung

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = u(e^{i\vartheta}) = \Re\left(1 + z\,\frac{\zeta''}{\zeta'}\right); \qquad (|z| = 1) \tag{2}$$

aus dem Poissonschen Integral

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi}\cdot\int \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\cdot \Re f(e^{i\vartheta})\, d\vartheta \tag{3}$$

abgeleitet. Eine solche Darstellung (1) ist auch dann noch möglich, wenn nur vorausgesetzt wird, daß die Funktion $\zeta(z)$ auf ein Gebiet von „beschränkter Randdrehung" abbildet. Das heißt: Der Grenzwert

$$\alpha = \lim_{r\to 1} \int_0^{\pi} |u(r\,e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$$

soll endlich sein. Das Integral in (1) ist dann im Stieltjesschen Sinne zu verstehen.

Im folgenden sollen Verallgemeinerungen von (1) angegeben werden *für mehrfach* zusammenhängende Bereiche. Dieser Schritt liegt nahe, weil das Poissonsche Integral (3) für mehrfach zusammenhängende Bereiche verallgemeinert wurde [8]. Es zeigt sich aber, daß andere Voraussetzungen für die Ableitung von (1) nicht so ohne weiteres auf mehrfach zusammenhängende Bereiche übertragen werden können. Für zweifach zusammenhängende Bereiche (Ausgangsbereich ist der Kreisring) wird eine zu (1) analoge Darstellung angegeben, wobei die Voraussetzungen über das Randverhalten der zulässigen Funktionen aber noch nicht so allgemein gehalten werden können, wie das bei einfach zusammenhängenden Bereichen möglich ist.

Für mehr als zweifach zusammenhängende Bereiche wird eine Formel abgeleitet, in die die Richtung der Bildtangente (nicht die Richtungsänderung) eingeht.

II. Definitionen.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein beschränkter n-fach zusammenhängender schlichter Bereich, dessen Rand $\mathfrak{C}$ aus analytischen Kurvenbögen $\mathfrak{C}_\nu$ bestehen möge. $\mathfrak{C}_1$ sei die äußerste Randkomponente.

$A(z,u)$ und $B(z,u)$ seien die Funktionen, die $\mathfrak{B}$ so auf einen Parallelschlitzbereich mit Schlitzen parallel zur reellen (imaginären) Achse abbilden, daß dabei der innere Punkt $z=u$ in ∞ übergeht (Residuum $+1$).

$r(z;u,v)$ und $k(z;u,v)$ heißen die Funktionen, die $\mathfrak{B}$ auf einen Radial- bzw. Kreisschlitzbereich abbilden, so daß u in 0 und v in ∞ übergeht (Residuum $+1$). Schließlich soll $E(z,u)$ die Funktion sein, die $\mathfrak{B}$ so auf einen „beschränkten Kreisschlitzbereich"[1]) abbildet, daß $\mathfrak{C}_1$ in den äußeren Begrenzungskreis übergeht, u in 0 $(E'(u,u)=1)$.

Wir definieren nun wie [4]:

$$M(z,\bar{u}) = \tfrac{1}{2}\left(A(z,u) - B(z,u)\right),$$
$$N(z,u) = \tfrac{1}{2}\left(A(z,u) + B(z,u)\right).$$

Diese Funktionen können durch vollständige Orthonormalsysteme [6], [7] so dargestellt werden:

$$(4)\qquad \begin{cases} M'(z,\bar{u}) = \dfrac{d}{dz} M(z,\bar{u}) = \pi \sum \varphi_\nu(z)\,\overline{\varphi_\nu(u)}, \\ N'(z,u) = \dfrac{d}{dz} N(z,u) = -\dfrac{1}{(z-u)^2} + \sum c_\nu(u)\,\varphi_\nu(z), \\ c_\nu(u) = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_{\mathfrak{C}} \frac{\overline{\varphi_\nu(z)}\,dz}{z-u}. \end{cases}$$

Aus diesen Darstellungen folgt unter anderem, daß $N'(z,u)$ analytisch ist auch in u, $M'(z,\bar{u})$ in $\bar{u}$.

Weiter setzen wir

$$P(z;u,v) = \tfrac{1}{2}\left(\left(\log k(z;u,v) - \log r(z;u,v)\right)\right),$$
$$Q(z;u,v) = \tfrac{1}{2}\left(\log k(z;u,v) + \log r(z;u,v)\right).$$

Dann gilt bekanntlich [4] für Randpunkte des Bereiches:

$$(5)\qquad M'(z,\bar{u})\,dz = \overline{N'(z,u)\,dz}.$$

Die Verallgemeinerung von (3) lautet dann [8] so:

$$(6)\qquad f'(u) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \Re f\, N'(z,u)\,dz$$

[1]) Darunter verstehen wir einen Bereich, dessen Rand aus einem Kreis um den Nullpunkt und aus $n-1$ konzentrischen Kreisschlitzen besteht, die im Innern des Vollkreises liegen.

oder in integrierter Form:

$$f(u) - f(v) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \Re f \, Q'_z(z; u, v) \, dz. \tag{7}$$

Für den Realteil einer analytischen Funktion gilt [8]:

$$\Re f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \Re f \, d \arg E(z, u). \tag{8}$$

III. Darstellung im Kreisring.

Sei jetzt $\mathfrak{R}_r$ der Kreisring mit den Kreisen vom Radius 1 bzw. $r < 1$ um den Nullpunkt der z-Ebene. $\zeta = \zeta(z)$ möge $\mathfrak{R}_r$ so abbilden, daß der Rand des Bildbereiches noch analytisch ist[2]). Es sollen keine Verzweigungspunkte in $\mathfrak{R}_r$ auftreten, aber die Abbildung braucht nicht schlicht zu sein. Setzen wir

$$\begin{cases} f(z) = 1 + z \dfrac{\zeta''(z)}{\zeta'(z)}, \\ \Re f(z) = u(z), \end{cases} \tag{9}$$

dann gilt wieder [vgl. (2)] auf beiden Randkreisen

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = u(z). \tag{10}$$

Dabei ist ψ wieder die Richtung der Tangente im Bildgebiet, $\varphi = \arg z$.

Da $\zeta'(z) \neq 0$ vorausgesetzt wurde, ist $f(z)$ in $\mathfrak{R}_r$ analytisch, und es gilt nach der verallgemeinerten Poissonschen Integralformel (6)

$$f'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(z) \, N'(\xi, z) \, d\xi.$$

Wegen (5) und unter Benutzung der aus (4) sich ergebenden Beziehung $\overline{M'(\xi, \bar{z})} = M'(z, \bar{\xi})$ folgt daraus:

$$f'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) \, M'(z, \bar{\xi}) \, d\bar{\xi}. \tag{11}$$

Integration ergibt:

$$\frac{z\zeta''}{\zeta} = f(z) - 1 = f(z_0) - 1 - \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) \left(M(z, \bar{\xi}) - M(z_0, \bar{\xi}) \right) d\bar{\xi}. \tag{12}$$

Setzt man nun

$$\lambda(z, \bar{\xi}) = \int_{z_0}^{z} \frac{M(t, \bar{\xi}) - M(z_0, \bar{\xi})}{t} \, dt, \tag{13}$$

so wird

$$\zeta'(z) = \left(\frac{z}{z_0} \right)^{f(z_0) - 1} \cdot e^{-\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) \lambda(z, \bar{\xi}) \, d\bar{\xi}} \tag{14}$$

---

[2]) Wir werden später diese Voraussetzungen verallgemeinern.

Dabei ist $\zeta(z)$ durch die Vorschrift $\zeta'(z_0)=1$ in dem (in $\mathfrak{R}_r$ frei wählbaren) Punkt z_0 normiert. Wenn es in $\mathfrak{R}_x$ einen Punkt z_0 gibt, für den $\zeta''(z_0)=0$ gilt, dann vereinfacht sich (14), wenn man diesen Punkt z_0 als untere Grenze für die Integrationen wählt. Dann ist nämlich $f(z_0)-1=0$.

Die durch (13) definierte Funktion $\lambda(z,\bar{\xi})$ kann als eine bekannte Gebietsfunktion angesehen werden. $M(z,\bar{\xi})$ kann ja durch die Reihenentwicklung (4) berechnet werden. Es ergibt sich für den Kreisring $\mathfrak{R}_r$ ([7], S. 86)[3]:

$$M'(z,\bar{\xi}) = \frac{1}{\bar{\xi}z}\,\wp(\log z\bar{\xi}/2\pi i,\ 2\log r) + \frac{1}{\pi i}\,\zeta(\pi i).$$

Die Darstellung (14) gilt auch dann noch, wenn $\zeta(z)$ auf dem Rand nicht mehr regulär ist, aber $u(z)=\Re\left(1+z\,\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)$ auf dem Rand noch teilweise stetig ist. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich die Verallgemeinerung der Poissonschen Integralformel auch noch gültig. Dagegen ist es nicht möglich, die Randwerte beliebig (abteilungsweise stetig) für $u(z)$ vorzuschreiben. (11) liefert dann und nur dann eine eindeutige analytische Funktion, wenn die vorgeschriebenen Randwerte den Bedingungsgleichungen

$$\int u(z)\,d\omega_\nu^*(z)=0, \qquad \nu=1,2 \tag{15}$$

genügen [8]. Dabei ist $\omega_\nu(z)$ die zum harmonischen Maß $\omega_\nu(z)$ der Randkomponente $\mathfrak{C}_\nu$ konjugierte Potentialfunktion. Das hängt damit zusammen, daß die aus (7) sich für den Realteil ergebende Formel (8) auf die bekannte Formel

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}} u(\xi)\,d\omega(\xi,z)$$

zurückgeführt werden kann, wenn (15) gilt. — Fassen wir zusammen:

Satz 1. *Es sei $\zeta=\zeta(z)$ eine im Kreisring $r<|z|<1$ reguläre Funktion, $u(\xi)=\frac{d\psi(\xi)}{d\varphi}$ sei auf dem Rand des Ringes noch abteilungsweise stetig. Dabei ist*

$$\psi=\arg d\psi(\xi),$$
$$\varphi=\arg\xi \quad \text{für} \quad |\xi|=r \quad \text{und} \quad |\xi|=1.$$

Dann gilt

$$\zeta(z)-\zeta(z_0)=\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\omega}{z_0}\right)^{f(z_0)-1}\cdot e^{-\frac{1}{\pi i}\int_{\mathfrak{C}} u(\xi)\,\lambda(\omega,\bar{\xi})\,\overline{d\xi}}\cdot d\omega, \tag{16}$$

wobei $\lambda(\omega,\bar{\xi})$ die durch (13) definierte Funktion ist. Ist umgekehrt in (16) für $u(\xi)$ eine abteilungsweise stetige Funktion vorgegeben, die den Randbedingungen (15) genügt, so ist die durch (16) definierte Funktion $\zeta(z)$ im Kreisring eindeutig und analytisch. In allen Stetigkeitspunkten von $u(\xi)$ hat dann

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=\Re\left(1+\frac{z\,\zeta''}{\zeta'}\right)$$

die vorgegebenen Randwerte $u(\xi)$.

[3] In dieser Formel ist $\zeta(\log z\,\bar{\xi})$ das bekannte Integral der $\wp$-Funktion, nicht etwa unsere Abbildungsfunktion $\zeta(z)$!

PAATERO hat in seiner ersten Arbeit [1] Beispiele angegeben, wie man Funktionen aus der vorgegebenen Randdrehung darstellen kann. Im Prinzip ist also das auch [unter Berücksichtigung der Bedingungen (15)] im Kreisring möglich. Nur wird die praktische Durchführung hier erheblich schwieriger (vgl. (13) und [7], S. 86).

IV. Darstellung in n-fach zusammenhängenden Bereichen.

Die Ergebnisse für den Kreisring können nicht ohne weiteres auf Bereiche von höherem Zusammenhang übertragen werden. Wählt man etwa für $n>2$ einen Vollkreisbereich als Normalbereich, so gilt (2) nicht mehr auf allen Randkreisen.

Diese Schwierigkeit tritt nicht auf, wenn man von einem beschränkten Kreisschlitzbereich (s. Abschnitt II) ausgeht. In diesem Fall haben aber die beteiligten Funktionen im allgemeinen an den Endpunkten des Schlitzes Singularitäten.

Es ist aber durch eine geringe Variation der Problemstellung möglich, die Betrachtungen vom Abschnitt III sogar auf beliebige, von n analytischen Kurven begrenzte Bereiche zu übertragen.

Es sei also $\mathfrak{B}$ ein von n analytischen Kurven $\mathfrak{C}_\nu$ $(\nu=1 \dots n)$ begrenzter schlichter Bereich, $\mathfrak{C}_1$ sei die äußerste Randkurve. $\zeta(z)$ sei eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion, und auch $\log \zeta'(z)$ soll in $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig und auf dem Rand noch abteilungsweise stetig sein. Schließlich sei für einen festen Punkt $u_0 \in \mathfrak{B}$: $\zeta'(u_0)=1$. Setzt man

$$\Re\left(\frac{1}{i}\log\zeta'\right) = \arg\zeta'(z) = v(z),$$

so wird nach (7):

$$\zeta(u) - \zeta(u_0) = \int_{u_0}^{u} e^{\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{C}} v(z)\, Q'(z;t,u_0)\, dz}\, dt. \tag{17}$$

Damit ist eine Darstellung gewonnen, bei der nicht $d\psi/d\varphi$, sondern

$$v = \psi - \arg dz = \arg\frac{d\zeta}{dz} = \Im\mathrm{m}\log\zeta'(z) \tag{18}$$

benutzt wird. v ist bekannt, wenn der Originalbereich und die Richtung der Bildtangente gegeben ist. Wir haben also:

Satz 2. *Es sei $\zeta(z)$ eine in einem beschränkten von n analytischen Kurven begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ definierte eindeutige analytische Funktion, $\log\zeta'(z)$ sei in $\mathfrak{B}$ ebenfalls analytisch und eindeutig, auf dem Rand noch abteilungsweise stetig, $\zeta'(u_0)=1$ für einen festen Punkt $u_0 \in \mathfrak{B}$. Dann ist $\zeta(u)$ durch (17) darstellbar, wobei $v(z)$ durch (18) definiert ist.*

Ist umgekehrt für $v(z)$ eine abteilungsweise stetige Randfunktion vorgegeben, die den Bedingungen

$$\int_{\mathfrak{C}_\nu} v(z)\, d\omega_\nu^*(z) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

genügt, so ist die durch (17) *dargestellte Funktion* $\zeta(u)$ *in* $\mathfrak{B}$ *regulär und eindeutig,* $\psi - \arg dz = \arg \frac{d\zeta}{dz} = \Im \log \zeta'(z)$ *hat dann in allen Stetigkeitspunkten von* $v(z)$ *die vorgegebenen Randwerte.*

Literatur.

[1] PAATERO, V.: Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. Ann. Acad. Sci. Fennicae A **33**, Nr. 9 (1931). — [2] PAATERO, V.: Über Gebiete von beschränkter Randdrehung. Ann. Acad. Sci. Fennicae A **37** Nr. 9 (1933). — [3] PAATERO, V.: Über die konforme Abbildung mehrblättriger Gebiete von beschränkter Randdrehung. Ann. Acad. Sci. Fennicae A **128** (1952). — [4] GARABEDIAN and SCHIFFER: Identities in the theory of conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 187—238 (1949). — [5] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1953. — [6] MESCHKOWSKI, H.: Verzerrungssätze für mehrfach zusammenhängende Bereiche. Compositio Math. **11**, 44—59 (1953). — [7] MESCHKOWSKI, H.: Beiträge zur Theorie der Orthonormalsysteme. Math. Ann. **127**, 107—129 (1954). — [8] MESCHKOWSKI, H.: Verallgemeinerungen der Poissonschen Integralformel auf mehrfach zusammenhängende Bereiche. Ann. Acad. Sci. Fennicae A **166** (1954).

Berlin-Dahlem, Thielallee 66.

(Eingegangen am 3. November 1954.)

CARLITZ, L.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 167—170 (1955)

Some class number relations.

By

LEONARD CARLITZ.

Apart from the well-known class number formulas due to KRONECKER and others (for references see [2; Chapter 6]), there is another type which apparently has not been explicitly stated. The object of this note is to give several instances of such results. (For class number formulas of another kind, see [1].)

Let as usual

$$\vartheta_3(q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \qquad \vartheta_0(q) = \vartheta_3(-q), \qquad \vartheta_2(q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(2n+1)^2}.$$

Then if $F(n)$ and $E(n)$ have their standard meaning, KRONECKER [5] has proved the following four formulas.

$$4\sum_0^{\infty} F(4n+2)\, q^n = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2^2(q)\,\vartheta_3(q), \tag{1}$$

$$4\sum_0^{\infty} F(4n+1)\, q^n = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_3^2(q), \tag{2}$$

$$8\sum_0^{\infty} F(8n+3)\, q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2^3(q), \tag{3}$$

$$12\sum_0^{\infty} E(n)\, q^n = \vartheta_3^3(q). \tag{4}$$

HURWITZ [4] has derived the following additional set of formulas

$$2\sum_0^{\infty} F(8n+2)\, q^n = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_3(q)\,\vartheta_3(q^2), \tag{5}$$

$$2\sum_0^{\infty} F(8n+6)\, q^n = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_3(q)\,\vartheta_2(q^2), \tag{6}$$

$$4\sum_0^{\infty} F(8n+1)\, q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_3^2(q^2), \tag{7}$$

$$4\sum_0^{\infty} F(8n+5)\, q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_2^2(q^2), \tag{8}$$

$$2\sum_0^{\infty} F(16n+2)\, q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_3(q^2)\,\vartheta_3(q^4), \tag{9}$$

$$2\sum_{0}^{\infty} F(16n+10)\,q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_3(q^2)\,\vartheta_2(q^4), \tag{10}$$

$$2\sum_{0}^{\infty} F(16n+6)\,q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_2(q^2)\,\vartheta_3(q^4), \tag{11}$$

$$2\sum_{0}^{\infty} F(16n+14)\,q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(q)\,\vartheta_2(q^2)\,\vartheta_2(q^4). \tag{12}$$

On the other hand if $R_{r,s}(n)$ denotes the number of representations of n as a sum of r odd and s even squares, then GLAISHER [3; page 10] has proved

$$\begin{cases} R_{0,6}(4n) = 4\{4E_2'(n) - E_2(n)\}, \\ R_{1,5}(4n+1) = 6\{E_2(4n+1) + \chi_2(4n+1)\}, \\ R_{2,4}(4n+2) = (-1)^n 60 E_2(2n+1), \\ R_{3,3}(4n+3) = -20E_2(4n+3), \\ R_{4,2}(4n) = 240E_2'(n), \\ R_{5,1}(4n+1) = 6\{E_2(4n+1) - \chi_2(4n+1)\}, \\ R_{0,6}(8n+6) = -8E_2(4n+3). \end{cases} \tag{13}$$

In these formulas $E_2(n)$ denotes the sum of the squares of the divisors of n which are of the form $4k+1$ diminished by the sum of the squares of the divisors of n which are of the form $4k+3$; $E_2'(n)$ denotes the sum of the squares of the divisors of n whose conjugates are of the form $4k+1$, diminished by the sum of the squares of the divisors of n whose conjugates are of the form $4k+3$; $\chi_2(m)$, where m is odd, denotes the sum of the squares of the primary Gaussion integers of norm m. Also if we put

$$\vartheta_2^r(q)\,\vartheta_3^s(q) = \sum_n R'_{r,s}(n)\,q^{\frac{1}{2}n}, \tag{14}$$

then

$$R_{r,s}(n) = \binom{r+s}{r} R'_{r,s}(n). \tag{15}$$

The most immediate class number formulas of the type we wish to indicate are obtained from (3) and (4). We get using the first and last of (13)

$$8\sum_{i+j=n} F(8i+3)\,F(8j+3) = -E_2(4n+3), \tag{16}$$

$$36\sum_{i+j=n} E(i)\,E(j) = 4E_2'(n) - E_2(n). \tag{17}$$

On the other hand, multiplying corresponding members of (3) and (4) leads to

$$96\sum_{2i+j=n} F(8i+3)\,E(j) = -E_2(4n+3). \tag{18}$$

Similarly (1) and (2) yield

$$(19) \qquad \sum_{i+j=n} F(4i+2)\,F(4j-2) = E_2'(n),$$

$$(20) \qquad 4\sum_{i+j=n} F(4i+1)\,F(4j+1) = (-1)^n E_2(2n+1),$$

$$(21) \qquad 16\sum_{i+j=n} F(4k+2)\,F(4i+1) = -E_2(4n+3).$$

Combining (1) and (3) gives

$$(22) \qquad 32\sum_{i+2j=n} F(4i-2)\,F(8j+3) = E_2(4n+1) - \chi_2(4n+1),$$

while (2) and (3) yield

$$(23) \qquad 2\sum_{i+2j=n} F(4i-3)\,F(8j+3) = E_2'(n);$$

similarly (1), (2) and (4) give

$$(24) \qquad 12\sum_{i+j=n} F(4i+2)\,E(j) = (-1)^n E_2(2n+1),$$

$$(25) \qquad 48\sum_{i+j=n} F(4i+1)\,E(j) = E_2(4n+1) + \chi_2(4n+1).$$

Turning next to the Hurwitz formulas, (5), ..., (12), we recall that

$$\vartheta_2^2(q) = 2\vartheta_2(q^2)\,\vartheta_3(q^2).$$

Thus for example if we multiply (5) and (6), the right member

$$= q^{-1}\vartheta_2^2(q)\,\vartheta_3^2(q)\,\vartheta_2(q^2)\,\vartheta_3(q^2) = \tfrac{1}{2}\,q^{-1}\vartheta_2^4(q)\,\vartheta_3^2(q).$$

Consequently we get

$$(26) \qquad \sum_{i+j=n} F(8i+2)\,F(8j-2) = 2E_2'(n).$$

Similarly (7) and (8) imply

$$(27) \qquad 4\sum_{i+j=n} F(8i+1)\,F(8j+5) = -E_2(4n+3).$$

If we multiply (9) and (10), the right member

$$= \tfrac{1}{2}\,q^{-\frac{3}{2}}\vartheta_2^2(q)\,\vartheta_3^2(q^2)\,\vartheta_2^2(q^2) = \tfrac{1}{8}\,q^{-\frac{3}{2}}\vartheta_2^6(q);$$

we therefore get

$$(28) \qquad 4\sum_{i+j=n} F(16i+2)\,F(16j+10) = -E_2(4n+3).$$

Again (11) and (12) yield

$$4\sum_0^\infty F(16n+6)\,q^{2n}\sum_0^\infty F(16n+14)\,q^{2n}$$
$$= \tfrac{1}{4}\,q^{-\frac{5}{2}}\vartheta_2^2(q)\,\vartheta_2^4(q^2) = \tfrac{1}{2}\,q^{-\frac{5}{2}}\vartheta_2^5(q^2)\,\vartheta_3(q^2),$$

which implies

$$(29) \qquad 8\sum_{i+j=n} F(16i+6)\,F(16j-2) = E_2(4n+1) - \chi_2(4n+1).$$

Finally combining (9) and (2) gives

$$\sum_{i+j=n} F(16i+2)F(16j-2) = 4E_2'(n), \tag{30}$$

while (10) and (11) imply

$$\sum_{i+j=n} F(16i+6)F(16j-6) = 4E_2'(n). \tag{31}$$

References.

[1] BELL, E. T.: A new type of class number relations. Trans. Amer. Math. Soc. **26**, 446—450 (1924). — [2] DICKSON, L. E.: History of the theory of numbers, vol. 3. Washington 1923. — [3] GLAISHER, J. W. L.: On the representation of a number as the sum of two, four, six, eight, ten, and twelve squares. Quart. J. Math. **38**, 1—62 (1907). — [4] HURWITZ, A.: Über die Anzahl der Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. J. reine angew. Math. **99**, 165—168 (1886) (Mathematische Werke, vol. 2, pp. 68—71, Basel 1933). — [5] KRONECKER, L.: Über quadratischen Formen von negativer Determinante. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1875**, 223—236 (Werke, vol. 4, pp. 247—259, Leipzig and Berlin 1929).

Dept. of Math., Duke University, Durham N.C. (USA.).

(Eingegangen am 19. Dezember 1954.)

FOSTER, A. L.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 171—188 (1955)

The identities of — and unique subdirect factorization within — classes of universal algebras.

By
ALFRED L. FOSTER.

1. Introduction.

A universal algebra $\mathfrak{P} = (P, o, \ldots)$, whose primitive operations are $o, \ldots$ operating in the class P of elements, is called *primal* if it is (1°) *functionally strictly complete*[1]) and (2°) of order >1.

Among the results established in [1] and [2][2])—which articles are basic forerunners of the present communication—we recall the fundamental

Theorem 1.1. *Let $\mathfrak{P}$ be a primal universal algebra. Then the following four classes of algebras are pairwise coextensive, up to isomorphisms:*

(1) *The class of universal algebras (of the same species as $\mathfrak{P}$) which satisfy all strict identities*[3]) *satisfied by $\mathfrak{P}$.*

(2) *The class of all subalgebras of direct powers of $\mathfrak{P}$.*

(3) *The class of all subdirect powers of $\mathfrak{P}$.*

(4) *The class of all normal subdirect powers of $\mathfrak{P}$*[4]).

With the algebra $\mathfrak{P}$ variously chosen as (i) the 2-element Boolean algebra F_2, (ii) the field F_p, (iii) the field F_{p^k} (= G.F. of p^k elements), (iv) the basic post algebra P_n, theorem 1 respectively specializes to corresponding known structure theorems for Boolean rings, p-rings, p^k-rings and general Post algebras. These and various other specializations of $\mathfrak{P}$, for instance the so-called n-field F_n, are incorporated in the papers [1] and [2].

---

[1]) That is if for any integer $k (1 \leq k < \infty)$ each mapping $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ of the set $P \times P \times \cdots \times P$ (k^{th} direct product) into the set P may be expressed in at least one way as a strict $\mathfrak{P}$-function, i.e., as some composition (via the primitive operations $o, \ldots$) of indeterminates $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ over P. The order (= number of elements) of a functionally complete algebra is necessarily finite (= finite algebra).

[2]) Here and throughout, [1] and [2] respectively refer to the two papers: FOSTER, *Generalized "Boolean" theory of universal algebras, I: Subdirect sums and normal representation theorem*, Math. Z. **58** (V), 306—336 (1953), and *II: Identities and subdirect sums of functionally complete algebras*, Math. Z. **59** (V), 191—199 (1953). Additional references are given in the bibliography of these papers.

[3]) A strict identity $\mathfrak{f}(\xi, \ldots) = \mathfrak{G}(\xi, \ldots)$ of a universal algebra is an identity in which both $\mathfrak{f}$ and $\mathfrak{G}$ are strict functions (see earlier footnote).

[4]) Contrary to the agreement in force in [1] and [2], we here admit $\overset{\circ}{|}$, the one-element algebra, among the direct (and therefore subdirect) powers of $\mathfrak{P}$ (see § 5). With this understanding and with the observation that $\overset{\circ}{|}$ satisfies all possible identities, theorem 1 as given above is immediately seen to be equivalent to the corresponding theorem as formulated in [2].

In the present paper we offer a considerable extension of basic results obtained in [1] and [2],—a generalization dealing with certain *families* $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_i\}$ of primal universal algebras $\mathfrak{P}_i$. (The $\mathfrak{P}_i \in \tilde{\mathfrak{P}}$ are of course all of the same species). An admissible family, $\tilde{\mathfrak{P}}$, will subsequently be called a *primal cluster*. While it is not feasible in this introductory paragraph to define the above and other pertinent concepts, in the interest of a preliminary orientation we shall nevertheless here state a partial version of one of the basic results which we shall obtain,

Theorem 1.2. *Let $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_i\}$ be a primal cluster of universal algebras, and let $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ be a finite subset of the $\mathfrak{P}_i \in \tilde{\mathfrak{P}}$. Then the following three classes of algebras are pairwise coextensive, up to isomorphisms*:

(i) *The class of universal algebras (of the same species as $\tilde{\mathfrak{P}}$) which satisfy all strict identities common to $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$, or, otherwise stated, which satisfy all strict identities of the algebra*

$$\mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_n} \quad \textit{(direct product)}$$

(ii) *The class of all subalgebras of algebras which are directly (i.e. direct product) representable by means of $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$.*

(iii) *The class of all algebras which are subdirectly representable by means of $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$* [5]).

We shall also establish the uniqueness of this representation within a given cluster, namely

Theorem 1.3. *If an algebra $\mathfrak{A}$ belongs to one (and hence to each) of the the three classes* (i), (ii), (iii) *of theorem 1.2 and if $\mathfrak{A} \neq \overset{\circ}{|}$ (= one-element algebra), then $\mathfrak{A}$ possesses one and only one set $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ of "primal factors" in the cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

2. *Independent algebras.*

Throughout this communication we shall be concerned with certain classes of universal algebras, all of the same species Sp. While not everywhere essential, we shall find it convenient, unless otherwise specified, to assume that Sp contains, among its primitive operations, at least one which is not a unary operation [6]). We shall further understand, even though not usually explicitly noted, that the identity operation $e\,(=e(\xi)$, or frequently denoted simply by ξ itself) is to be regarded as one of the primitive operations of each universal algebra, and hence of each species Sp.

Subject to the above, the species Sp may be chosen in an arbitrary manner, but is then to be kept fixed.

---

[5]) In (ii) and (iii) the direct, respectively subdirect products and powers of $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ are of unrestricted cardinality.

[6]) Since any composition of unary operations is again unary it follows, in particular, that the species Sp of any primal algebra, $\mathfrak{P}$, must necessarily contain at least one non-unary primitive operation.

By an *expression* $\Phi(\xi, \ldots)$ of species Sp we mean simply a finite set of one or more indeterminate-symbols ξ, η, etc. composed by means of the primitive operation-symbols of Sp. In each given algebra $\mathfrak{A}$ of species Sp such an expression Φ represents a particular strict $\mathfrak{A}$-function (see earlier footnote),—the operation-symbols now being identified with the primitive operations of $\mathfrak{A}$ and the indeterminate-symbols identified as indeterminates over $\mathfrak{A}$ [7]).

If Φ and Ψ are expressions of species Sp and if $\mathfrak{A}$ is an algebra of species Sp, then the notation $\Phi = \Psi(\mathfrak{A})$, also $\Phi = \Psi \pmod{\mathfrak{A}}$, also $\Phi \equiv \Psi(\mathfrak{A})$ (read: Φ congruent Ψ mod $\mathfrak{A}$) shall denote simply that $\Phi = \Psi$ is an identity (in fact a strict identity) of the algebra $\mathfrak{A}$. Similarly $\Phi \neq \Psi$ (or $\Phi \not\equiv \Psi$) $\pmod{\mathfrak{A}}$ denotes a non-identity in $\mathfrak{A}$.

Let now $\mathfrak{\tilde{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}$ be a class of algebras of species Sp. We shall call the class *(strictly) independent* if, corresponding to each set $\{\Phi_i\}$ of expressions of species Sp, there exists at least one expression X such that

$$\Phi_i = X(\mathfrak{A}_i), \quad (\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{\tilde{A}}) \text{ [8])}. \tag{2.1}$$

A *(strictly) dependent* class is one which is not independent.

The following observations are immediate consequences of the definition of independence: (a) $\mathfrak{\tilde{A}} = \mathfrak{A}$ (= single algebra) is always independent. (b) If $\mathfrak{\tilde{A}}$ is an independent class so is every subset of $\mathfrak{\tilde{A}}$. (c) If $\mathfrak{\tilde{A}}$ is independent so is $\mathfrak{\tilde{A}}'$, where $\mathfrak{\tilde{A}}' = \mathfrak{\tilde{A}}$ augmented by $\mathring{|}$, the one element algebra. (d) If $\mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{A}_2$ (isomorphism) and if $\mathfrak{A}_1 \neq \mathring{|}$, then $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{A}_2$ are dependent.

Lemma 2.1. (1) *If* $\mathfrak{\tilde{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}$ *is an independent class of algebras of species* Sp *and if* $\mathfrak{A}_i \neq \mathring{|}$ *for all* $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{\tilde{A}}$, *then* $\mathfrak{\tilde{A}}$ *is a finite class,* $\mathfrak{\tilde{A}} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$. (2) *A necessary and sufficient condition for a finite class* $\mathfrak{\tilde{A}} = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$ *to be independent is that there exist an expression* $K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *of species* Sp *such that*

$$\begin{cases} \xi_1 \big(= e(\xi_1)\big) = K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) & (\mathfrak{A}_1) \\ \xi_2 \qquad\quad = K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) & (\mathfrak{A}_2) \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & \vdots \\ \xi_n \qquad\quad = K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) & (\mathfrak{A}_n). \end{cases} \tag{2.2}$$

Proof of (1). In the definition of independence take the Φ_k to be the expressions $\xi_k \big(= e(\xi_k)\big)$. Then there exists an expression X such that

$$e(\xi_k) = X(\mathfrak{A}_k) \quad (\mathfrak{A}_k \in \mathfrak{\tilde{A}}).$$

---

[7]) It is to be emphasized that $\Phi(\xi, \ldots)$ and $\Phi(\eta, \ldots)$ are different expressions even though, in each algebra $\mathfrak{A}$, they represent the same self-mapping. In particular ξ and η [that is $e(\xi)$ and $e(\eta)$] are different expressions.

[8]) The formal similarity between the concept of independence and the Chinese residue theorem of elementary number theory is apparent. Indeed it may be shown that the latter is actually equivalent to a particular realization of the condition of independence.

X can have only a finite number, say n, of arguments, $X = X(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. It then follows that $\mathfrak{A} \Rightarrow \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$, for if $\mathfrak{A}_{n+1}$ were $\in \mathfrak{A}$ we should have

$$\xi_{n+1} = X(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad [\mathfrak{A}_{n+1}).$$

Since $\mathfrak{A}_{n+1} \neq$ such an identity is patently impossible.

Proof of (2). The necessity part follows from the definition of independence by again choosing the Φ_k as ξ_k, as in part (1) above; K is then the X of (2.1) demanded by the definition. The sufficiency part of (2) follows, since if such a K exists and if $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ are now any given expressions, then if X is the expression defined by

$$X = \text{def} = K(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

clearly, by insertion in (2.2) we have

$$\Phi_k = X \pmod{\mathfrak{A}_k}, \quad (\mathfrak{A}_k \in \mathfrak{A}).$$

The lemma is thus established.

3. *Algebras of class f; coframal algebras.*

We shall first define a modification of the concept "of class f" introduced in [1], [2]. A universal algebra $\mathfrak{A} = (A, o, \ldots)$ will be called *strictly of class f* if it possesses a *strict frame* $(A, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}) = (A, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}; 0, 1)$, that is: if it possesses a pair of elements $0, 1$ $(0 \neq 1)$ and three strict $\mathfrak{A}$-functions $\times$ (binary), ${}^{\frown}$ (unary) and ${}^{\smile}$ (unary) such that (1) $\xi^{\frown}$ and $\xi^{\smile}$ are both permutations (i.e., $1-1$ self mappings) of the class A, with ${}^{\smile}$ the inverse of ${}^{\frown}$; (2) $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$, $1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi$, $0^{\frown} = 1$ (for all $\xi \in A$), and (3) 0 (conceived as a constant function) may be expressed as some strict $\times, {}^{\frown}, {}^{\smile}$ function, i.e., as some $\times, {}^{\frown}, {}^{\smile}$ composite of one or more indeterminates $\xi, \ldots$ over the set A. Since $1 = 0^{\frown}$ it follows that 1 may then also be expressed as a strict $\times, {}^{\frown}, {}^{\smile}$ function.

Of the many familiar and other algebras which are strictly of class f (see [1], [2]) we here merely recall that each primal algebra $\mathfrak{P} = (P, o, \ldots)$—see § 1)—is of this class. Indeed in this primal case if $0, 1$ $(0 \neq 1)$ are *any* pair of elements of $\mathfrak{P}$ there always exists at least one triple $\times, {}^{\frown}, {}^{\smile}$ of strict $\mathfrak{P}$-functions such that $(P, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}; 0, 1)$ is a strict frame in P, with $0, 1$ as null and identity elements.

Let now $\{\mathfrak{A}_i\}$ be a class of algebras $\mathfrak{A}_i = (A_i, o, \ldots)$[9]), all of the same species Sp. We shall call the class *(strictly) coframal* if there exist three expressions $\times, {}^{\frown}, {}^{\smile}$ of species Sp and elements $0_i, 1_i$ of $\mathfrak{A}_i$ such that $(A_i, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}) = (A_i, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}; 0_i, 1_i)$ is a strict frame in $\mathfrak{A}_i$, for each $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$. It is to be emphasized that the *same* three expressions $\times, {}^{\frown}, {}^{\smile}$ are here required to simultaneously serve as "frame functions" (or "co-frame") in each $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$. For emphasis a coframal class of algebras might also be called uniformly coframal, in contradistinction, for instance, with a merely pairwise coframal class.

[9]) We shall generally avoid the more cumbersome notation $(A_i, o_i, \ldots)$ in favor of the simpler one $(A_i, o, \ldots)$; the meaning or interpretation of each of the primitive operations $o, \ldots$ of the species Sp will of course depend on i, that is, on the choice of $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$.

Theorem 3.1. *Let* $\mathfrak{A}_1=(A_1, o, \ldots)$, $\mathfrak{A}_2=(A_2, o, \ldots)$ *be two algebras of the same species* Sp, *and each strictly of class* f. *For* $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ *to be strictly independent it is sufficient that they be coframal, say with the coframes* $(A_1, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}; 0_1, 1_1)$, $(A_2, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}; 0_2, 1_2)$, *and that there exist two strict expressions of species* Sp, $|'(\xi)$ *and* $|''(\xi)$ *such that*

$$(3.1)\qquad \begin{cases} |'(\xi) \begin{cases} \equiv 1_1(\mathfrak{A}_1) \\ \equiv 0_2(\mathfrak{A}_2) \end{cases} \\ |''(\xi) \begin{cases} \equiv 0_1(\mathfrak{A}_1) \\ \equiv 1_2(\mathfrak{A}_2). \end{cases} \end{cases}$$

Proof. Let the expression $\xi \times_{\frown} \eta$ be the ${}^{\frown}$-transform of $\times$, i.e.,

$$(3.2)\qquad \xi \times_{\frown} \eta = \text{def} = (\xi^{\frown} \times \eta^{\frown})^{\smile}.$$

If now the expression $K(\xi, \eta)$ is defined by

$$(3.3)\qquad K(\xi, \eta) = \text{def} = \{\xi \times |'(\xi)\} \times_{\frown} \{\eta \times |''(\eta)\},$$

it is seen that

$$(3.4)\qquad K(\xi, \eta) \begin{cases} = \xi(\mathfrak{A}_1) \\ = \eta(\mathfrak{A}_2). \end{cases}$$

The theorem then follows from part 2 of lemma 2.1.

We shall now extend theorem 3.1 to a finite class of algebras by

Theorem 3.2. *Let* $\mathfrak{\tilde{A}} = \{\mathfrak{A}_i\} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$ $(n>0)$ *be a finite class of universal algebras* $\mathfrak{A}_i=(A_i, o, \ldots)$ *of the same species* Sp, *and each strictly of class* f. *For* $\mathfrak{\tilde{A}}$ *to be a strictly independent class it is sufficient that the* $\mathfrak{A}_i$ *possess a strict coframe* $(A_i, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}; 0_i, 1_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *and that for each pair of integers* i, j $(i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *there exist an expression* $|_{ij}(\xi)$ *of species* Sp *such that*

$$(3.5)\qquad |_{ij}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \\ \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{A}_j}. \end{cases}$$

Proof. For $n=2$ theorem 3.2 becomes identical with theorem 3.1, with

$$|_{12} = |'(\xi)$$
$$|_{21} = |''(\xi).$$

For arbitrary n, let us now define n expressions $|^{(i)}(\xi)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ as follows:

$$(3.6)\qquad |^{(i)}(\xi) = \text{def} = \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{j=n} |_{ij}(\xi) = |_{i1}(\xi) \times |_{i2}(\xi) \times \cdots \times |_{in}(\xi), \quad (\text{no } |_{ii} \text{ term}).$$

Here $\times$ is the $\times$ of the coframe, and for definiteness we shall assume $\times$ associated from the left,

$$(3.7)\qquad \prod |_{ij}(\xi) = ((|_{i1}(\xi) \times |_{i2}(\xi)) \times |_{i3}(\xi)) \times \cdots \qquad (j \neq i).$$

It is then readily seen that the expressions $|^{(i)}(\xi)$ of species Sp satisfy

$$(3.8)\qquad |^{(i)}(\xi) = \begin{cases} \equiv 1_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \\ \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{A}_j} \text{ for } j \neq i \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Let now the expression $K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ be defined by

$$(3.9)\quad \begin{cases} K(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \text{def} = \left(\xi_1 \times |^{(1)}(\xi)\right) \times_\cap \left(\xi_2 \times |^{(2)}(\xi)\right) \times_\cap \cdots \times_\cap \left(\xi_n \times |^{(n)}(\xi)\right) \\ \qquad\qquad = \overset{\times_\cap}{\sum} \left(\xi_i \times |^{(i)}(\xi)\right). \end{cases}$$

Here $\times_\cap$ is the $^\cap$-transform of the $\times$ belonging to the coframe [see (3.2)], and in the $\times_\cap$-sum (3.9) the terms $\xi_i \times |^{(i)}(\xi)$ are again to be associated from the left. An easy computation then shows that

$$K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \equiv \xi_i (\text{mod } \mathfrak{A}_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

whence the proof is complete, by lemma 2.1.

In an important class of cases, by means of theorem 3.2 the difficult notion of independence may largely be made to depend on the simpler one of pairwise independence. We have

Theorem 3.3. *Let* $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n\}$ *be a finite class of primal algebras* $\mathfrak{P}_i = (P_i, o, \ldots)$, *all of the same species Sp. A sufficient (and necessary) condition for* $\mathfrak{P}$ *to be a strictly independent class is that*: (1°) $\mathfrak{P}$ *be strictly coframal, and* (2°) $\mathfrak{P}$ *be pairwise strictly independent.*

Proof. The necessity of the conditions is an immediate consequence of the definition of independence, or one may refer ahead to theorem 3.4. Consider then the sufficiency. Let $\times, ^\cap, ^\cup$ be coframal expressions in $\mathfrak{P}$, whence $(P_i, \times, ^\cap, ^\cup; 0_i, 1_i)$ is a strict frame in $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Since the $\mathfrak{P}_i$ are primal and therefore functionally strictly complete, and since for $i \neq j$ $\mathfrak{P}_i$ and $\mathfrak{P}_j$ are strictly independent, the existence of expressions $|_{ij}(\xi)$ of species Sp is assured, where

$$|_{ij}(\xi) = \left\{ \begin{matrix} \equiv 1_i (\text{mod } \mathfrak{P}_i) \\ \equiv 0_j (\text{mod } \mathfrak{P}_j) \end{matrix} \right\} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

The proof is then complete on use of theorem 3.2.

While a coframal class of algebras is generally not independent, nor even pairwise independent, for the converse we readily have

Theorem 3.4. *Let* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_i\}$ *be a class of algebras of the same species Sp, and each strictly of class f. Moreover let* $\mathfrak{A}$ *be strictly independent. Then the class* $\mathfrak{A}$ *is finite and strictly coframal.*

Proof. $\mathfrak{A}$ must be finite, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$, by lemma 2.1, since an algebra of class f cannot be isomorphic with $\overset{\circ}{|}$. Now if $(A_i, \times_i, ^{\cap_i}, ^{\cup_i}; 0_i, 1_i)$ is a strict frame in $\mathfrak{A}_i$, from the independence of $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ it follows that a single triplet $\times, ^\cap, ^\cup$ of expressions of species Sp exists such that

$$\begin{aligned} \xi \times \eta &= \xi \times_i \eta \\ \xi^\cap &= \xi^{\cap_i} \ (\text{mod } \mathfrak{A}_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \\ \xi^\cup &= \xi^{\cup_i}. \end{aligned}$$

The theorem is thus established.

4. *Primal clusters.*

By a *cluster* of universal algebras of given species Sp we mean a class of algebras of species Sp any finite subset of which is strictly independent. Any subset of a cluster is then again a cluster.

By a *primal cluster* we mean a cluster whose elements (i.e., member algebras) are all primal algebras (§ 1). As an indication of the range of application of the structure theorems eventually to be proved, we shall now exhibit several important examples of this concept.

To this end we recall from [1], [2] that for each integer n $(n>1)$ the "n-field" $\mathcal{F}_n=(F_n, \times, \hat{})=(F_n, \times, \hat{}, \check{})$ is functionally strictly complete and hence primal. Here $F_n=\{0, 1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-2}\}=\{\ldots, \xi, \ldots\}$, in which $(F_n, \times)$ is the cyclic group of order $n-1$, augmented by a null element, 0:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{n-1}&=1\\ 0\times\xi=\xi\times 0&=0\end{aligned}\right\} \qquad (\xi\in F_n), \tag{4.1}$$

and where $\hat{}$ is the cyclic "successor" permutation

$$0\hat{}=1,\ 1\hat{}=\lambda,\ \lambda\hat{}=\lambda^2, \ldots, (\lambda^{n-2})\hat{}=0, \tag{4.2}$$

with $\check{}$ the inverse of $\hat{}$ [10]). We shall now prove

Theorem 4.1. *$\widetilde{\mathcal{F}}=\{\mathcal{F}_n\}$ $(n=2,3,\ldots)$, the class of all n-fields, is a primal cluster.*

Proof. First we note that $\widetilde{\mathcal{F}}$ is obviously a strictly coframal class of algebras, in fact the three primitive operations $\times, \hat{}, \check{}$ themselves form a strict frame (called the *natural* frame) in each $\mathcal{F}_n\in\widetilde{\mathcal{F}}$. From the remarks preceding theorem 4.1 and by theorem 3.3 together with the definition of the concept primal cluster, we shall be through if we can show that $\mathcal{F}_m$ and $\mathcal{F}_n$ are strictly independent for $m\neq n$. We may assume $m<n$. Let E_n denote the expression

$$E_n=\text{def}=\xi\times\xi\hat{}\times\xi\hat{}^2\times\xi\hat{}^3\times\cdots\times\xi\hat{}^{n-1} \tag{4.3}$$

where $\xi\hat{}^2=(\xi\hat{})\hat{}$, etc. If now we denote the elements of F_m, F_n by

$$\begin{cases} F_m: 0', 1', \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^{m-2},\\ F_n: 0'', 1'', \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots, \sigma^{n-2}\end{cases} \tag{4.4}$$

it may be directly verified that the expressions $|'(\xi)$ and $|''(\xi)$ of theorem 3.1 are here given by

$$\begin{cases} |'(\xi)=(E_n\hat{}^{n-1}\times E_n\hat{}^{mn})\hat{}=\begin{cases}\equiv 1' \pmod{\mathcal{F}_m}\\ \equiv 0'' \pmod{\mathcal{F}_n},\end{cases}\\ |''(\xi)=E_n\hat{}^{mn}=\begin{cases}\equiv 0' \ (\mathcal{F}_m)\\ \equiv 1'' \ (\mathcal{F}_n).\end{cases}\end{cases} \tag{4.5}$$

Here $E_n\hat{}^r=\big((E_n)\hat{}\big)\hat{}\ldots$ (r iterations), and $E_n\hat{}^{mn}=E_n\hat{}^m\times E_n\hat{}^m\times\cdots$ (n factors). This completes the proof of theorem 4.1.

[10]) The terminology "n-field" stems from the fact that for $n=p^k=$ prime power, $\mathcal{F}_{p^k}$ is a characterization of the Galois field G.F. (p^k). See also the papers on p- and p^k-rings listed in the bibliographies of [1], [2].

Let now $\mathcal{P}_n=(P_n, \times, ^\cap)=(P_n, \times, ^\cap, ^\cup)=\{\ldots, \xi, \ldots\}$ be the *basic Post algebra* of order n $(n>1)$. If we denote the n elements of P_n by

$$P_n: 0, \beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \ldots, \beta_3, \beta_2, \beta, 1$$

the primitive operations $\times, ^\cap, ^\cup$ are given by:

$$\xi \times \eta = \min(\xi, \eta) \tag{4.6}$$

where min (= minimum) refers to the ordering $0<\beta_{n-2}<\beta_{n-3}<\cdots<\beta_2<\beta<1$, and

$$\begin{cases} \xi^\cap = \text{cyclic permutation: } 0^\cap=1,\ 1^\cap=\beta,\ \beta^\cap=\beta_2, \ldots, \beta_{n-2}^\cap=0, \\ \xi^\cup = \text{inverse of } \xi^\cap. \end{cases} \tag{4.7}$$

It is well known that $\mathcal{P}_n$ is functionally strictly complete and therefore primal (see [1], [2] and references there given). We now establish

Theorem 4.2. $\tilde{\mathcal{P}}=\{\mathcal{P}_n\}$, $(n=2, 3, \ldots)$, *the class of all basic Post algebras, form a primal cluster.*

Proof. $\tilde{\mathcal{P}}$, like $\tilde{\mathcal{F}}$, is clearly a strictly coframal class of algebras, with the primitive operations $\times, ^\cap, ^\cup$ again serving as a strict coframe. Let m, n be integers with

$$1<m<n$$

and write

$$\begin{cases} P_m: 0', \alpha_{m-2}, \alpha_{m-3}, \ldots, \alpha_2, \alpha, 1', \\ P_n: 0'', \beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \ldots, \beta_2, \beta, 1''. \end{cases} \tag{4.8}$$

Using an argument parallel to that used in the proof of theorem 4.1, it is sufficient to establish the existence of expressions for $|'(\xi)$ and $|''(\xi)$. For $|'(\xi)$ we directly verify

$$|'(\xi) = (E_n^{\cap m} \times E_m^{\cap n-1})^\cap = \begin{cases} \equiv 1^\iota \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 0'' \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Here E_n is again the expression

$$E_n = \xi \times \xi^\cap \times \xi^{\cap 2} \times \cdots \times \xi^{\cap n-1} \tag{4.10}$$

and

$$E_n^{\cap n-1} = ((E_n)^\cap)^\cap \ldots \quad (n-1 \text{ iterations of } ^\cap).$$

An expression for $|''(\xi)$ is more involved and will be broken up into two cases:

Case 1, m divides n. Let $r=n-m$. Then $r \geq m$. Let $d=r-m+1$. We verify that

$$E_n^{\cap m} \times E_n^{\cap m+d} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv \beta_r \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Hence we have the expression

$$|''(\xi) = (E_n^{\cap m} \times E_n^{\cap m+d})^{\cap m} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 1'' \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Case 2, n not a multiple of m. In this case it is seen in $\mathcal{P}_n$ that for some integer t $(t>0)$,

$$0''^{\cap t \cdot m} \geq \beta_r \quad (\text{where } r=n-m), \tag{4.13}$$

and hence that in $\mathcal{P}_n$,

$$0''^{\frown l\cdot m} \times \beta_r = \beta_r. \tag{4.14}$$

Let

$$0''^{\frown l\cdot m\frown k} = \beta_r\,(k \geq 0),$$

i.e.,

$$0''^{\frown (l\cdot m+k)} = \beta_r. \tag{4.15}$$

Then the expression

$$E_n^{\smile m} \times E_n^{\frown (l\cdot m+k)} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv \beta_r \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Hence we have the following expression for $|''(\xi)$,

$$|''(\xi) = (E_n^{\smile m} \times E_n^{\frown (l\cdot m+k)})^{\frown m} = \begin{cases} \equiv 0' \ (\mathcal{P}_m) \\ \equiv 1'' \ (\mathcal{P}_n). \end{cases} \tag{4.17}$$

This completes the proof of theorem 4.2.

It is observed that n-fields and basic Post algebras are algebras of the same species, namely $[2, 1]$, i.e., a primitive binary operation (denoted in each case by $\times$) and a primitive unary operation (denoted in each case by $'$)[11]). The question suggests itself: Can either of the primal clusters $\widetilde{\mathcal{F}}$ or $\widetilde{\mathcal{P}}$ be enlarged by adding appropriate members of the other? Despite the entirely different character of the primitive operations when applied to $\mathcal{F}_n$ as opposed to $\mathcal{P}_n$, we shall prove the rather unexpected

Theorem 4.3. $\{\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{P}}\} = \{\mathcal{F}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{F}_3, \mathcal{P}_4, \ldots, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}_n, \ldots\}$, *the combined class of n-fields and basic Post algebras, form a primal cluster*[12]).

Proof. Let

$$\begin{cases} P_m: 0', \alpha_{m-2}, \alpha_{m-3}, \ldots, \alpha_2, \alpha, 1' \\ F_n: 0'', \beta^{n-2}, \beta^{n-3}, \ldots, \beta^2, \beta, 1'' \end{cases} \tag{4.18}$$

be the elements of $\mathcal{P}_m = (P_m, \times, ', \smile)$ and $\mathcal{F}_n = (F_n, \times, ', \smile)$ respectively[13]). We recall that the primitive operation $\times$ denotes "min" in $\mathcal{P}_m$ and "cyclic group with null" in $\mathcal{F}_n$, while the primitive $'$ (with $\smile$ as its inverse) denotes a cyclic permutation in either case, namely

$$\begin{cases} \xi' \text{ in } P_m: 0'' = 1', \ 1'' = \alpha, \ \alpha' = \alpha_2, \ldots, \alpha'_{m-2} = 0', \\ \xi' \text{ in } F_n: 0''' = 1'', \ 1''' = \beta, \ \beta' = \beta^2, \ldots, (\beta^{n-2})' = 0''. \end{cases} \tag{4.19}$$

Taking due account of theorems 4.2 and 4.3 and arguing *mutatis mutandis* as in the proofs of these theorems, we shall be through if we can establish that: for each pair of integers m, n ($m > 1$, $n > 1$ and m, n not both $= 2$), expressions for the functions $|'(\xi)$ and $|''(\xi)$ exist. We shall exhibit such expressions in several parts.

[11]) In case $\smile$ as well as $'$ is taken as primitive, the species is of course $[2, 1, 1]$.

[12]) It is noted that for the special case $n = 2$, $\mathcal{F}_2$ and $\mathcal{P}_2$ are isomorphic algebras. Since isomorphic algebras (when not isomorphic with $\circ$) are never independent, $\mathcal{F}_2$ and $\mathcal{P}_2$ cannot both appear in the proposed cluster.

[13]) The expressions which we shall obtain are more easily verified if we display the elements of F_n in this order rather than in the order $0, 1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-2}$ previously used.

Case 1, $m<n$. Here we directly verify that

$$(4.20)\qquad \begin{cases} |'(\xi) = (E_n^{\frown m} \times E_n^{\frown n-m})^{\frown} = \begin{cases} \equiv 1' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 0'' \pmod{\mathcal{F}_n}, \end{cases} \\ |''(\xi) = (E_n^{\frown m} \times E_n^{\frown k})^{\frown m} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 1'' \pmod{\mathcal{F}_n}. \end{cases} \end{cases}$$

Here (as also in cases 2 and 3 below), $E_r = \xi \times \xi^{\frown} \times \cdots \times \xi^{\frown r-1}$ and $E_r^{\frown s}$ is the s-fold iteration $((E_n^{\frown})^{\frown}) \ldots$, and similarly for $E_r^{\smile s}$ below. The integer k in the expression for $|''(\xi)$ is determined by the conditions:

$$(4.21)\qquad \begin{cases} 1 \leq k < n \\ 0''^{\frown m} \times 0''^{\frown k} = 1''^{\smile m}. \end{cases}$$

Since those elements of $\mathcal{F}_n$ different from $0''$ form a group under $\times$ and since $m<n$, such k exists (and is moreover unique). Furthermore since $0''^{\frown m} = \beta^{m-1}$, $0''^{\frown k} = \beta^{k-1}$, $1''^{\smile m} = \beta^{n-m}$, and since $\beta^{n-1} = 1''$, an alternative determination of k is seen to be given by the conditions:

$$(4.22)\qquad \begin{cases} 1 \leq k < n, \\ m + k - 2 \equiv n - m \pmod{n-1}. \end{cases}$$

Case 2, $m>n$. Here

$$(4.23)\qquad \begin{cases} |''(\xi) = (E_m^{\frown m-1} \times E_m^{\frown n})^{\frown} = \begin{cases} 0' (\mathcal{P}_m) \\ 1''(\mathcal{F}_n), \end{cases} \\ |'(\xi) = \begin{cases} (\text{for } n = 2 \text{ and } m \text{ odd}) = E_m^{\frown m+1}, \\ (\text{for } n = 2 \text{ and } m \text{ even}) \\ \qquad = \{(\xi \times \xi^{\frown})^{\frown} \times (\xi^{\frown} \times \xi^{\frown 2})^{\frown} \times \cdots \times (\xi^{\frown m-1} \times \xi^{\frown m})^{\frown}\}^{\frown}, \\ (\text{for } m > n > 2) = \left((E_m^{\frown})^{\tilde{}\, m-n+1}\right)^{\frown n-1}. \end{cases} \end{cases}$$

Here if D is an expression,

$$(4.24)\qquad \begin{cases} D^{\tilde{}} = \text{def} = (D^{\frown})^{n-1} = D^{\frown} \times D^{\frown} \times \cdots \quad (n-1 \text{ factors}), \\ D^{\tilde{}\, r} = \left((\ldots(D^{\tilde{}})^{\tilde{}}\right)^{\tilde{}} \ldots \quad (r \text{ iterations}). \end{cases}$$

Case 3, $m=n\,(\neq 2)$. Here

$$(4.25)\qquad \begin{cases} |'(\xi) = \left((E_m^{\frown 2})^{m-1}\right)^{\frown m-1} = \begin{cases} \equiv 1' (\mathcal{P}_m) \\ \equiv 0''(\mathcal{F}_n), \end{cases} \\ |''(\xi) = \left(((E_m^{\frown m-1})^{m-1})^{\frown}\right)^{m-1} = \begin{cases} \equiv 0' (\mathcal{P}_m) \\ \equiv 1''(\mathcal{F}_n). \end{cases} \end{cases}$$

The above three cases are exhaustive, and complete the proof of theorem 4.3.

As already suggested, the foregoing examples of primal clusters serve to illustrate the domain of application of the structure theorems to be derived.

5. *Representation, factors.*

Let $\{\mathfrak{A}_i\}$ be a class of universal algebras of the same (arbitrary) species, Sp, and let $\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ be a finite subset of $\{\mathfrak{A}_i\}$. An algebra $\mathfrak{A}$ is *directly representable* in (or in terms of) $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ if $\mathfrak{A}$ is isomorphic with the direct

product of suitable direct powers of $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$. Here the cardinalities of the various direct powers of $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ are unrestricted, finite or infinite; we shall even permit the "0th direct power", written $\mathfrak{A}^{[0]}$, defined for any algebra $\mathfrak{A}$ to be $\overset{\circ}{|}$,

$$\mathfrak{A}^{[0]} = \overset{\circ}{|} = \text{1-element algebra.} \tag{5.1}$$

Since $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A} \times \overset{\circ}{|}$ it follows in particular from (5.1) that (a) each of the algebras $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ individually is directly representable in $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ and (b) $\overset{\circ}{|}$ is directly representable in $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$.

The more general concept of subdirect representation is defined similarly: with $\{\mathfrak{A}_i\}, \mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ and $\mathfrak{A}$ as above, $\mathfrak{A}$ is said to be *subdirectly representable* in $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ if $\mathfrak{A}$ is isomorphic with a suitable subdirect product of suitable subdirect powers of $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$. Here again subdirect powers of arbitrary cardinality are permitted.

We say that $\mathfrak{A}$ is (directly respectively subdirectly) *representable in* $\{\mathfrak{A}_i\}$ if $\mathfrak{A}$ is (dir. resp. subdir.) representable in some finite subset of $\{\mathfrak{A}_i\}$.

If $\mathfrak{A}$ is representable in $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$ it is of course *a-fortiori* representable in any extended set $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}, \mathfrak{A}_{i_{n+1}}, \ldots$. In the opposite direction: we shall call $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k} \in \{\mathfrak{A}_i\}$ a *set of* (dir. resp. subdir.) *factors* for $\mathfrak{A}$ in $\{\mathfrak{A}_i\}$ if $\mathfrak{A}$ is (dir. resp. subdir.) representable in $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k}$ but is not (dir. resp. subdir.) representable in any proper subset of $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k}$. Obviously each $\mathfrak{A}$ representable in $\{\mathfrak{A}_i\}$ has at least one set of factors in $\{\mathfrak{A}_i\}$,—and in general more than one set. Trivially for instance: each $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$ is a set (of one member) of direct factors for $\overset{\circ}{|}$.

We shall be interested in the case where $\{\mathfrak{A}_i\}$ is a primal cluster.

6. *Structure of primal clusters.*

In the foregoing terminology we may now state the basic theorem, relating the representations in primal clusters with classes of identities.

Theorem 6.1.

(A) *Let* $\widetilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_i\}$ *be a primal cluster of arbitrary species, Sp, let* $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ $(0 < n < \infty)$ *be any n members of* $\widetilde{\mathfrak{P}}$ *and let* $\mathfrak{P}$ *be any algebra of species Sp. A sufficient (and necessary) condition for* $\mathfrak{P}$ *to be subdirectly representable in* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ *is that* $\mathfrak{P}$ *satisfy all strict identities which are common to the algebras* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$, *or, what is the same, that* $\mathfrak{P}$ *satisfy all strict identies of the algebra* $\mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \ldots \times \mathfrak{P}_{i_n}$ *(direct product).*

(B) *Subdirect factorization in* $\widetilde{\mathfrak{P}}$ *is unique, that is: if an algebra* $\mathfrak{P}$ *is subdirectly representable in* $\widetilde{\mathfrak{P}}$ *and if* $\mathfrak{P} \neq \overset{\circ}{|}$, *then* $\mathfrak{P}$ *has a unique set of subdirect factors in* $\widetilde{\mathfrak{P}}$[14]).

Proof, part (A). Necessity. This is immediate, in fact if an algebra $\mathfrak{A}$ is a subdirect product of subdirect powers of any algebras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ (of

[14]) A single primal algebra $\mathfrak{P}_1$ always constitutes a cluster (of one member). For such a one member cluster, (B) of theorem 5.1 is trivially true, while (A) specializes to the earlier characterization given in [2], — see theorem 1.1.

the same species), then $\mathfrak{A}$ clearly satisfies all strict identities which are common to $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$.

Sufficiency. Let $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ be as in theorem 5.1. Obviously nothing is lost if we—and to simplify the notation we shall—write simply

$$\mathfrak{P}_{i_1} = \mathfrak{P}_1 = (P_1, o, \ldots), \ldots, \mathfrak{P}_{i_n} = \mathfrak{P}_n = (P_n, o, \ldots).$$

Since $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ are strictly independent they posses a strict coframe (theorem 3.4); let

$$(6.1) \qquad (P_1, \times, \cap, \cup; 0_1, 1_1), \quad (P_2, \times, \cap, \cup; 0_2, 1_2), \ldots, (P_n, \times, \cap, \cup; 0_n, 1_n)$$

be one such. That is, $(P_k, \times, \cap, \cup; 0_k, 1_k)$ is a strict frame in $\mathfrak{P}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, where the same frame expressions $\times, \cap, \cup$ serve for all $k = 1, 2, \ldots, n$.

From the strict functional completeness of the $\mathfrak{P}_i$ together with their strict independence it further follows that: for each expression $\Phi(\xi, \ldots)$ of species Sp and for each $j = 1, 2, \ldots, n$ there exists an expression $\Phi^{(j)}(\xi, \ldots)$ of species Sp such that

$$(6.2) \qquad \Phi^{(j)}(\xi, \ldots) = \left\{\begin{array}{ll} \Phi(\xi, \ldots) & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_j) \\ \equiv 0_k & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_k, k \neq j) \end{array}\right\} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

We call $\Phi^{(j)}(\xi, \ldots)$ the *projection* on $\mathfrak{P}_j$ (or j^{th} projection) of the expression Φ.

Applied in particular to each primitive operation o itself, and again to the identity operation $e(\xi) \equiv \xi$, we have:

$$(6.3) \qquad \left\{\begin{array}{l} o^{(j)}(\xi, \ldots) = \left\{\begin{array}{ll} o(\xi, \ldots) & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_j) \\ \equiv 0_k & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_k, k \neq j) \end{array}\right\} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n) \\ e^{(j)}(\xi) = \left\{\begin{array}{ll} \xi & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_j) \\ \equiv 0_k & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_k, k \neq j) \end{array}\right\} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

In the foregoing notation we establish the following

Lemma 6.2. *Let $\mathfrak{P}$ be an algebra satisfying all strict identities common to $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ and let $\Phi(\xi, \ldots)$ be an arbitrary expression of species Sp. Then*

$$(6.4) \qquad \Phi = \Phi^{(1)} \times_\cap \Phi^{(2)} \times_\cap \cdots \times_\cap \Phi^{(n)},$$

$$(6.5) \qquad \Phi^{(j)}(\xi, \eta, \ldots) = e^{(j)}\left(\Phi^{(j)}(\xi, \eta, \ldots)\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(6.6) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi\left(e^{(1)}(\xi) \times_\cap e^{(2)}(\xi) \times_\cap \cdots \times_\cap e^{(n)}(\xi), e^{(1)}(\eta) \times_\cap e^{(2)}(\eta) \times_\cap \cdots \times_\cap e^{(n)}(\eta), \ldots\right) \\ = \Phi^{(1)}\left(e^{(1)}(\xi), e^{(1)}(\eta), \ldots\right) \times_\cap \Phi^{(2)}\left(e^{(2)}(\xi), e^{(2)}(\eta), \ldots\right) \cdots \times_\cap \Phi^{(n)}\left(e^{(n)}(\xi), \ldots\right) \end{array}\right.$$

are strict identities of $\mathfrak{P}$. Here $\times, \cap, \cup$ is a strict coframe, (6.1), of $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$; $\times_\cap$ is the $\cap$-transform, (3.2), of $\times$ and $\Phi^{(j)}, e^{(j)}$ are the projections (6.2), (6.3)[15].

Proof. It is sufficient to prove that (6.4) and (6.5) are strict identities in each $\mathfrak{P}_i$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Using (6.2) the right side of (6.4) reduces to

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi(\xi, \ldots) \times_\cap 0_1 \times_\cap 0_1 \times_\cap \cdots \times_\cap 0_1 & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_1) \\ = \Phi(\xi, \ldots) & (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_1) \end{array}\right.$$

[15]) Properly speaking some specific $\times_\cap$-association of the $\Phi^{(i)}$ should be stated in (6.4) since $\times$ and hence $\times_\cap$ is not necessarily associative. However the identity (6.4) in $\mathfrak{P}$ does not depend on the $\times_\cap$-association chosen, as is seen from the proof.

since

$$\eta \times_{\cap} 0_1 = (\eta^{\cap} \times 0_1^{\cap})^{\cup} = (\eta^{\cap} \times 1_1)^{\cup} = \eta^{\cap\cup} = \eta.$$

Thus (6.4) is an identity mod $\mathfrak{P}_1$. A similar proof holds mod $\mathfrak{P}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ and hence (6.4) is an identity in $\mathfrak{P}$. Again, mod $\mathfrak{P}_j$ both sides of (6.5) are $= \Phi(\xi, \eta, \ldots)$ while mod $\mathfrak{P}_k$ $(k \neq j)$ both sides are $= 0_k$. Thus (6.5) is an identity in $\mathfrak{P}$. The proof of (6.6) is given in the same way.

As in the foregoing, let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ be $\in \tilde{\mathfrak{P}} =$ primal cluster, of species Sp, and let $\mathfrak{P} = (P, o, \ldots)$ be any algebra of species Sp which satisfies all strict identities which are common to $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$. For each $j = 1, 2, \ldots, n$ we now define an algebra $\mathfrak{P}^{(j)} = (P^{(j)}, o, \ldots)$ of species Sp, called the *projection of the algebra* $\mathfrak{P}$ *on* $\mathfrak{P}_j$. Here the class $P^{(j)}$ of elements comprising $\mathfrak{P}^{(j)}$ is a certain subset of the class P, namely

$$\text{(6.7)} \qquad \begin{cases} P^{(j)} = \text{range of } e^{(j)}(\xi), & \xi \in P \\ P^{(j)} \subseteq P. \end{cases}$$

Finally the primitive operations $o(\xi, \ldots), \ldots$ of $\mathfrak{P}^{(j)}$ are defined to be the operations $o^{(j)}(\xi, \ldots)$ operating in $\mathfrak{P}$. Thus for $\xi, \eta, \ldots \in P^{(j)}$ (and hence also $\in P$) and for a primitive operation o of $\mathfrak{P}^{(j)}$

$$\text{(6.8)} \qquad \begin{cases} o(\xi, \eta, \ldots) = o^{(j)}(\xi, \eta, \ldots) = \in P \\ \qquad\qquad = e^{(j)}\left(o^{(j)}(\xi, \eta, \ldots)\right) = \in P^{(j)}. \end{cases}$$

[Here we have made use of (6.5), an identity of $\mathfrak{P}$.] From (6.8), $P^{(k)}$ as defined is closed under all primitive operations of $\mathfrak{P}^{(k)}$, thus verifying that $\mathfrak{P}^{(k)}$ as defined is indeed again an algebra (of species Sp).

Each $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ itself naturally satisfies all strict identities common to $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ and it is therefore meaningful to inquire about $\mathfrak{P}_i^{(j)}$. We have

Lemma 6.3. *If* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ *are* $\in \tilde{\mathfrak{P}} =$ *primal cluster, then*

$$\text{(6.9)} \qquad \mathfrak{P}_i^{(i)} \cong \mathfrak{P}_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{(6.10)} \qquad \mathfrak{P}_i^{(j)} \cong \mathring{|} = \textit{one-element algebra} \quad (i \neq j).$$

Proof. $P_i^{(i)} = P_i$ since $e^{(i)}(\xi) = \xi \pmod{\mathfrak{P}_i}$ and hence the range of $e^{(i)}(\xi)$ in $\mathfrak{P}_i$ is P_i itself. Again $o(\xi, \ldots)$ in $\mathfrak{P}_i^{(i)}$ is $o^{(i)}(\xi, \ldots)$ in $\mathfrak{P}_i$, $= o(\xi, \ldots)$ in $\mathfrak{P}_i$. This proves (6.9). For $i \neq j$ we have $e^{(j)}(\xi) \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{P}_j}$, hence the class $P_i^{(j)}$ consists of the single element 0_j. (6.10) is then immediate.

Theorem 6.4. *Let* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ *be* $\in \tilde{\mathfrak{P}} =$ *primal cluster, and let* $\mathfrak{P}$ *be any algebra which satisfies all strict identities common to* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$. *Then for each* $j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathfrak{P}^{(j)}$ *is isomorphic with some subdirect power* $\mathfrak{P}_j$ *of* $\mathfrak{P}_j$,

$$\text{(6.11)} \qquad \mathfrak{P}^{(j)} \cong \mathfrak{P}_j.$$

Proof. We first show that: (a) $\mathfrak{P}^{(j)}$ satisfies all strict identities common to the algebras $\mathfrak{P}_1^{(j)}, \mathfrak{P}_2^{(j)}, \ldots, \mathfrak{P}_n^{(j)}$. Let $I: \Phi = \Psi$ be any strict identity satisfied by all the algebras $\mathfrak{P}_1^{(j)}, \mathfrak{P}_2^{(j)}, \ldots, \mathfrak{P}_n^{(j)}$. This implies that $I': \Phi' = \Psi'$ satisfies

all strict identites common to $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$; here Φ', Ψ' result from Φ, Ψ on replacing each primitive operation $o, \ldots$ in the latter by the expressions $o^{(j)}, \ldots$. Hence I' is a strict identity of $\mathfrak{P}$, which in turn (by reversing the replacements which led from I to I') implies that I is an identity of $\mathfrak{P}^{(j)}$. This establishes the assertion (a).

From (a) above, (6.9) and (6.10), and recalling that $\overset{\circ}{|}$ satisfies all possible identities, we have the result: (a') $\mathfrak{P}^{(j)}$ satisfies all strict identities of $\mathfrak{P}_j$. Since $\mathfrak{P}_i$ is primal, the desired conclusion of theorem 6.4 now follows from (a') on application of the basic theorem 1.1.

Lemma 6.5. *Let $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ and $\mathfrak{P}$ be algebras satisfying the premise of theorem* 6.4, *and let Sp be their species. Further let $\mathfrak{P}^*$ denote the direct product of the projections of $\mathfrak{P}$ on the $\mathfrak{P}_i$,*

$$\mathfrak{P}^* = \text{def} = \mathfrak{P}^{(1)} \times \mathfrak{P}^{(2)} \times \cdots \times \mathfrak{P}^{(n)}. \tag{6.12}$$

Then $\mathfrak{P}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{P}^*$,

$$\mathfrak{P}^* \to \mathfrak{P} \quad \textit{(homomorphism)}. \tag{6.13}$$

Proof. Now $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ possess a strict coframe,—let

$$(P_1, \times, \cap, \cup; 0_1, 1_1), \quad (P_2, \times, \cap, \cup; 0_2, 1_2), \ldots, (P_n, \times, \cap, \cup; 0_n, 1_n)$$

be such. Recalling that the $P^{(i)}$ are all subsets of P, we shall first note that (1°) each $\xi \in \mathfrak{P}$ may be expressed in at least one way in the form

$$\xi = \xi^{(1)} \times_\cap \xi^{(2)} \times_\cap \cdots \times_\cap \xi^{(n)} \tag{6.14}$$

where

$$\xi^{(i)} \in P^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.15}$$

and conversely (2°) each expression $\xi^{(1)} \times_\cap \xi^{(2)} \times_\cap \cdots \times_\cap \xi^{(n)}$ in which the $\xi^{(i)}$ satisfy (6.15) is $\in \mathfrak{P}$. Here (2°) is obvious since $\mathfrak{P}^{(i)} \subseteq \mathfrak{P}$. (1°) follows from (6.4) if we there take Φ as $e(\xi), = \xi$; we then have

$$\xi = e^{(1)}(\xi) \times_\cap e^{(2)}(\xi) \times_\cap \cdots \times_\cap e^{(n)}(\xi)$$

and (6.14) is satisfied with $e^{(i)}(\xi) = \xi^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

The elements ξ^* of $\mathfrak{P}^*$ consist of all ordered n-uples

$$\xi^* = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}), \quad (\xi^{(i)} \in \mathfrak{P}^{(i)}).$$

We shall establish that the mapping

$$\begin{cases} \xi^* = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}) \to \xi = \xi^{(1)} \times_\cap \xi^{(2)} \times_\cap \cdots \times_\cap \xi^{(n)} \\ \mathfrak{P}^* \to \mathfrak{P} \end{cases} \tag{6.16}$$

is a homomorphism. That (6.16) maps $\mathfrak{P}^*$ on (all of) $\mathfrak{P}$ follows from (1°) and (2°) above. Let $o(\xi, \ldots)$ be any primitive operation of species Sp. We must show that if $\xi^* \to \xi, \eta^* \to \eta, \ldots$ under (6.16), then also $o(\xi^*, \eta^*, \ldots) \to o(\xi, \eta, \ldots)$. Recalling the definition of the operation o in $\mathfrak{P}^{(i)}$ this is equivalent to showing that

$$\left(o^{(1)}(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \ldots),\ o^{(2)}(\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \ldots), \ldots\right) \to o(\xi^{(1)} \times_\cap \xi^{(2)} \times_\cap \cdots, \eta^{(1)} \times_\cap \eta^{(2)} \times_\cap \cdots, \ldots)$$
(under 6.16).

This in turn is equivalent to establishing that

$$\left\{\begin{array}{l} o^{(1)}(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \ldots) \times_{\circ} o^{(2)}(\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \ldots) \times_{\circ} \cdots \times_{\circ} o^{(n)}(\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \ldots) \\ = o(\xi^{(1)} \times_{\circ} \xi^{(2)} \times_{\circ} \cdots \times_{\circ} \xi^{(n)}, \eta^{(1)} \times_{\circ} \eta^{(2)} \times_{\circ} \cdots \times_{\circ} \eta^{(n)}, \ldots). \end{array}\right.$$

But this is an identity of $\mathfrak{P}$ as follows from (6.6) on putting $\Phi = o$, $e^{(j)}(\xi) = \xi^{(j)}$ etc. Hence (6.16) is a homomorphism, and lemma 6.5 is proved.

We may now complete the proof of part A of theorem 6.1. If $\mathfrak{P}$ satisfies the premise of the latter, then from theorem 6.4 and lemma 6.5 jointly we have that

$$\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_n \to \mathfrak{P} \quad \text{(homomorphism)}, \tag{6.17}$$

where $\mathfrak{P}_i$ is some subdirect power of $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Part A of theorem 6.1 then follows from the observation that the only homomorphic images of such an algebra $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \ldots \times \mathfrak{P}_n$ are again of this form, i.e., the direct product of subdirect powers of $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$. This last remark is a ready consequence of the following two facts (proved in [1], [2]): (a) each $\mathfrak{P}_i$ (being functionally strictly complete) is simple, i.e. has no ideals except $\mathfrak{P}_i$ itself and $\overset{\circ}{|} =$ 1-element algebra, and (b) a subalgebra of a direct power of $\mathfrak{P}_i$ is a subdirect power of $\mathfrak{P}_i$.

We now turn to the

Proof of part (B) of theorem 6.1.

Suppose an algebra $\mathfrak{P} \neq \overset{\circ}{|}$ exists which is subdirectly representable in the primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$ in two different ways, that is, which has two different sets of subdirect factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$, say $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}$ and $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}$, with

$$\{\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}\} \neq \{\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}\}. \tag{6.18}$$

If we denote by $Id\{\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots\}$ the class of all strict identities common to the algebras $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ it follows that

$$Id\{\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}\} = Id\{\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}\}, \tag{6.19}$$

since either side of (6.19) is simply the class of all strict identities satisfied by the algebra $\mathfrak{P}$. That (6.18) and (6.19) together are impossible will be shown by the following theorem, which will then complete the proof of part B of theorem 6.1.

Theorem 6.6. *Let $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}$ be a subset of m different members of a primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$, let $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}$ be a subset of n different members of $\tilde{\mathfrak{P}}$, and let*

$$Id\{\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}\} = Id\{\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}\}. \tag{6.20}$$

Then the subsets are identical

$$\{\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}\} = \{\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}\}, \tag{6.21}$$

and in particular $m = n$.

Proof. We shall give an indirect proof. Suppose the asserted conclusion false; then with full generality we may suppose that

$$\mathfrak{P}_{i_s} \neq \mathfrak{P}_{j_s} \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.22}$$

Let $0_{i_1}, 0_{i_2}, \ldots, 0_{i_m}$ be arbitrarily chosen elements of $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}$ respectively, and let $0_{j_1}, \ldots, 0_{j_n}$ be elements of $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}$ respectively, where the latter may also be arbitrarily chosen except for the condition

$$0_{j_s} = 0_{i_r} \quad \text{if} \quad \mathfrak{P}_{j_s} = \mathfrak{P}_{i_r} \quad (r = 1, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.23}$$

From the strict independence of the algebras $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}$ augmented by those algebras $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}$ which are different from all $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_m}$, and from the agreement (6.23) it follows that: corresponding to each primitive operation $o(\xi, \ldots)$ there exists an expression $o^{(i_1)}(\xi, \ldots)$ satisfying:

$$o^{(i_1)}(\xi, \ldots) = \begin{cases} \equiv o(\xi, \ldots) & (\text{mod } \mathfrak{P}_{i_1}) \\ \equiv 0_{i_r} & (\text{mod } \mathfrak{P}_{i_r};\ r = 2, 3, \ldots, m) \\ \equiv 0_{j_s} & (\text{mod } \mathfrak{P}_{j_s};\ s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{6.24}$$

Let now

$$\mathfrak{Q} = \text{def} = \mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_m} \quad \text{(direct product)}. \tag{6.25}$$

From the hypothesis (6.20) it then follows that $\mathfrak{Q}$ satisfies all strict identities common to $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}$. From this it then further follows (see proof of theorem 6.4) that for the projection $\mathfrak{Q}^{(i_1)}$ of $\mathfrak{Q}$ on $\mathfrak{P}_{i_1}$:

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}^{(i_1)} \text{ satisfies all strict identities common to} \\ \mathfrak{P}_{j_1}^{(i_1)}, \mathfrak{P}_{j_2}^{(i_1)}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_n}^{(i_1)}. \end{cases} \tag{6.26}$$

But on use of (6.9) and (6.10) we have

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}^{(i_1)} = \mathfrak{P}_{i_1}^{(i_1)} \times \mathfrak{P}_{i_2}^{(i_1)} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_m}^{(i_1)} \\ \quad \cong \mathfrak{P}_{i_1} \times \overset{\circ}{|} \times \overset{\circ}{|} \cdots \times \overset{\circ}{|} \\ \quad \cong \mathfrak{P}_{i_1}. \end{cases} \tag{6.27}$$

Again by use of (6.9), (6.10) together with (6.22) we have

$$\mathfrak{P}_{j_1}^{(i_1)} \cong \mathfrak{P}_{j_2}^{(i_1)} \cong \cdots \cong \mathfrak{P}_{j_n}^{(i_1)} \cong \overset{\circ}{|}. \tag{6.28}$$

From (6.26), (6.27), (6.28) we then have:

$$\mathfrak{P}_{i_1} \text{ satisfies all strict identities of } \overset{\circ}{|}. \tag{6.29}$$

This however is absurd since $\overset{\circ}{|}$ satisfies all possible identities, and $\mathfrak{P}_{i_1} \not\cong \overset{\circ}{|}$. With this contradiction theorem 6.6 is proved, and with it the basic theorem 6.1.

In proving theorem 6.1 (part A) we note that an incidental proof of the following theorem was given; this permits the concept of subdirect representation (§ 5) to be stated in a simpler semi-direct form:

Theorem 6.7. *Let $\mathfrak{P}$ be subdirectly representable in the primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$, and let $\mathfrak{P} \neq \mathring{1}$. If $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ are the (unique) subdirect factors of $\mathfrak{P}$ in $\tilde{\mathfrak{P}}$, then $\mathfrak{P}$ is isomorphic with the direct product of suitable subdirect powers $\mathfrak{P}_{i_1}$, $\mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ of $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ respectively,*

$$\mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_n}. \tag{6.30}$$

We have the further equivalent formulation,

Theorem 6.8. *Let $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ be $\in \tilde{\mathfrak{P}}$ = primal cluster, and let $\mathfrak{P}$ be an algebra isomorphic with a subalgebra of the direct product of suitable direct powers of $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ respectively. Then $\mathfrak{P}$ is subdirectly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$; if $\mathfrak{P} \neq \mathring{1}$ then $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ are its subdirect factors.*

The proof is a direct consequence of theorem 6.7 together with the following result proved in [2]: A subalgebra of a direct power of a primal algebra $\mathfrak{P}_i$ is a subdirect power of $\mathfrak{P}_i$.

We call attention to the finite case, in which subdirect representations may be stated entirely in direct form. In [1], [2] it was shown that: A finite algebra which is a subdirect power of a primal algebra $\mathfrak{P}_i$ is isomorphic with a direct power of $\mathfrak{P}_i$. This together with theorem 6.7 yields

Theorem 6.9. *Let $\mathfrak{P}$ be a finite algebra which is subdirectly representable in a primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$, and let $\mathfrak{P} \neq \mathring{1}$. Then the subdirect factors $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ of $\mathfrak{P}$ are direct factors, and*

$$\mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}_{i_1}^{k_1} \times \mathfrak{P}_{i_2}^{k_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_n}^{k_n}, \tag{6.31}$$

where $\mathfrak{P}_{i_r}^{k_r}$ is the k_r^{th} direct power of $\mathfrak{P}_{i_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Formulated in term of identities the representation theory in the finite case,—apart from the uniqueness of the representation—is given by

Theorem 6.10. *Lit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ be an independent set of primal algebras of orders $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectively. Then any finite algebra $\mathfrak{P}$ which satisfies all strict identities of the algebra $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \ldots \times \mathfrak{P}_n$ (direct product) is isomorphic with the direct product of (finite) direct powers ol $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ respectively,*

$$\mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}_1^{k_1} \times \mathfrak{P}_2^{k_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_n^{k_n} \quad (0 \leq k_i < \infty\,;\ i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.32}$$

and the order m of $\mathfrak{P}$ is given by

$$m = m_1^{k_1} m_2^{k_2} \ldots m_n^{k_n}. \tag{6.33}$$

A variety of applications of the representation theory are at hand in terms of the primal clusters exhibited in § 4.

It should perhaps be explicitly pointed out that the concept of independence of algebras, which here plays such an important role, is a generalization—to universal algebras—of the concept of relative primeness of elementary number theory, or, if one prefers, of the associated residue rings. Thus in the formula (6.33), for instance, the integers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ are in general no longer prime, nor even relatively prime, as they are when applied to the "natural primal cluster" $F_2, F_3, F_5, \ldots$,—a subcluster of $\tilde{\mathcal{F}}$ (§ 4).

7. *Maximal classes of identities.*

Let Sp be an arbitrary but fixed species; all algebras of this section are assumed to be of species Sp. If $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ are algebras we recall the notation:

$$Id\{\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots\}, = Id\{\mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \cdots\}$$

for the class of all strict identities common to $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$. In particular for $\overset{\circ}{|} =$ one-element algebra, $Id\{\overset{\circ}{|}\} =$ class of all possible identities (of species Sp). In the following $\subset$ denotes *proper* class inclusion.

An algebra $\mathfrak{Q}$ is called equationally *maximal* (or *saturated*) if

$$Id\{\mathfrak{Q}\} \subset Id\{\overset{\circ}{|}\}$$

and if for all algebras $\mathfrak{X}$

$$Id\{\mathfrak{Q}\} \subseteqq Id\{\mathfrak{X}\} \subseteqq Id\{\overset{\circ}{|}\} \quad \text{implies:} \quad Id\{\mathfrak{X}\} = Id\{\mathfrak{Q}\} \quad \text{or} \quad Id\{\mathfrak{X}\} = Id\{\overset{\circ}{|}\}.$$

The following theorem was proved in [2]:

Theorem 7.1. *If $\mathfrak{P}$ is a primal algebra, $\mathfrak{P}$ is equationally maximal.*

Consider now the related notion of relative maximality. If $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ are algebras we say $\mathfrak{Q}_1$ is *equationally maximal in* (or *relative to*) $\mathfrak{Q}_2$ if

$$Id\{\mathfrak{Q}_1\} \subset Id\{\mathfrak{Q}_2\}$$

and for all algebras $\mathfrak{X}$

$$Id\{\mathfrak{Q}_1\} \subseteqq Id\{\mathfrak{X}\} \subseteqq Id\{\mathfrak{Q}_2\} \quad \text{implies:} \quad Id\{\mathfrak{X}\} = Id\{\mathfrak{Q}_1\} \quad \text{or} \quad Id\{\mathfrak{X}\} = Id\{\mathfrak{Q}_2\}.$$

We have the following extension of theorem 7.1,

Theorem 7.2. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ be an independent set of primal algebras. Then in the sequence of algebras (where $\times$ denotes direct product),*

$$\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_n,\ \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_{n-1},\ \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_{n-2}, \ldots,\ \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_1,\ \overset{\circ}{|}$$

each algebra of the sequence is equationally maximal in its immediate successor.

(Naturally from a given set $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ of independent algebras we get many such maximal chains by rearranging the $\mathfrak{P}_i$.)

The proof of theorem 7.2 follows readily from the fundamental theorem 6.1, and will be omitted. (Compare with the proof of theorem 7.1 in [2].)

8. *Problems.*

Among numerous questions raised by the foregoing theory we shall merely mention one,—a rather central one: How large can a "maximal" (non-augmentable) primal cluster of given species be? Is such a maximal cluster always infinite? How many distinct maximal clusters are there? Such questions still remain unsettled, or only partially settled.

University of California, Berkeley, Cal. (USA.).

(Eingegangen am 13. November 1954.)

STOLL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 189—210 (1955)

Über meromorphe Modifikationen.

III. Streueigenschaften analytischer und meromorpher Modifikationen[1].

Von

WILHELM STOLL.

Nachdem in den Teilen I und II die notwendigen Hilfsmittel geschaffen wurden, können in diesem Teil diejenigen Sätze über analytische und meromorphe Modifikationen im Falle $n=2$ gewonnen werden, die es in Teil IV und V ermöglichen werden, solche Modifikationen durch σ-Prozesse zu erzeugen.

Ist die Modifikation $\mathfrak{M}=\underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ analytisch und die Abbildung τ im Punkt $P_0 \in M$ singulär, so ist — wie sich zeigen wird — die Streumenge $\Sigma(P_0)$ entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, und zwar ist $\Sigma(P_0)$ gerade die Teilmenge von H, auf der $v(Q,H)=P_0$ ist[2]. Übt man in P_0 hintereinander σ-Prozeß in geeigneter Weise aus (d.h. setzt man einen HOPFschen σ-Baum ein), so wird die aus $v(Q,H)$ entstehende Abbildung in ganz H pseudokonform. Verfährt man so in jeder singulären Stelle von τ, so erzeugen die ausgeübten σ-Prozesse schließlich die gegebene Modifikation[3]. Diese Methode von H. HOPF[4] beruht jedoch wesentlich auf dem regulären Verhalten von v in N; sie versagt, wenn $\mathfrak{M}$ meromorph ist, zumal dann v auf $\Sigma(P_0)$ nicht mehr analytisch zu sein braucht und über den analytischen Charakter der Streumenge $\Sigma(P_0)$ nichts bekannt ist.

Diese Schwierigkeiten werden nun durch den Hauptsatz über meromorphe Modifikationen[5], dessen etwas verwickelter Beweis in diesem Teil geführt wird,

---

[1]) Unter dem gemeinsamen Titel „*Über meromorphe Modifikationen*" erscheinen eine Reihe von Arbeiten, und zwar Teil I (§ 1 bis § 3), Teil II (§ 4 bis § 6) und Teil III (§ 7 bis § 9) in der Mathematischen Zeitschrift, Teil IV (§ 10 bis § 12) und Teil V (§ 13 bis § 16) in den Mathematischen Annalen. Zur Einleitung, Begriffsbildung und Literatur sei auf Teil I, Math. Z. **61**, S. 206—234, und Teil II, Math. Z. **61**, 467—488 hingewiesen.

[2]) Man vgl. Satz 7.1 und Satz 7.2.

[3]) Man vgl. H. HOPF [9] und [9a] und in dieser Arbeit die Sätze 10.16, 11.1, 14.1, 14.2 und 14.3.

[4]) H. HOPF [9a] untersucht analytische Modifikationen in einem Punkt ($n=2$) und allgemeiner „*bis auf a schlichte*" Abbildungen. Seine Methode läßt sich aber leicht auf beliebige analytische Modifikationen ($n=2$) und allgemeiner auf analytische Abbildungen, die bis auf eine 2-dimensionale analytische Menge eineindeutig sind, übertragen. Wir beschränken uns hier auf Modifikationen. Die Methode von H. HOPF habe ich in Vorträgen in Zürich und Oberwolfach kennengelernt. Ein Manuskript der Arbeit [9a] habe ich erst nach der Fertigstellung dieser Reihe von Arbeiten erhalten; sie ist inzwischen erschienen: Comm. Math. Helv. **29**, 123—156 (1954).

[5]) Man vgl. Satz 9.3 und Satz 9.4.

überwunden. Nach diesem Hauptsatz kann man bei einer beiderseits offenen und meromorphen Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ jeder singulären Stelle $P_0 \in N$ der Abbildung τ eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C(P_0) \subseteqq \Sigma(P_0) \subseteqq N$ *eineindeutig* so zuordnen, daß v auf $C(P_0)$ abgesehen von isolierten Punkten regulär ist.

Die Bedeutung dieser Zuordnung wird beispielsweise an dem Spezialfall, daß N nur endlich viele irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 enthält, ersichtlich; dann wird nämlich wegen der Eineindeutigkeit der Zuordnung die Abbildung τ nur in *endlich vielen* Punkten singulär, in denen dann σ-Prozesse anzusetzen sind. Außerdem ist v auf $C(P_0)$ bis auf isolierte Stellen regulär, das gibt den Anschluß an das Konstruktionsverfahren bei analytischen Modifikationen[6]).

Da in diesem und den folgenden Teilen nur noch 4-dimensionale Modifikationen auftreten, werde der Index 2 weggelassen:

$$\mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}.$$

§ 7. Streumengen bei analytischen Modifikationen.

Die komplexe Mannigfaltigkeit H werde durch $\varkappa$ analytisch in die komplexe Mannigfaltigkeit G abgebildet. Jedem Paar von Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{P}(H)$ und $\beta \in \mathfrak{P}(G)$ wird die offene Menge $V_{\alpha\beta} = \varkappa^{-1}(U_\beta) \cap U_\alpha$ zugeordnet. Die offenen Mengen $V_{\alpha\beta}$ überdecken H. Auf $\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta})$ ist die Funktionaldeterminante $\frac{\partial \beta^{-1} \varkappa \alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}$ analytisch. Auf $V_{\alpha\beta} \cap V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ gilt

$$\frac{\partial \tilde{\beta}^{-1} \varkappa \tilde{\alpha}(\tilde{\mathfrak{z}})}{\partial \tilde{\mathfrak{z}}} = \frac{\partial \tilde{\beta}^{-1} \beta(\mathfrak{w})}{\partial \mathfrak{w}} \frac{\partial \beta^{-1} \varkappa \alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}} \frac{\partial \alpha^{-1} \tilde{\alpha}(\tilde{\mathfrak{z}})}{\partial \tilde{\mathfrak{z}}}$$

mit

$$\frac{\partial \tilde{\beta}^{-1} \beta(\mathfrak{w})}{\partial \mathfrak{w}} \neq 0, \qquad \frac{\partial \alpha^{-1} \tilde{\alpha}(\tilde{\mathfrak{z}})}{\partial \tilde{\mathfrak{z}}} \neq 0,$$

wobei

$$\tilde{\alpha}(\tilde{\mathfrak{z}}) = \alpha(\mathfrak{z}) = P \in V_{\alpha\beta} \cap V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}, \qquad \mathfrak{w} = \beta^{-1} \varkappa(P)$$

ist. Die Funktionaldeterminanten $\left.\frac{\partial \beta^{-1} \varkappa \alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}\right|_{\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)}$ definieren zusammen mit den offenen Mengen $V_{\alpha\beta}$ eine COUSIN-Verteilung auf H. Ist diese in keinem Teilgebiet von H identisch Null, so sei $\varphi_\varkappa(P) \geqq 0$ die Vielfachheit[7]) ihrer Nullstelle P. Es ist $\{P \mid \varphi_\varkappa(P) > 0\}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, die gerade alle Punkte enthält, die keine Umgebung haben, in der die Abbildung $\varkappa$ pseudokonform ist. Es heiße $\varphi_\varkappa(P)$ die Vielfachheit der Abbildung $\varkappa$ im Punkt P. Ist die Funktionaldeterminante $\left.\frac{\partial \beta^{-1} \varkappa \alpha(\mathfrak{z})}{\partial \mathfrak{z}}\right|_{\mathfrak{z} = \alpha^{-1}(P)}$ in einer Umgebung des Punktes P identisch Null, so sei $\varphi_\varkappa(P) = \infty$. Die

[6]) Man vgl. die Sätze 12.1, 15.1 und 16.3.

[7]) Zur Vielfachheit der Nullstelle vgl. man STOLL [16] S. 144.

Menge der Punkte, in denen $\varkappa$ nicht pseudokonform ist, kann noch anders gekennzeichnet werden:

Satz 7.1. Satz von HOPF[8]).

Voraussetzung. *Die 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H werde durch $\varkappa$ analytisch in die 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G mit der Vielfachheit $\varphi_\varkappa(Q)$ abgebildet. Die offene Menge $B \subseteqq H$ werde durch $\varkappa$ pseudokonform in G abgebildet. Die Menge $N = H - B$ enthalte keinen inneren Punkt.*

Behauptung. 1. *Die Menge $N_0 = \{Q \mid \varphi_\varkappa(Q) > 0\}$ ist leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, die in N enthalten ist.*

2. *Die offene Menge $B_0 = H - N_0$ wird durch $\varkappa$ pseudokonform in G abgebildet, wobei $\varkappa(N_0) \cap \varkappa(B_0) = \emptyset$ ist.*

3. *In B_0 liegt jede offene Teilmenge von H, in der $\varkappa$ eineindeutig ist.*

4. *Ist $\beta \in \mathfrak{P}(G)$ und wird $\big(z_1(Q), z_2(Q)\big) = \beta^{-1}\varkappa(Q)$ für $Q \in V_\beta = \varkappa^{-1}(U_\beta)$ gesetzt, so gehört ein Punkt $Q_0 \in V_\beta$ dann und nur dann zu B_0, wenn die in V_β meromorphe Funktion $\frac{z_1(Q) - z_1(Q_0)}{z_2(Q) - z_2(Q_0)}$ in Q_0 eine Unbestimmtheitsstelle hat.*

5. *Ist $P_0 \in \varkappa(N_0)$, so ist $\varkappa^{-1}(P_0)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, die in N_0 liegt.*

6. *Auf jedem irreduziblen Teil von N_0 ist $\varkappa$ konstant.*

Beweis. 1. Auf B ist $\varphi_\varkappa(Q) = 0$, woraus $N_0 \subseteqq N$ folgt. Da $\varphi_\varkappa(Q)$ die Vielfachheit der Nullstelle Q einer COUSIN-Verteilung II. Art auf H ist, ist N_0 entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, w. z. b. w.

2. Für $Q_0 \neq Q_1$ sei $\varkappa(Q_0) = \varkappa(Q_1)$. Angenommen es ist $Q_0 \in B_0$. Eine offene Umgebung $V_0 \subseteqq B_0$ von Q_0 wird durch $\varkappa$ pseudokonform auf eine offene Umgebung $V_0' \subseteqq G$ von $P_0 = \varkappa(Q_0)$ abgebildet, wobei $Q_1 \notin \bar{V}_0$ sei. Eine offene Umgebung V_1 von Q_1 mit $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ wird durch $\varkappa$ analytisch in V_0' abgebildet. Da die Menge $V_0 \cap N$, also auch $\varkappa(V_0 \cap N)$, keinen inneren Punkt hat, ist die offene, nichtleere Menge $\varkappa(V_1 \cap B) \subseteqq V_0'$ nicht in $\varkappa(V_0 \cap N)$ enthalten. Daher ist $\varkappa(V_1 \cap B) \cap \varkappa(V_0 \cap B) \neq \emptyset$, also auch $V_1 \cap B \cap V_2 \cap B \neq \emptyset$, während $V_1 \cap V_2$ leer ist. Die Annahme war falsch. Es ist $Q_0 \in N_0$ und ebenso $Q_1 \in N_0$; auf B_0 ist $\varkappa$ eineindeutig also pseudokonform. Außerdem ist $\varkappa(M_0) \cap \varkappa(B_0) = \emptyset$, w. z. b. w.

3. Ist $\varkappa$ auf einer offenen Menge V eineindeutig, so ist dort $\varphi_\varkappa(Q) = 0$, also $V \subseteqq B_0$, w. z. b. w.

4. Ist $\beta \in \mathfrak{P}(G)$ und wird $\beta^{-1}\varkappa(Q) = \big(z_1(Q), z_2(Q)\big)$ für Q aus $V_\beta = \varkappa^{-1}(U_\beta)$ gesetzt, so sind $z_1(Q)$ und $z_2(Q)$ auf V_β nichtkonstant und analytisch. Auf V_β ist

$$f(Q) = \frac{z_1(Q) - z_1(Q_0)}{z_2(Q) - z_2(Q_0)}$$

meromorph. Es sei $\mathfrak{a} = (a_1, a_2) = \big(z_1(Q_0), z_2(Q_0)\big)$.

a) Ist $Q_0 \in B_0$, so besteht die Menge $\{Q \mid z_1(Q) = a_1, z_2(Q) = a_2\}$ genau aus dem einen Punkt Q_0. Also haben die Funktionen $z_1(Q) - a_1$ und $z_2(Q) - a_2$

[8]) Man vgl. H. HOPF [9a] § 1, Nr. 1 und § 3, Nr. 1.

den größten gemeinsamen Teiler 1 und verschwinden in Q_0. Ihr Quotient $f(Q)$ hat in Q_0 eine Unbestimmtheitsstelle.

b) Die Funktion $f(Q)$ habe in Q_0 eine Unbestimmtheitsstelle. Es gibt eine Karte U_α aus H, für die gilt:

α) Der Polyzylinder $U'_\alpha = \{u \mid |u_1|<1, |u_2|<1\}$ wird durch $\alpha \in \mathfrak{P}(H)$ pseudokonform auf $U_\alpha \subseteq V_\beta$ abgebildet, wobei $Q_0 = \alpha(0,0)$ ist.

β) Es gibt eine analytische Funktion $\Delta(Q)$ auf U_α, so daß

$$g_1(Q) = \frac{z_1(Q) - a_1}{\Delta(Q)}, \qquad g_2(Q) = \frac{z_2(Q) - a_2}{\Delta(Q)}$$

in jedem Punkt von U_α analytisch und teilerfremd sind.

γ) Außer Q_0 liegt in U_α keine Unbestimmtheitsstelle der Funktion f; es gilt also $g_1(Q) = g_2(Q) = 0$ für den Punkt $Q = Q_0$ und nur diesen.

δ) Die analytische Menge $N_0 \cap U_\alpha$ aus U_α besteht aus höchstens endlich vielen irreduziblen Teilen.

Da auf jedem irreduziblen Teil von $N_0 \cap U_\alpha$ für höchstens ein Verhältnis $b_1 : b_2$ die Funktion $b_1 g_1 + b_2 g_2 \equiv 0$ ist, kann man zwei verschiedene Verhältnisse $b_{11} : b_{21}$ und $b_{12} : b_{22}$, für die also $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ist, und eine offene Umgebung $V \subset U_\alpha$ von Q_0 finden, so daß gilt:

ε) Die analytische Menge $L_\varrho = V \cap \{Q \mid b_{1\varrho} g_1(Q) + b_{2\varrho} g_2(Q) = 0\}$ besteht aus r_ϱ zusammenhängenden komplexen Kurven L_ϱ^ν, für die gilt

$$N_0 \cap L_\varrho^\nu = N_0 \cap \overline{L}_\varrho^\nu \subseteq \{Q_0\},$$
$$L_\varrho^\mu \cap L_\varrho^\nu = \{Q_0\} \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,$$
$$V \cap L_\varrho^\nu = V \cap \overline{L}_\varrho^\nu,$$
$$L_1^\mu \cap L_2^\nu = \{Q_0\}.$$

Durch $\beta^{-1}\varkappa(Q)$ wird L_ϱ^ν eineindeutig und analytisch, also konform auf $\tilde{L}_\varrho = \{z \mid b_{1\varrho}(z_1 - a_1) + b_{2\varrho}(z_2 - a_2) = 0\}$ abgebildet, wobei $\beta^{-1}\varkappa(Q_0) = \mathfrak{a}$ ist. Daher ist $r_\varrho = 1$ und $L_\varrho^\nu = L_\varrho$. Im Einheitskreis gibt es analytische Funktionen $u_{\nu\varrho}(t)$ mit $u_{\nu\varrho}(0) = 0$, so daß der Einheitskreis durch $\alpha(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t))$ konform in L_ϱ abgebildet wird. Durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varrho(t) &= (h_{1\varrho}(t), h_{2\varrho}(t)) \\ &= (z_1(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t)),\ z_2(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t))) \\ &= \beta^{-1}\varkappa(\alpha(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t))) \end{aligned}$$

mit

$$\mathfrak{h}_\varrho(0) = (h_{1\varrho}(0), h_{2\varrho}(0)) = (a_1, a_2) = \mathfrak{a}$$

wird der Einheitskreis konform in die Ebene $\tilde{L}_\varrho$ abgebildet. Es folgt $\mathfrak{h}'_\varrho(0) \neq 0$. Wegen $b_{1\varrho}(h_{1\varrho}(t) - a_1) + b_{2\varrho}(h_{2\varrho}(t) - a_2) \equiv 0$ gilt

$$b_{1\varrho} h'_{1\varrho}(0) + b_{2\varrho} h'_{2\varrho}(0) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2).$$

Für zwei Zahlen $c_1 \neq 0$ und $c_2 \neq 0$ gilt also

$$h'_{1\varrho}(0) = -c_\varrho b_{2\varrho} \quad \text{und} \quad h'_{2\varrho}(0) = c_\varrho b_{1\varrho}.$$

Daher ist

$$0 \neq \begin{vmatrix} -b_{21} & b_{11} \\ -b_{22} & b_{12} \end{vmatrix} = c_1^{-1} c_2^{-1} \begin{vmatrix} h'_{11}(0) & h'_{21}(0) \\ h'_{12}(0) & h'_{22}(0) \end{vmatrix}$$

$$= c_1^{-1} c_2^{-1} \begin{vmatrix} z_{1u_1}(0,0) & z_{1u_2}(0,0) \\ z_{2u_1}(0,0) & z_{2u_2}(0,0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u'_{11}(0) & u'_{12}(0) \\ u'_{21}(0) & u'_{22}(0) \end{vmatrix}.$$

Bei $\alpha^{-1}(Q_0)$ ist $\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$, woraus $\varphi_\varkappa(Q_0) = 0$, also $Q_0 \in B_0$ folgt, w. z. b. w.

5. Ist $P_0 \in \varkappa(N_0)$, so gilt $\varkappa^{-1}(P_0) \subsetneqq N_0$ gemäß der 2. Behauptung. Es gibt eine Karte U_β von G mit $\beta \in \mathfrak{P}(G)$, die P_0 enthält. Es ist $V_\beta = \varkappa^{-1}(U_\beta)$ eine offene Umgebung von $\varkappa^{-1}(P_0)$ und die durch $\beta^{-1}\varkappa(Q) = \big(z_1(Q), z_2(Q)\big)$ definierten Funktionen sind auf V_β analytisch. Mit $\mathfrak{a} = (a_1, a_2) = \beta^{-1}(P_0)$ gilt $\varkappa^{-1}(P_0) = \{Q \,|\, z_1(Q) = a_1,\ z_2(Q) = a_2\} \neq \emptyset$. Also ist $\varkappa^{-1}(P_0)$ eine analytische Menge in V_β. Auf ihr hat die Funktion $\frac{z_1(Q) - a_1}{z_2(Q) - a_2}$ keine Unbestimmtheitsstelle; daher ist $\varkappa^{-1}(P_0)$ die Nullstellenmenge des größten gemeinsamen Teilers von $z_1(Q) - a_1$ und $z_2(Q) - a_2$, also eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V_β und, weil $\varkappa^{-1}(P_0)$ in H abgeschlossen ist, sogar aus H, w. z. b. w.

6. Es sei N_1 ein irreduzibler Teil von N_0. Ein gewöhnlicher Punkt $Q_0 \in N_1$ von N_0 werde gewählt. Es sei $P_0 = \varkappa(Q_0)$. Dann ist $\varkappa^{-1}(P_0)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H, die durch Q_0 geht und in N_0 liegt. Jeder irreduzible Teil von $\varkappa^{-1}(P_0)$ ist auch einer von N_0; ein irreduzibler Teil von $\varkappa^{-1}(P_0)$ geht durch Q_0 und Q_0 liegt nur in dem irreduziblen Teil N_1 von N_0, also ist N_1 irreduzibler Teil von $\varkappa^{-1}(P_0)$, d.h. $\varkappa(Q_0) = P_0$ für $Q \in N_1$, w. z. b. w.

Hieraus ergibt sich:

Satz 7.2. Streumengen bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei analytisch. Die größte offene Menge aus* G, *in der* τ *regulär ist, sei* A_0 *und* E *die größte offene Menge aus* G, *in der* τ *pseudokonform ist. Es sei* M_0 *die Menge der Punkte in* M, *in denen* τ *die Mannigfaltigkeit* G *ändert und* M_1 *die Menge der Punkte aus* M, *in denen* τ *streut.*

Behauptung. 1. *Es ist* $A_0 = E$ *und* $M_1 \subsetneqq M_0 = G - A_0$.

2. *Ist* $P_0 \in M_1$, *so ist* $\Sigma(P_0) \subsetneqq N$ *eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus* H. *Es ist* $\Sigma(P_0) = v^{-1}(P_0, H)$.

3. *Hat* H *eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so besteht* M_1 *aus höchstens abzählbar vielen Punkten; ist* H *kompakt, so besteht* M_1 *aus höchstens endlich vielen Punkten.*

Beweis. 1. Es ist $M_0 = G - E$. Nach Satz 5.7 ist $\tau(A_0 - E, G) \frown H = \tau(A_0 - E, G)$ leer. Daher ist $A_0 = E$.

2. Es sei $P_0 \in M_1$. Ist $Q_0 \in \Sigma(P_0)$, so gibt es eine Folge $Q^\nu \in B$ mit $Q^\nu \to Q_0$ und $v(Q^\nu) \to P_0$ für $\nu \to \infty$. Also ist $P_0 = v(Q_0, H)$, d.h. $Q_0 \in v^{-1}(P_0, H)$, womit $\Sigma(P_0) \subseteq v^{-1}(P_0, H)$ bewiesen ist. Wenn umgekehrt $Q_0 \in v^{-1}(P_0, H)$ ist, so gilt $P_0 = v(Q_0, H)$ und es gibt eine Folge $Q^\nu \in B$ mit $\lim_{\nu \to \infty} Q^\nu = Q_0$. Dann strebt $v(Q^\nu) \to P_0$ für $\nu \to \infty$. Es ist $v(Q^\nu) \in A$. Also folgt $Q_0 \in \Sigma(P_0)$, woraus sich $\Sigma(P_0) = v^{-1}(P_0, H)$ ergibt. Nach Satz 7.1 ist $\Sigma(P_0) = v^{-1}(P_0, H)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H.

3. Da $M_1 = \{P \mid \Sigma(P) \neq \emptyset\} \cap M_0$ ist und $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1)$ für $P_0 \neq P_1$ leer ist, ergibt sich die 3. Behauptung unmittelbar aus der zweiten, w. z. b. w.

In den Punkten von M_1 werden später die σ-Prozesse anzusetzen sein. Über die Streumengen dieser Punkte weiß man nun gut Bescheid. Die Aufgabe der nächsten Paragraphen wird es sein, entsprechende Aussagen für meromorphe Modifikationen zu gewinnen, was wesentlich schwieriger sein wird.

§ 8. Hilfssätze.

Bevor die Streusätze über meromorphe Modifikationen bewiesen werden können, sind noch einige Vorbereitungen notwendig.

Hilfssatz 8.1. Voraussetzung. *Die Funktionen f und g seien für $|z_1| \leq a$ und $|z_2| \leq b$ analytisch und haben dort jede wenigstens eine Nullstelle. Es sei $f(z_1, z_2) \neq 0$ für $|z_1| \leq a$ und $|z_2| = b$ und $g(z_1, z_2) \neq 0$ für $|z_1| = a$ und $|z_2| \leq b$.*

Behauptung. *Die Funktionen f und g haben in $|z_1| < a$ und $|z_2| < b$ eine gemeinsame Nullstelle.*

Beweis. Es gibt Zahlen $a_1 > a$ und $b_1 > b$, so daß f und g im Polyzylinder $U_1 = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < a_1, |z_2| < b_1\}$ analytisch sind. Es ist

$$F = \{\mathfrak{z} \mid f(z_1, z_2) = 0,\ |z_1| < a_1,\ |z_2| < b_1\} \neq \emptyset$$

eine 2-dimensionale analytische Menge aus U_1. Es sei $\mathfrak{F}$ die Riemannsche Fläche zur analytischen Menge F und $\gamma(R) = \big(z_1(R), z_2(R)\big)$ die zugehörige Projektion von $\mathfrak{F}$ auf F. Es sei $U = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < a, |z_2| < b\}$. Es ist $\gamma^{-1}(F \cap U) = \mathfrak{F}^*$ offen. Die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{F}^*} < \mathfrak{F}$ ist kompakt. Der Rand von $\mathfrak{F}^*$ ist $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{F}^*} - \mathfrak{F}$. Es ist

$$\mathfrak{C} = \gamma^{-1}\big(\{\mathfrak{z} \mid |z_1| = a,\ |z_2| \leq b\} \cap F\big).$$

Die Funktion $g^*(R, u) = g\big(z_1(R), u\, z_2(R)\big)$ ist auf $\mathfrak{F} \times \{u \mid |u| \leq 1\}$ analytisch und auf $\mathfrak{C} \times \{u \mid |u| \leq 1\}$ nicht Null. Daher haben für jedes feste u in $|u| \leq 1$ die Funktionen $g^*(R, u)$ in $\mathfrak{F}^*$ gleichviel Nullstellen, wenn jede mit ihrer Vielfachheit gezählt wird. Die analytische Menge F trifft jeden Kreis $\{\mathfrak{z} \mid z_1 = 0, |z_2| \leq b\}$ mit $|c| \leq a$ und die Funktion $g(z_1, c)$ hat in $|z_1| \leq a$ für jedes $|c| \leq b$ wenigstens eine Nullstelle. Also hat $g(z_1, 0)$ eine Nullstelle c_0 mit $|c_0| < b$. Ein Punkt (c_0, d_0) liegt auf F. In der Teilmenge $\gamma^{-1}(c_0, d_0) < \mathfrak{F}^*$ verschwindet $g^*(R, 0)$, also hat $g^*(R, u)$ für jedes $|u| \leq 1$, insbesondere für $u = 1$, eine Nullstelle R_0 auf $\mathfrak{F}^*$. Es sei $\gamma(R_0) = \mathfrak{z}_0$. Dann ist $\mathfrak{z}_0 \in F \cap U$, d.h. $f(\mathfrak{z}_0) = 0$ und $0 = g^*(R_0, 1) = g(\mathfrak{z}_0)$, womit eine gemeinsame Nullstelle in U gefunden ist, w. z. b. w.

Aus Hilfssatz 8.1 folgt unmittelbar:

Hilfssatz 8.2. Voraussetzung. *In einem* $D=\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|\leq a, |z_2|\leq b\}$ *umfassenden Gebiet seien analytische Mengen* F_1 *und* F_2 *der reinen Dimension* 2 *mit* $D\cap F_1\neq\emptyset$ *und* $D\cap F_2\neq\emptyset$ *gegeben. Es seien*

$$F_1\cap\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|\leq a,\ |z_2|=b\}=\emptyset,$$

$$F_2\cap\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|=a,\ |z_2|\leq b\}=\emptyset.$$

Behauptung. *Es ist* $F_1\cap F_2\cap D\neq\emptyset$.

Hilfssatz 8.3. Voraussetzung. 1. *Im Polyzylinder* $D=\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|<a, |z_2|<b\}$ *sei eine rein 2-dimensionale analytische Menge F gegeben, die die Ebene* $\{\mathfrak{z}\,|\,z_2=0\}$ *im Nullpunkt und nur dort schneidet.*

2. *In D seien anzählbar viele rein 2-dimensionale analytische Mengen* L_ν *gegeben. Der Durchschnitt* $L_\nu\cap L_\mu$ *bestehe für* $\mu\neq\nu$ *nur aus isolierten Punkten. In* $D_1=\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|<a,\ 0<|z_2|<b\}$ *sei* $D_1\cap\bigcup_{\nu=1}^{\infty}L_\nu$ *analytisch.*

3. *Es gebe eine Nullfolge* $\mathfrak{z}_\nu\in L_\nu$.

Behauptung. *Es gibt eine Nummer* ν_0, *so daß* $L_\nu\cap F\neq\emptyset$ *für* $\nu\geq\nu_0$ *ist.*

Beweis. Für zwei Zahlen a_1, b_1 mit $0<a_1<a$ und $0<b_1<b$ ist $F\cap\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|=a_1, |z_2|\leq b_1\}=\emptyset$. Da $\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|\leq a_1, |z_2|=b_1\}$ kompakt ist und in D_1 liegt, und da $D_1\cap\bigcup_{\nu=1}^{\infty}L_\nu$ in D_1 analytisch ist, gibt es eine Nummer ν_0, so daß der Durchschnitt $L_\nu\cap\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|\leq a_1, |z_2|=b_1\}=\emptyset$ für alle $\nu\geq\nu_0$ ist. Zugleich kann ν_0 so groß gewählt werden, daß $\mathfrak{z}_\nu\in D^*=\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|<a_1, |z_2|<b_1\}$ für $\nu\geq\nu_0$ ist. Es ist $\mathfrak{z}_\nu\in L_\nu\cap D^*$ für $\nu\geq\nu_0$ und $F\cap D^*\neq\emptyset$. Nach Hilfssatz 8.2 ist $F\cap L_\nu\cap D^*$ nicht leer für $\nu\geq\nu_0$, w. z. b. w.

Ohne weiteres überträgt sich dieser Hilfssatz auf Mannigfaltigkeiten:

Hilfssatz 8.4. Voraussetzung. 1. *In der 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit D seien zwei rein 2-dimensionale analytische Mengen F und N mit* $F\cap N=\{P_0\}$ *gegeben, wobei* P_0 *ein gewöhnlicher Punkt von N sei.*

2. *In D seien abzählbar viele analytische Mengen* L_ν *der reinen Dimension* 2 *gegeben. Der Durchschnitt* $L_\nu\cap L_\mu$ *bestehe für* $\mu\neq\nu$ *nur aus isolierten Punkten. In* $D_1=D-N$ *sei* $D_1\cap\bigcup_{\nu=1}^{\infty}L_\nu$ *analytisch.*

3. *Es gebe eine Folge* $P^\nu\in L_\nu$, *die gegen* P_0 *strebt.*

Behauptung. *Es gibt eine Nummer* ν_0, *so daß* $F\cap L_\nu\neq\emptyset$ *für* $\nu\geq\nu_0$ *ist.*

Hieraus folgt unmittelbar ein entsprechender Satz für komplexe Kurven.

Hilfssatz 8.5. Voraussetzung. *Dieselben Voraussetzungen wie in Hilfssatz* 8.4 *werden gemacht mit der Ausnahme: F braucht keine rein 2-dimensionale analytische Menge zu sein, es sei F aber eine komplexe Kurve aus D mit* $F\cap N=\overline{F}\cap N=\{P_0\}$.

Behauptung. *Es gibt eine Nummer* ν_0, *so daß* $F\cap L_\nu\neq\emptyset$ *für* $\nu\geq\nu_0$ *ist.*

Man kann auch P_0 als gewöhnlichen Punkt von F statt von N voraussetzen:

Hilfssatz 8.6. Voraussetzung. 1. *Im Polyzylinder* $D=\{\mathfrak{z} \mid |z_1|<a, |z_2|<b\}$ *sei eine rein 2-dimensionale analytische Menge* N *gegeben, die den Kreis* $F=\{\mathfrak{z} \mid |z_1|<a, z_2=0\}$ *im Nullpunkt und nur im Nullpunkt schneidet.*

2. *In* D *seien abzählbar viele analytische Mengen* L_ν *der reinen Dimension* 2 *gegeben. Der Durchschnitt* $L_\nu \cap L_\mu$ *bestehe für* $\mu \neq \nu$ *nur aus isolierten Punkten. In* $D_1=D-N$ *sei* $D_1 \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L_\nu$ *analytisch.*

3. *Es gebe eine Nullfolge* $\mathfrak{z}_\nu \in L_\nu$.

Behauptung. *Es gibt eine Nummer* ν_0, *so daß* $L_\nu \cap F \neq \emptyset$ *für* $\nu \geq \nu_0$ *ist.*

Beweis. Für zwei Zahlen a_1, b_1 mit $0<a_1<a$ und $0<b_1<b$ ist $N \cap \{\mathfrak{z} \mid |z_1|=a_1, |z_2| \leq b_1\}=\emptyset$. Da $D_1 \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L_\nu$ in D_1 analytisch ist, und da $\{\mathfrak{z} \mid |z_1|=a_1, |z_2| \leq b_1\}$ eine kompakte Teilmenge von D_1 ist, gibt es eine Nummer ν_0, so daß $L_\nu \cap \{\mathfrak{z} \mid |z_1|=a_1, |z_2| \leq b_1\}=\emptyset$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Zugleich kann man ν_0 so groß wählen, daß die Punkte $\mathfrak{z}_\nu$ zu $D^*=\{\mathfrak{z} \mid |z_1|<a_1, |z_2|<b_1\}$ gehören. Wegen $\mathfrak{z}_\nu \in L_\nu \cap D^*$ für $\nu \geq \nu_0$ schneidet L_ν den Kreis $F \cap D^*$ für $\nu \geq \nu_0$, w. z. b. w.

Hieraus folgt unmittelbar:

Hilfssatz 8.7. Voraussetzung. *Dieselben Voraussetzungen wie in Hilfssatz* 8.4 *werden gemacht mit der Ausnahme: Der Punkt* P_0 *ist nicht notwendig ein gewöhnlicher Punkt von* N, *aber ein gewöhnlicher Punkt von* F.

Behauptung. *Es gibt eine Nummer* ν_0, *so daß* $F \cap L_\nu \neq \emptyset$ *für* $\nu \geq \nu_0$ *ist.*

Hilfssatz 8.8. Voraussetzung. *Dieselben Voraussetzungen wie in Hilfssatz* 8.5 *werden gemacht mit der Ausnahme: Der Punkt* P_0 *ist nicht notwendig gewöhnlicher Punkt von* N, *aber ein gewöhnlicher Punkt von* F.

Behauptung. *Es gibt eine Nummer* ν_0, *so daß* $F \cap L_\nu \neq \emptyset$ *für* $\nu \geq \nu_0$ *ist.*

§ 9. Streumengen bei meromorphen Modifikationen.

Nun werden die Grundlagen geschaffen, die es ermöglichen werden, eine gegebene beiderseits offene, meromorphe Modifikation durch σ-Prozesse zu erzeugen.

Definition 9.1. Häufungsmenge.

Im topologischen Raum G *seien Mengen* L_ν *für* $\nu=1, 2, \ldots$ *gegeben. Der Punkt* $Q \in G$ *gehöre dann und nur dann zu* S, *wenn für jede Umgebung* U *von* Q *unendlich viele der Mengen* $U \cap L_\nu$ *nicht leer sind. Es heiße* S *die Häufungsmenge der Mengen* L_ν.

Satz 9.1. Streumengensatz (Teil I).

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *In einer offenen Umgebung* U *von* M *liege eine zusammenhängende komplexe Kurve* L, *die in* U *abgeschlossen ist. Es sei* $\overline{L}$ *kompakt. Es sei* $L \cap M=\{P_0\}$

und τ verhalte sich längs L im Punkt P_0 bestimmt. Es sei $\tilde{L}=\tau(L,L)$ und $Q_0=\tau(P_0,L)$.

3. In U sei zu jeder natürlichen Zahl ν eine zusammenhängende komplexe Kurve L_ν gegeben, die in U abgeschlossen ist und in M nur in endlich vielen Punkten schneidet. In jedem Punkt von $M\cap L_\nu$ verhalte sich die Abbildung τ längs L_ν bestimmt. Es sei $\tilde{L}_\nu=\tau(L_\nu,L_\nu)$.

4. Für $\mu\neq\nu$ bestehe $L_\nu\cap L_\mu$ höchstens aus isolierten Punkten. Es bestehe $L\cap L_\nu$ höchstens aus isolierten Punkten.

5. Es sei $\tilde{S}$ die Häufungsmenge der Mengen $\tilde{L}_\nu\cap B$; es werden $V=\tau(U\cap A)\cup N$ und $C=\tilde{S}\cap V-\tilde{L}\cap B$ gesetzt. Es sei $C-\{Q_0\}$ nicht leer.

6. Zu jeder Umgebung W von $\tilde{L}$ gebe es eine Nummer ν_W, so daß $L_\nu\subset W$ für $\nu\geq\nu_W$ ist.

7. Die kleinste analytische Menge aus V, die N enthält, sei N^*. Die irreduziblen Teile von N^* mögen mittels einer Indexmenge Λ numeriert und mit N_λ^* bezeichnet werden. Es sei dim $N^*\leq 2$.

Behauptung. *1. Die Indexmenge Λ enthält eine nichtleere Teilmenge Λ_0, für die $C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} N_\lambda^*$ gilt. In H ist C analytisch.*

2. Es ist $Q_0\in C\subseteq\Sigma(P_0)\subseteq N$.

3. Für $\lambda\in\Lambda_0$ hat N_λ^* die Dimension 2.

4. Der Durchschnitt von $V-(\tilde{L}\cap B)$ mit der Häufungsmenge der Menge $\tilde{L}_\nu$ ist C.

Beweis. a) In U sind L_ν und L irreduzible analytische Mengen der Dimension 2. Nach Satz 2.12 sind dann auch

$$V\cap\overline{\tau(L_\nu\cap A)}=\tau(L_\nu,L_\nu)=\tilde{L}_\nu \tag{9.1}$$

und

$$V\cap\overline{\tau(L\cap A)}=\tau(L,L)=\tilde{L} \tag{9.2}$$

irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 aus V, die N nur in endlich vielen Punkten, nämlich in $\tau(M,L_\nu)$ bzw. in $\tau(M,L)$ schneiden. Es ist $\tilde{L}\cap N=\overline{\tilde{L}\cap N}=\{Q_0\}$ und $\tilde{L}$ eine komplexe Kurve aus H. Es bestehen $\tilde{L}\cap L_\nu$ und $\tilde{L}_\mu\cap\tilde{L}_\nu$ für $\mu\neq\nu$ höchstens aus isolierten Punkten.

b) Ist K ein kompakter Teil von $U-L$, so ist $W=G-K$ eine Umgebung von L, also $L_\nu\subset W$ für $\nu\geq\nu_W$; es ist $L_\nu\cap K$ für $\nu\geq\nu_W$ leer. Daher ist $F=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(L_\nu-L)$ in $U-L$ analytisch und hat die Mengen $L_\nu-L$ als irreduzible Teile. In $V-N-\tilde{L}=\tau(U-L-M)$ ist $F^*=\tau(F\cap A)$ analytisch und rein 2-dimensional. Es sei V_1 die Menge der Punkte aus V, in denen F^* regulär ist. Da $N\cup\tilde{L}\subseteq N^*\cup\tilde{L}$ und $N^*\cup\tilde{L}$ in V eine 2-dimensionale analytische Menge ist, erhält man in $\tilde{F}=\overline{\tau(F\cap A)}\cap V_1$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V_1, die in $S=V-V_1\subseteq N\cup\tilde{L}$ singulär ist. Es ist $\tilde{L}_\nu\cap V\cap B$ ein irreduzibler Teil von F^*, also $\overline{\tilde{L}_\nu\cap V_1}=\tilde{L}_\nu\cap V_1$ ein irreduzibler Teil von $\tilde{F}$.

Daher ist $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}_\nu \cap V_1$ eine in $\tilde{F}$ gelegene analytische Menge aus V_1, die F^* umfaßt. Da aber $\tilde{F}$ die kleinste analytische Menge aus V_1 ist, die F^* umfaßt, so ist

$$\tilde{F} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}_\nu \cap V_1. \tag{9.3}$$

Da $\tilde{F}$ auf S singulär ist und S in einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge $N^* \cup \tilde{L}$ aus V liegt, ist S leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V.

c) *Es wird* $C = S - (B \cap \tilde{L})$ *behauptet.* Da C der in $V - B \cap \tilde{L}$ gelegene Teil der Häufungsmenge $\tilde{S}$ der irreduziblen Teile $\tilde{L}_\nu \cap B$ von F^* ist, wird F^* in jedem Punkt von C singulär. Also ist $C \subseteqq V - V_1 = S$ und wegen $C \subseteqq V - B \cap \tilde{L}$ sogar $C \subseteqq S - B \cap \tilde{L}$. Ist $P \in S$, so ist F^* in P singulär; ist X eine Umgebung von P, so dringen unendlich viele irreduzible Teile von F^* in $X \cap V$ ein, da sonst F^* in $P \in X \cap V$ regulär wäre. Die irreduziblen Teile von F^* sind aber $\tilde{L}_\nu \cap B$; daher gehört P zu S. Es ist $S - B \cap \tilde{L} \subseteqq \tilde{S} \cap V - B \cap \tilde{L} = C$. Insgesamt folgt $C = S - (B \cap \tilde{L})$.

d) *Es wird* $S = C \cup \tilde{L}$ *behauptet.* Es ist

$$S \subseteqq (S - B \cap \tilde{L}) \cup \tilde{L} = C \cup \tilde{L}. \tag{9.4}$$

Ein Punkt $Q_1 \in \tilde{L} \cap B$ werde gewählt. Nach Voraussetzung 6 gehört L zur Häufungsmenge der irreduziblen Teile $L_\nu - L$ der in $U - L$ analytischen Menge F, also ist F in $v(Q_1) = P_1$ singulär. Dann ist auch $F \cap A$ in P_1 und somit auch $F^* = \tau(F \cap A)$ in $\tau(P_1) = Q_1$ singulär. Da $\tilde{L}$ irreduzibel und $F^* \cap B$ in $V - \tilde{L} - N^*$ analytisch ist, ist F^* in ganz $\tilde{L}$ singulär. Es ist $\tilde{L} \subseteqq S$, also gilt

$$\tilde{L} \cup C \subseteqq S \cup C \subseteqq S \subseteqq C \cup \tilde{L} \quad \text{d.h.} \quad \tilde{L} \cup C = S. \tag{9.5}$$

e) *Es ist* $Q_0 \in C \subseteqq N$; denn es ist

$$Q_0 \in \tilde{L} \cap N \subseteqq S \cap N = \left(S - (B \cap \tilde{L})\right) \cap N = C \cap N \tag{9.6}$$

und

$$C = S - (B \cap \tilde{L}) \subseteqq V - (V - N - \tilde{L}) - B \cap \tilde{L}$$
$$\subseteqq (N \cup \tilde{L}) - (B \cap \tilde{L}) \subseteqq N \cup (\tilde{L} - B) = N.$$

f) *Es wird* $C \subseteqq \Sigma(P_0)$ *behauptet.* Ist nämlich $Q_1 \in C$, so dringen in jede Umgebung von Q_1 unendlich viele $\tilde{L}_\nu \cap B$ ein. Da außerdem $\tilde{L}_\nu \cap \tilde{L}_\mu$ für $\mu \neq \nu$ nur aus isolierten Punkten besteht, gibt es eine Folge μ_ν mit $\mu_\nu > \mu_{\nu-1}$ und eine Punktfolge $Q^\nu \in \tilde{L}_{\mu_\nu} \cap B$ mit $Q^\nu \notin \tilde{L}_\varrho$ für $\varrho \neq \mu_\nu$, so daß $Q^\nu \to Q_1 \in N$ für $\nu \to \infty$ strebt. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $P^\nu = \tau(Q^\nu) \to P_1$ mit $P_1 \in M$. Da P^ν zu $L_{\mu_\nu} \cap A$ aber zu keinem L_ϱ mit $\varrho \neq \mu_\nu$ gehört, ist P_1 ein Punkt der Häufungsmenge der Folge L_ν. Daher ist $P_1 \in \bar{L} \cap M = \{P_0\}$, also $P_1 = P_0$. Es ist $Q_1 \in \Sigma(P_0)$, woraus $C \subseteqq \Sigma(P_0)$ folgt.

g) *Nun wird behauptet, daß durch Q_0 noch wenigstens ein von $\tilde{L}$ verschiedener irreduzibler Teil der rein 2-dimensionalen analytischen Menge S geht.*

Es gibt nämlich nach Voraussetzung einen Punkt $Q^* \in C - \{Q_0\} = C - \overline{\tilde{L}}$. Da $\overline{\tilde{L}}$ kompakt ist, haben Q^* und $\overline{\tilde{L}}$ offene Umgebungen $Y \ni Q^*$ und $Z \supset \overline{\tilde{L}}$, für die $\overline{Y}$ und $\overline{Z}$ kompakt und punktfremd sind. Man bestimmt offene Umgebungen $X_\nu \subseteq Z$ von Q_0, für die $\overline{X}_{\nu+1} \subset X_\nu \subset U$ und $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} X_\nu = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{X}_\nu = \{Q_0\}$ gelten möge. Die kompakte Menge $\overline{\tilde{L}} - X_\nu$ hat eine offene Umgebung $Z_\nu \subseteq Z$ mit $\overline{Z}_\nu \subseteq A$. Die Vereinigung $W_\nu = X_\nu \cup Z_\nu \subseteq Z$ ist offen und $\overline{W}_\nu$ kompakt.

Die Teilmenge der Kurven L_ν, für die $\tilde{L}_\nu \cap B \cap Y \neq \emptyset$ ist, erfüllt wieder die Voraussetzungen von Satz 9.1; denn zur Häufungsmenge $\tilde{S}_0$ der $\tilde{L}_\nu$ mit $B \cap \tilde{L}_\nu \cap Y = \emptyset$ gehört der Punkt $Q^* \in V - \tilde{L}$. Daher gehört auch Q_0 zu $\tilde{S}_0$. Die Umgebung W_ν von Q_0 werde nun festgehalten. Es gibt unendlich viele $\tilde{L}_{\mu_\lambda}$, für die $\tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap W_\nu \neq \emptyset$ und $B \cap \tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap Y \neq \emptyset$ sind. Es ist aber $(\tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap \overline{W}_\nu) \cap (B \cap L_{\mu_\lambda} \cap \overline{Y}) = \emptyset$. Da $\tilde{L}_{\mu_\lambda}$ linear zusammenhängend ist, gibt es einen Punkt $R^{\mu_\lambda} \in \tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap (\overline{W}_\nu - W_\nu)$. Da der Durchschnitt $(\overline{W}_\nu - W_\nu) \cap \tilde{L}_{\mu_\lambda}$ überabzählbar viele Punkte enthält, kann man $R^{\mu_\lambda} \notin \tilde{L}_\varrho$ für $\varrho \neq \mu_\lambda$ annehmen. Die abgeschlossene Teilmenge $\overline{W}_\nu - W_\nu$ von $\overline{Z}$ ist kompakt. Daher hat die Folge R^{μ_λ} einen Häufungspunkt R_ν in $\overline{W}_\nu - W_\nu$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge R^{μ_λ} strebt $R^{\mu_\lambda} \to R_\nu$ für $\lambda \to \infty$.

Angenommen es ist $R_\nu \in B$. Der Punkt $R_\nu^* = v(R_\nu)$ liegt in

$$v\big((\overline{W}_\nu - W_\nu) \cap B\big) \subseteq v(B - W_\nu) \subseteq v(B - \overline{\tilde{L}}) = A - \tilde{L}. \tag{9.8}$$

Daher gibt es eine kompakte Umgebung $K \subset A$ von R_ν^* mit $K \cap \tilde{L} = \emptyset$. Es ist $W = G - K$ eine offene Umgebung von $\tilde{L}$. Für $\nu \geq \nu_W$ ist $L_\nu \subset W$, also $L_\nu \cap K = \emptyset$, woraus $\tilde{L}_\nu \cap \tau(K) = \emptyset$ für $\nu \geq \nu_W$ folgt. Da $\tau(K)$ eine Umgebung von $R_\nu^* = \lim_{\lambda \to \infty} R^{\mu_\lambda}$ ist, gibt es eine Nummer λ_0, so daß $R^{\mu_\lambda} \in \tau(K)$ für $\lambda \geq \lambda_0$ ist. Es strebt $\mu_\lambda \to \infty$ für $\lambda \to \infty$. Daher gibt es ein $\lambda_1 \geq \lambda_0$ mit $\mu_{\lambda_1} \geq \nu_W$ und es entsteht der Widerspruch:

$$R^{\mu_{\lambda_1}} \in \tau(K) \cap \tilde{L}_{\mu_{\lambda_1}} = \emptyset. \tag{9.9}$$

Weil die Annahme falsch war, ist $R_\nu \in N$. Es folgt

$$R_\nu \in N \cap (\overline{W}_\nu - W_\nu) \subseteq N \cap (\overline{W}_\nu - \overline{\tilde{L}}) \subseteq N \cap (\overline{X}_\nu \cup \overline{Z}_\nu) - \overline{\tilde{L}} = N \cap \overline{X}_\nu - \overline{\tilde{L}}. \tag{9.10}$$

Da in jede Umgebung von R_ν unendlich viele $\tilde{L}_\nu$ eindringen, ist $R_\nu \in S$, also $R_\nu \in S \cap N \cap \overline{X}_\nu - \overline{\tilde{L}} = C \cap \overline{X}_\nu - \overline{\tilde{L}}$. Weil aber $\bigcap_{\nu=0}^{\infty} X_\nu = \bigcap_{\nu=0}^{\infty} \overline{X}_\nu = \{Q_0\}$ mit $\overline{X}_{\nu+1} \subset X$ und $\overline{X}_\nu$ kompakt ist (als abgeschlossene Teilmenge von $\overline{Z}$), strebt $R_\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$. Wegen $R_\nu \in S - \overline{\tilde{L}}$ geht ein von $\tilde{L}$ verschiedener irreduzibler Teil der analytischen Menge S durch Q_0.

h) *Es ist $\tilde{L}$ kein irreduzibler Teil von N^**; wäre nämlich $\tilde{L}$ einer, so wäre die Vereinigung $\tilde{N}^*$ aller $N_\lambda^* \neq \tilde{L}$ eine analytische Menge in V, die $S-\tilde{L}$ umfaßt. In S liegt eine 2-dimensionale irreduzible analytische Menge, die von $\tilde{L}$ verschieden ist und Q_0 enthält, und wegen $S-\tilde{L} \subseteq \tilde{N}^*$ gehört diese zu $\tilde{N}^*$. Daher ist $N=\{Q_0\} \cup (N-\tilde{L}) \subseteq \tilde{N}^*$. Da aber $\tilde{N}^* \subset N^*$ und N^* minimal gewählt war, entsteht ein Widerspruch. Es ist $\tilde{L}$ kein irreduzibler Teil von N^*. Es sei $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ die Menge der Indizes λ_ι für die N_λ^* irreduzibler Teil von S ist. Es ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} N_\lambda^* \subseteq S$ eine analytische Menge aus V, jeder von $\tilde{L}$ verschiedene irreduzible Teil von S liegt in $N \subseteq N^*$, ist also irreduzibler Teil von N^*. Daher ist

$$S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} N_\lambda^* \cup \tilde{L}. \tag{9.11}$$

Da durch Q_0 ein von $\tilde{L}$ verschiedener irreduzibler Teil von S geht und $N_\lambda^* \cap B$ für $\lambda \in \Lambda_0$ leer ist, gilt

$$C = S - (B \cap \tilde{L}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} N_\lambda^*. \tag{9.12}$$

In V ist C analytisch mit der reinen Dimension 2. Da N in H abgeschlossen und C in N enthalten ist, ist C abgeschlossen (in H); also ist C analytisch in H.

i) Die Häufungsmenge der Menge $\tilde{L}_\nu$ sei $\tilde{S}'$ und $C' = V \cap \tilde{S}' - \tilde{L} \cap B$. Es ist $\tilde{S}' \supseteq \tilde{S}$, also $C' \supseteq C$. Da durch jede Umgebung eines beliebigen Punktes von $C' \subseteq V$ unendlich viele $\tilde{L}_\nu$, also auch unendlich viele $\tilde{L}_\nu \cap B$ gehen, ist $C' \subseteq C$; insgesamt folgt $C = C'$. Die Behauptungen 1 bis 4 gelten, w. z. b. w.

Unter gewissen Voraussetzungen ordnet dieser Satz einem Punkt P_0 eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C \subseteq \Sigma(P_0)$ zu. Wie sich später zeigen wird, lassen sich diese Voraussetzungen erfüllen, wenn τ in P_0 streut. Damit ist die in der Einleitung zu Teil III geforderte Zuordnung $P_0 \to C(P_0)$ hergestellt. Nun muß noch, was etwas schwieriger ist, gezeigt werden, daß diese Zuordnung eineindeutig ist. Dies geschieht, indem gezeigt wird, daß v auf $C = C(P_0)$ abgesehen von isolierten Punkten regulär ist. Wegen $C(P_0) \subseteq \Sigma(P_0)$ ist dann $P_0 = v(Q, H)$ auf $C(P_0)$ abgesehen von isolierten Punkten. Also besteht $C(P_0) \cap C(P_1)$ für $P_0 \neq P_1$ höchstens aus isolierten Punkten, die Zuordnung ist also eineindeutig.

Satz 9.2. Streumengensatz (Teil II).

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei meromorph und beiderseits offen.*

2. *bis 7. wie Satz* 9.1 *mit denselben Bezeichnungen.*

8. *Der Durchschnitt $L_\nu \cap (M \cup L)$ enthalte höchstens q Punkte, wobei q nicht von v abhänge.*

Behauptung. *Neben den Aussagen* 1 *bis* 4 *von Satz* 9.1 *gilt:*

5. *Die Teilmenge D von C, in der v singulär ist, hat in H keinen Häufungspunkt.*

6. *Auf $C-D$ verhält sich v bestimmt und wird durch $v(Q,H)$ aus B analytisch in $B\cup(C-D)$ fortgesetzt. Für $Q\in C-D$ ist $v(Q,H)=P_0$.*

Beweis. a) Ist v in einem Punkt $Q^0\in\Sigma(P_0)$ regulär, so ist v in Q^0 bestimmt, und $v(Q,H)$ in einer Umgebung von Q^0 analytisch. Es gibt eine Folge $Q^\nu\in B$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty}Q^\nu=Q^0$, für die $v(Q^\nu)\to P_0$ strebt. Daher ist $v(Q^0,H)=P_0$. Die Behauptung 6 ist bewiesen.

b) Ein Punkt $R\in C$ werde beliebig gewählt. Er liegt in einer Karte $U_\alpha\subset V$ mit $\alpha\in\mathfrak{P}(H)$, wobei $\alpha(0)=R$ sei. Es seien

$$U'_\alpha=\alpha^{-1}(U_\alpha),\qquad C'=\alpha^{-1}(U_\alpha\cap C), \tag{9.13}$$

$$N'=\alpha^{-1}(U_\alpha\cap N),\quad N^{*\prime}=\alpha^{-1}(N^*\cap U_\alpha), \tag{9.14}$$

$$\tilde{L}'=\alpha^{-1}(\tilde{L}\cap U_\alpha),\quad \tilde{L}'_\nu=\alpha^{-1}(\tilde{L}_\nu\cap U_\alpha), \tag{9.15}$$

$$S=C\cup\tilde{L},\qquad S'=\alpha^{-1}(S\cap U_\alpha), \tag{9.16}$$

$$V_1=V-S,\qquad V'_1=\alpha^{-1}(V_1\cap U_\alpha). \tag{9.17}$$

Da die Menge $\tilde{L}'\cup N^{*\prime}\cup\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}\tilde{L}'_\nu$ höchstens abzählbar viele irreduzible Teile enthält, kann man das Koordinatensystem so wählen, daß die Achsen $\{\mathfrak{z}\,|\,z_1=0\}$ und $\{\mathfrak{z}\,|\,z_2=0\}$ mit dieser Menge höchstens abzählbar viele Punkte gemeinsam haben. Man kann $\eta_1>0$ so wählen, daß

$$\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|\leq\eta_1,\ |z_2|\leq\eta_1\}\subset U'_\alpha, \tag{9.18}$$

$$\{\mathfrak{z}\,|\,z_1=0,\ 0<|z_2|\leq\eta_1\}\cap(\tilde{L}'\cup N^{*\prime})=\emptyset \tag{9.19}$$

ist. Nach dem Beweis von Satz 9.1 ist $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}\tilde{L}_\nu\cap V_1$ in jedem Punkt von $\{\mathfrak{z}\,|\,z_1=0,\ 0<|z_2|\leq\eta_1\}$ regulär und hat daher mit diesem punktierten Kreis nur isolierte Punkte gemeinsam. Man kann Zahlen η,η_2 und η_3 finden, so daß gilt:

$$0<\eta_3<\eta_1,\qquad 0<\eta_2-\eta<\eta_2<\eta_2+\eta<\eta_1, \tag{9.20}$$

$$Y=\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|<\eta_3,\ |z_2|<\eta_2\},\qquad \overline{Y}\subset U'_\alpha, \tag{9.21}$$

$$\{\mathfrak{z}\,|\,|z_1|\leq\eta_3,\ ||z_2|-\eta_2|<\eta\}\cap\Big(\tilde{L}'\cup N^{*\prime}\cup\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\tilde{L}'_\nu\Big)=\emptyset,$$

daß im Falle $R\neq Q_0$ außerdem $Q_0\notin\alpha(\overline{Y})$ ist, und daß $Y\cap(\tilde{L}'\cup N^{*\prime})$ außer dem Nullpunkt nur gewöhnliche Punkte enthält, in denen $\tilde{L}'\cup N^{*\prime}$ die Dimension 2 hat. Da der Nullpunkt zu C' gehört, also ein 2-dimensionaler irreduzibler Teil von $N^{*\prime}$ durch den Nullpunkt geht, hat $Y\cap(\tilde{L}'\cup N^{*\prime})$ die reine Dimension 2. Man kann eine Zahl r finden, so daß für jede Zahl c mit $|c|\leq\eta_3$ der Kreis

$$E_c=\{\mathfrak{z}\,|\,z_1=c,\ |z_2|<\eta_2+\eta\} \tag{9.23}$$

in höchstens r Punkten die Menge $\tilde{L}' \cup N^{*'}$ schneidet. Da $\tilde{L}' \cup N^{*'}$ den Kreis E_0 nur im Nullpunkt schneidet, geht jeder irreduzible Teil von $Y \cap (\tilde{L}' \cup N^{*})$ durch den Nullpunkt. Es hat $Y \cap (\tilde{L}' \cup N^{*})$ höchstens r irreduzible Teile.

Zu jedem Punkt $\mathfrak{c} \in Y \cap S'$ lassen sich zwei Zahlen $\delta_{\mathfrak{c}}, \eta_{\mathfrak{c}}$ bestimmen, so daß mit $\mathfrak{c} = (c_1, c_2)$ gilt:

$$0 < \delta_{\mathfrak{c}} \leq \eta_1 - |c_1|, \qquad 0 < \eta_{\mathfrak{c}} \leq \eta_2 - |c_2|, \tag{9.24}$$

$$Y(\mathfrak{c}) = \{\mathfrak{z} \mid |z_1 - c_1| < \delta_{\mathfrak{c}},\ |z_2 - c_2| < \eta_{\mathfrak{c}}\} \subsetneqq Y, \tag{9.25}$$

$$\{\mathfrak{z} \mid z_1 = c_1,\ 0 < |z_2 - c_2| \leq \eta_{\mathfrak{c}}\} \cap (N^{*'} \cup \tilde{L}') = \mathfrak{o}, \tag{9.26}$$

$$\{\mathfrak{z} \mid |z_1 - c_1| \leq \delta_{\mathfrak{c}},\ |z_2 - c_2| = \eta_{\mathfrak{c}}\} \cap \Big(N^{*'} \cup \tilde{L}' \cup \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}'_\nu\Big) = \mathfrak{o}, \tag{9.27}$$

$$0 \notin \overline{Y}(\mathfrak{c}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{c} \neq 0, \quad \mathfrak{c} \in Y \cap S', \tag{9.28}$$

$$Y(0) = Y \quad \text{also} \quad \delta_0 = \eta_1 \quad \text{und} \quad \eta_0 = \eta_2, \tag{9.29}$$

$$\overline{Y}(\mathfrak{c}) \cap N^{*'} = \overline{Y}(\mathfrak{c}) \cap C' \quad \text{für} \quad \mathfrak{c} \in C', \quad \mathfrak{c} \neq 0\ [5]). \tag{9.30}$$

Für alle c mit $|c - c_1| \leq \delta_{\mathfrak{c}}$ ist wegen (9.27) der Durchschnitt $\tilde{L}'_\nu \cap E_c \cap Y(\mathfrak{c}) \neq \mathfrak{o}$, falls nur $\tilde{L}'_\nu \cap Y(\mathfrak{c})$ nicht leer ist.

c) Ein Punkt $\mathfrak{c} \in Y \cap S'$ gehöre dann und nur dann zur Menge $\mathfrak{Q}$, wenn gilt:

„Es gibt eine Nummer $\nu_{\mathfrak{c}}$, so daß $\mathfrak{c} = (c_1, c_2) \in \tilde{L}'_\nu$ für alle $\nu \geq \nu_{\mathfrak{c}}$ ist, falls nur $\tilde{L}'_\nu \cap Y(\mathfrak{c}) \cap E_{c_1} \neq \mathfrak{o}$ ist."

Nun wird behauptet, daß $\mathfrak{Q}$ aus höchstens $r\,q+1$ Punkten besteht.

Angenommen auf einem irreduziblen Teil S'_0 von $Y \cap S'$ liegen $q+1$ verschiedene Punkte $\mathfrak{z}_\varrho \in \mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{z}_\varrho \neq 0$ $(\varrho = 1, \ldots, q+1)$. Da $S'_0 - \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = 0\}$ eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2 aus Y ist, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, gibt es eine zweimal stetigdifferenzierbare Kurve $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(t),\ 0 \leq t \leq 1\} \subset S'_0 - \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = 0\}$, für die $\mathfrak{z}'(t) \neq 0$ für $0 \leq t \leq 1$ und $\mathfrak{z}(t_\varrho) = \mathfrak{z}_\varrho = (a_\varrho, b_\varrho)$ für $\varrho = 1, \ldots, q+1$ mit $0 < t_1 < \cdots < t_{q+1} < 1$ gilt.

Die komplexe Normale[10]) auf $S'_0 - \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = 0\}$ im Punkt $\mathfrak{z}(t)$ sei $\mathfrak{n}(t)$. Sie ist stetigdifferenzierbar in $0 \leq t \leq 1$. Nun kann man eine Zahl $\varepsilon > 0$ bestimmen, so daß gilt

1. *Für jeden Parameterwert $0 \leq t \leq 1$ sei*

$$X(t) = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(t) + u\,\mathfrak{n}(t) \ \textit{mit}\ |u| < \varepsilon\}, \tag{9.31}$$

---

[9]) Durch $\mathfrak{c} \in C'$ geht nämlich ein irreduzibler Teil von $\tilde{L}' \cup N^{*'}$; da $\mathfrak{c}$ gewöhnlicher Punkt von $\tilde{L}' \cup N^{*'}$ ist, geht auch nur ein solcher irreduzibler Teil durch $\mathfrak{c} \neq 0$, der dann auch ein irreduzibler Teil von C' ist. Daher stimmen $\tilde{L}' \cup N^{*'}$ und C' in einer Umgebung von $\mathfrak{c}$ überein.

[10]) Ist $\mathfrak{z}(u)$ eine örtliche Parameterdarstellung von S'_0, so ist

$$\mathfrak{n} = \left(-\frac{\overline{z}'_2(u)}{|\mathfrak{z}'(u)|}, \frac{\overline{z}'_1(u)}{|\mathfrak{z}'(u)|}\right)$$

die komplexe Normale in $\mathfrak{z}(u)$.

mit

$$\overline{X}(t) \subset Y \tag{9.32}$$

und $\overline{X}(t) \cap S' = \overline{X}(t) \cap S_0'$ *bestehe nur aus dem einen Punkt* $\mathfrak{z}(t)$.

2. *Es seien*

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(t) + u\,\mathfrak{n}(t) \quad \textit{mit} \quad |u| = \varepsilon \quad \textit{und} \quad 0 \leq t \leq 1\} \subset V_1', \tag{9.33}$$

$$X = \bigcup_{0<t<1} X(t) \subset Y. \tag{9.34}$$

3. *Es gelte* $\overline{X}(t_\varrho) \subset Y(\mathfrak{z}_\varrho)$ *für* $\varrho = 1, \ldots, q+1$.

Da $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}_\nu' \cap V_1'$ in V_1' analytisch und $\mathfrak{S} \subset V_1'$ kompakt ist, gehen nur endlich viele $\tilde{L}_\nu'$ durch $\mathfrak{S}$, d.h., es gibt eine Nummer ν^*, so daß $\tilde{L}_\nu' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ für alle $\nu \geq \nu^*$ ist. Weil Y ein Polyzylinder ist, gibt es eine in Y analytische Funktion f_ν, deren Nullstellen gerade $Y \cap \tilde{L}_\nu'$ ergeben. Für $\nu \geq \nu^*$ ist $f_\nu(\mathfrak{z}) \neq 0$ auf $\mathfrak{S}$ also $f_\nu(\mathfrak{z}(t) + u\,\mathfrak{n}(t)) = g_\nu(u, t) \neq \emptyset$ für $|u| = \varepsilon$ und $0 \leq t \leq 1$. Bei festem t in $0 \leq t \leq 1$ ist $g_\nu(u, t)$ analytisch für $|u| \leq \varepsilon$. Die Anzahl der Nullstellen u in $|u| < \varepsilon$ der Funktion $g_\nu(u, t)$ sei $n_\nu(t)$. Dann ist

$$n_\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\varepsilon} \frac{g_{\nu u}(u, t)}{g_\nu(u, t)}\, du \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{9.35}$$

Da das Integral in $0 \leq t \leq 1$ stetig und $n_\nu(t)$ ganzzahlig ist, ist $n_\nu(t)$ konstant. Wenn $X_\nu(t) \cap \tilde{L}_\nu \neq \emptyset$ für ein t in $0 \leq t \leq 1$ ist, so für jedes t in $0 \leq t \leq 1$, falls nur $\nu \geq \nu^*$ ist.

Weil $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}_\nu' \cap V_1$ in $\mathfrak{z}_1 \in S'$ singulär ist, gibt es eine Nummer $\mu > \operatorname{Max}(\nu^*, \nu_{\mathfrak{z}_1}, \ldots, \nu_{\mathfrak{z}_{q+1}})$, für die $\tilde{L}_\mu' \cap Y(\mathfrak{z}_1) \neq \emptyset$ also auch, wie (9.27) zeigt, $\tilde{L}_\mu' \cap Y(\mathfrak{z}_1) \cap E_{a_1} \neq \emptyset$ ist. Wegen $\mathfrak{z}_1 \in \mathfrak{Q}$ ist $\mathfrak{z}_1$ in $\tilde{L}_\mu'$ enthalten. Es ist $\mathfrak{z}_1 \in \tilde{L}_\mu' \cap X(t_1) \neq \emptyset$, also auch $\tilde{L}_\mu' \cap X(t_\varrho) \subseteq \tilde{L}_\mu' \cap Y(\mathfrak{z}_\varrho)$ für $\varrho = 1, \ldots, q+1$ nicht leer. Daher ist $\tilde{L}_\mu' \cap Y(\mathfrak{z}_\varrho) \cap E_{a_\varrho} \neq \emptyset$ für $\varrho = 1, \ldots, q+1$. Wegen $\mathfrak{z}_\varrho \in \mathfrak{Q}$ und $\mu > \nu_{\mathfrak{z}_\varrho}$ ist $\mathfrak{z}_\varrho \in \tilde{L}_\mu'$ für $\varrho = 1, \ldots, q+1$. Daher besteht $\tilde{L}_\mu' \cap S'$ aus mindestens $q+1$ verschiedenen Punkten. Andererseits enthält nach Voraussetzung $L_\mu \cap (M \cup L)$ höchstens q Punkte. Folglich besteht $\alpha^{-1}\tau(L_\mu \cap (M \cup L), L_\mu)$ aus höchstens q Punkten. Es ist

$$\tilde{L}_\mu' \cap S' \subseteq \alpha^{-1}(\tilde{L}_\mu \cap (N \cup \tilde{L})) \subseteq \alpha^{-1}\tau(L_\mu \cap (M \cup L), L_\mu). \tag{9.36}$$

woraus der Widerspruch $q+1 \leq q$ folgt.

Auf jedem der höchstens r irreduziblen Teile von $Y \cap S'$ liegen höchstens q vom Nullpunkt verschiedene Punkte von $\mathfrak{Q}$. Daher enthält $\mathfrak{Q} \subseteq S' \cap Y$ höchstens $r\,q+1$ Punkte.

d) Da auf $\{\mathfrak{z} \mid z_1 = 0, 0 < |z_2| < \eta_2 + \eta\}$ kein Punkt von $\tilde{L}' \cup N^{*\prime}$ liegt, gibt es eine Zahl η_4 mit $0 < \eta_4 < \eta_3$, so daß auf

$$Y_1 = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < \eta_4, \ |z_2| < \eta_2\} \tag{9.37}$$

und seinem Rand kein von Null verschiedener Punkt von $\mathfrak{Q}$ liegt.

e) Für $\mathfrak{c}=(c_1, c_2)\in S'$ sei $Y(\mathfrak{c})\cap E_{c_1}=\mathfrak{E}'(\mathfrak{c})$. Die Abbildung v streut längs $\mathfrak{E}(\mathfrak{c})=\alpha(\mathfrak{E}'(\mathfrak{c}))$ gemäß Voraussetzung 1 nicht; da die gegebene Modifikation beiderseits offen ist, verhält sich die Abbildung v in $\alpha(\mathfrak{c})$ längs $\mathfrak{E}(\mathfrak{c})$ bestimmt. Es ist also $\mathfrak{E}(\mathfrak{c})=v(\mathfrak{E}(\mathfrak{c}), \mathfrak{E}(\mathfrak{c}))$ eine komplexe Kurve mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{c})\cap M=\mathfrak{E}(\mathfrak{c})\cap M$, die M in genau einem Punkt schneide, und es wird behauptet, daß P_0 dieser Punkt ist, falls nur $\mathfrak{c}$ zu $Y\cap C'-\mathfrak{Q}$ gehört.

Da nämlich $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\tilde{L}'_\nu\cap V'_1$ in $\mathfrak{c}\in Y\cap C'$ singulär ist, gibt es unendlich viele Nummern ν, für die $\tilde{L}'_\nu\cap Y(\mathfrak{c})$ also auch $\tilde{L}'_\nu\cap\mathfrak{E}(\mathfrak{c})$ nicht leer ist. Wenn außerdem $\mathfrak{c}\notin\mathfrak{Q}$ ist, so gehen davon unendlich viele $\tilde{L}'_\nu$ durch $\mathfrak{E}(\mathfrak{c})-\{\mathfrak{c}\}$ hindurch. Es gibt eine Punktfolge $Q^\nu\in\tilde{L}'_{\mu_\nu}\cap\mathfrak{E}(\mathfrak{c})$ mit $Q^\nu\in B$ und $\mu_\nu>\mu_{\nu-1}$. Auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{c})-\{\mathfrak{c}\}$ haben die Punkte $\alpha^{-1}(Q^\nu)=\mathfrak{c}_\nu$ keinen Häufungspunkt, aber auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{c})$. Daher strebt $Q^\nu=\alpha(\mathfrak{c}_\nu)\to\alpha(\mathfrak{c})=Q\in C$. Es strebt

$$P^\nu=v(Q^\nu)=v\big(Q^\nu, \mathfrak{E}(\mathfrak{c})\big)\to P\in M \quad \text{für} \quad \nu\to\infty. \tag{9.38}$$

Es ist $P^\nu\in L_{\mu_\nu}$, also dringen in jede Umgebung von P unendlich viele L_ν ein. Nach Voraussetzung 6 ist $P\in\bar{L}$, woraus $P\in M\cap\bar{L}=\{P_0\}$ also $P=P_0$ folgt.

f) Nun wird behauptet, daß die Abbildung v sich in jedem Punkt $R^*\neq R$ aus $\alpha(Y\cap C'-\mathfrak{Q})$ bestimmt verhält.

Angenommen v verhält sich in $R^*=\alpha(\mathfrak{c}^*)$ mit $\mathfrak{c}^*\in Y\cap C'-\mathfrak{Q}$ nicht bestimmt, so streut v in R^*, da die Modifikation $\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ offen ist. Es ist $R^*\in C\subseteq\Sigma(P_0)$, also $P_0\in\Sigma(R^*)$ nach Satz 1.2. Ein Punkt $P^*\neq P_0$ gehört zu $\Sigma(R^*)$, da v in R^* streut. Man kann eine Folge $Q^\nu\in B$ mit $\lim_{\nu\to\infty}Q^\nu=R^*$ finden, so daß $P^\nu=v(Q^\nu)\to P^*$ für $\nu\to\infty$ strebt. Es seien $\alpha^{-1}(R^*)=\mathfrak{c}^*=(c_1^*, c_2^*)$ und $\alpha^{-1}(Q^\nu)=\mathfrak{c}^\nu=(c_1^\nu, c_2^\nu)$. Wären unendlich viele $\mathfrak{c}^\nu$ in $\mathfrak{E}'(\mathfrak{c}^*)$ gelegen, so gäbe es eine Teilfolge $Q^{\nu_\mu}\in\mathfrak{E}'(\mathfrak{c}^*)$. Da $\mathfrak{c}^*\in Y\cap C'-\mathfrak{Q}$ ist, strebt die Folge $P^{\nu_\mu}=v(Q^{\nu_\mu})\to P_0$ für $\nu\to\infty$, was falsch ist. Daher kann man $0<|c_1^\nu-c_1^*|<|c_1^{\nu-1}-c_1^*|$ für $\nu=2, 3, \ldots$ und $c_1^\nu\neq 0$ annehmen. Außerdem kann man $\mathfrak{c}^\nu\in Y(\mathfrak{c}^*)$ annehmen. Es werde $\mathfrak{E}'_\nu=Y(\mathfrak{c}^*)\cap E_{c_1^\nu}$ gesetzt. Die komplexe Kurve $\mathfrak{E}_\nu=\alpha(\mathfrak{E}'_\nu)$ schneidet N in endlich vielen Punkten $Q_{\nu\lambda}=\alpha(\mathfrak{c}_{\nu\lambda})$ mit $\mathfrak{c}_{\nu\lambda}=(c_1^\nu, d_{\nu\lambda})$ für $\lambda=1, \ldots, l_\nu$. Es ist $\bar{\mathfrak{E}}_\nu\cap N=\mathfrak{E}_\nu\cap N$. Da die Menge $\mathfrak{Q}$ nur endlich viele Punkte enthält, kann man annehmen, daß $\mathfrak{c}_{\nu\lambda}$ nicht zu $\mathfrak{Q}$ gehört. Gemäß (9.30) ist $\mathfrak{c}_{\nu\lambda}\in C'\cap Y(\mathfrak{c}^*)-\mathfrak{Q}$; nach e) verhält sich die Abbildung v in $Q_{\nu\lambda}$ längs $\mathfrak{E}(\mathfrak{c}_{\nu\lambda})$ also auch längs $\mathfrak{E}_\nu$ bestimmt und es strebt $v(Q)\to P_0$ für $Q\to Q_{\nu\lambda}$, wenn $Q\in\mathfrak{E}_\nu\cap B$ ist. Es ist

$$\mathfrak{E}_\nu=v(\mathfrak{E}_\nu, \mathfrak{E}_\nu)=v(\mathfrak{E}_\nu\cap B)\cup\{P_0\}, \tag{9.39}$$

$$\mathfrak{E}_\nu\cap\mathfrak{E}_\mu=\emptyset \quad \text{für} \quad \mu\neq\nu, \tag{9.40}$$

$$Q^\nu\in\mathfrak{E}_\nu\cap B, \quad P^\nu\in\mathfrak{E}_\nu\cap A. \tag{9.41}$$

Die Menge

$$K = v\alpha(\{\vartheta \,|\, |z_1 - c_1^*| \leq \delta_{c^*},\ |z_2 - c_2^*| = \eta_{c^*}\}) \subset A$$

ist kompakt und enthält $\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{E}_\nu$. Nun kann man eine offene Umgebung W von P^* wählen, deren abgeschlossene Hülle $\overline{W}$ kompakt ist und keinen Punkt mit $K \cup \overline{L}$ gemeinsam hat. Bei hinreichend kleiner Umgebung W wird $M \cap W$ durch eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge M^* aus W umfaßt, wobei M^* (bei festem W) minimal gewählt sei.

Es ist $\mathfrak{E}_\nu$ in W abgeschlossen und $W \cap \mathfrak{E}_\nu$ in A enthalten. Daher ist $W \cap \mathfrak{E}_\nu$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus W. Wegen $c^* \in Y \cap C' - \mathfrak{Q}$ ist $\mathfrak{E}(c^*) \cap M = \overline{\mathfrak{E}}(c^*) \cap M = \{P_0\}$ gemäß e). Da also $P^* \notin \overline{\mathfrak{E}}(c^*)$ ist, kann man W so klein wählen, daß $\overline{W} \cap \overline{\mathfrak{E}}(c^*)$ leer ist.

Eine Karte W_β mit $\beta \subseteqq \mathfrak{P}(G)$ kann man so wählen, daß gilt:

1. Durch β wird $W'_\beta = \{\mathfrak{w} \,|\, |w_1| < 1,\ |w_2| < 1\}$ pseudokonform auf $W_\beta \subseteqq W$ abgebildet, so daß $\beta(0) = P^*$ ist.

2. Für zwei Zahlen ε_1 und ε_2 in $0 < \varepsilon_1 < 1,\ 0 < \varepsilon_2 < 1$ trifft das Bild $\mathfrak{W}_1 = \beta(\mathfrak{W}'_1)$ von

$$\mathfrak{W}'_1 = \{\mathfrak{w} \,|\, |w_1| \leq \varepsilon_1,\ |w_2| = \varepsilon_2\} \tag{9.42}$$

die Menge M^* nicht.

3. Es ist

$$\beta(\{\mathfrak{w} \,|\, w_1 = 0,\ 0 < |w_2| < \varepsilon_2\}) \cap M^* = \emptyset. \tag{9.43}$$

4. Es seien

$$W'_1 = \{\mathfrak{w} \,|\, |w_1| < \varepsilon_1,\ |w_2| < \varepsilon_2\}, \tag{9.44}$$

$$W_1 = \beta(W'_1) \quad \textit{mit} \quad \overline{W}_1 \subset W, \tag{9.45}$$

$$\mathfrak{K}' = \{\mathfrak{w} \,|\, w_1 = 0,\ |w_2| < \varepsilon_2\}, \tag{9.46}$$

$$\mathfrak{K} = \beta(\mathfrak{K}') \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{K} \cap M = \overline{\mathfrak{K}} \cap M = \{P^*\}. \tag{9.47}$$

Da $\overline{\mathfrak{E}}(c^*) \cap W = \emptyset$ ist, hat jeder Punkt von $W \cap A$ eine Umgebung, in die nur endlich viele $\mathfrak{E}_\nu$ eindringen. Also ist $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{E}_\nu \cap W \cap A$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $W \cap A$ oder leer. Weil $P^\nu \to P^* \in W_1$ für $\nu \to \infty$ strebt, ist $P^\nu \in W_1$ für alle $\nu \geq \varrho_0$; weil außerdem $P^\nu \in \mathfrak{E}_\nu$ ist, wird $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{E}_\nu \cap W \cap A$ in P^* singulär. Nach Hilfssatz 8.8 gibt es eine Nummer $\varrho_1 \geq \varrho_0$, so daß $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{E}_\nu \neq \emptyset$ für $\nu \geq \varrho_1$ ist. Die Abbildung τ verhält sich in P_0 längs $\mathfrak{K}$ bestimmt und bildet die komplexe Kurve $\mathfrak{K}$ konform auf eine komplexe Kurve $\tilde{\mathfrak{K}}$ aus H ab, für die $\tilde{\mathfrak{K}} \cap N = \overline{\tilde{\mathfrak{K}}} \cap N = \{R_1^*\}$ und $\overline{\tilde{\mathfrak{K}}} \cap \overline{L} \cap B = \emptyset$ ist. Es gibt eine Punktfolge $P_\nu^* \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{E}_\nu \subseteqq W \cap \mathfrak{E}_\nu \subseteqq A$ (mit $\nu \geq \varrho_1$), für die $\lim_{\nu \to \infty} P_\nu^* = P^* \in M$ ist. Es strebt $Q_\nu^* = \tau(P_\nu^*)$ gegen $\tau(P^*, \mathfrak{K}) = R_1^* \in N$. Andererseits ist $Q_\nu^* \in \tilde{\mathfrak{E}}_\nu$ also $\alpha^{-1}(Q_\nu^*) = c_\nu^* = (c_1^\nu, d_\nu^*)$ mit $|d_\nu^* - c_2^*| \leq \eta_{c^*}$. Es strebt $c_\nu^* \to (c_1^*, d^*) = \alpha^{-1}(R_1^*) \in \overline{Y}(c^*) \cap N' = \overline{Y}(c^*) \cap C'$, wobei $|d^* - c_2^*| \leq \eta_{c^*}$ ist. Daher ist

$$(c_1^*, d^*) = \alpha^{-1}(R_1^*) \in \overline{Y}(c^*) \cap \overline{E}_{c_1^*} \cap C'. \tag{9.48}$$

Gemäß (9.26) ist $d^* = c_2^*$ also $\alpha^{-1}(R_1^*) = c^*$ oder $R_1^* = R^*$. Es gilt also:

1°. Die in V analytische Menge $S = C \cap \tilde{L}$ der reinen Dimension 2 wird von der komplexen Kurve $\tilde{\mathfrak{K}} \cap V$ in einem und nur einem Punkt nämlich in R^* geschnitten und dieser ist ein gewöhnlicher Punkt von S, da $Q_0 \notin Y - \{R\}$ also $Q_0 \neq R^*$ ist.

Es sei $\mathfrak{J}$ die Menge der Indizes ν, für die $c^* \notin \tilde{L}'_\nu$ und $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) \neq \emptyset$ ist. Angenommen $\mathfrak{J}$ ist leer oder endlich. Dann gibt es eine Nummer ν_{c^*}, so daß entweder $c^* \in \tilde{L}'_\nu$ oder $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) = \emptyset$ ist für $\nu \geq \nu_{c^*}$. Wenn also $\nu \geq \nu_{c^*}$ und $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) \cap E_{c_1^*} \neq \emptyset$ ist, so ist erst recht $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) \neq \emptyset$, also $c^* \in \tilde{L}'_\nu$. Daher gehört $c^* \in Y \cap C' - \mathfrak{Q} \subseteq Y \cap S'$ auch zur Menge $\mathfrak{Q}$, was falsch ist. Die Menge $\mathfrak{J}$ ist unendlich.

Wegen (9.26) geht jeder irreduzible Teil von $(N^{*\prime} \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*)$ durch c^*. Da $c^* \neq 0$ gewöhnlicher Punkt von $N^{*\prime} \cup \tilde{L}'$ ist, geht nur ein irreduzibler Teil von $(N^{*\prime} \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*)$ durch c^*. Daher ist $(N^{*\prime} \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*) = (C' \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*) = S' \cap Y(c^*)$ irreduzibel. Da von der in V_1' analytischen Menge $V_1' \cap \bigcup_{\nu \in \mathfrak{J}} \tilde{L}'_\nu$ unendlich viele irreduzible Teile $\tilde{L}'_\nu \cap V_1'$ in $\overline{Y}(c^*)$ eindringen, ist $V_1' \cap \bigcup_{\nu \in \mathfrak{J}} \tilde{L}'_\nu$ in einem Punkt von $Y(c^*) - V_1' = Y(c^*) \cap S'$ singulär. Da $Y(c^*) \cap S'$ irreduzibel ist, wird $V_1' \cap \bigcup_{\nu \in \mathfrak{J}} \tilde{L}'_\nu$ in jedem Punkt von $Y(c^*) \cap S'$, insbesondere in c^* singulär. Es gibt eine Folge $c_{\mu_\nu} \in \tilde{L}'_{\mu_\nu} \cap V_1'$, die gegen c^* konvergiert. Es gilt:

2°. In V sind abzählbar viele analytische Mengen $\tilde{L}_{\mu_\nu}$ der reinen Dimension 2 gegeben. Der Durchschnitt $\tilde{L}_{\mu_\nu} \cap \tilde{L}_{\mu_\lambda}$ besteht für $\nu \neq \lambda$ nur aus isolierten Punkten. In $V_1 = V - S$ ist $V_1 \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}_{\mu_\nu}$ analytisch.

3°. Es gibt eine Folge $Q_{\mu_\nu} = \alpha(c_{\mu_\nu}) \in \tilde{L}_{\mu_\nu} \cap V_1$, die für $\nu \to \infty$ gegen $R^* = \alpha(c^*)$ strebt.

Nach Hilfssatz 8.4 ist $\tilde{\mathfrak{K}} \cap \tilde{L}_{\mu_\nu} \neq \emptyset$ für alle $\nu \geq \varrho_2$. Daher gibt es eine Folge $\hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{\mathfrak{K}} \cap \tilde{L}_{\mu_\nu}$. Diese hat auf der kompakten Menge $\overline{\tilde{\mathfrak{K}}}$ einen Häufungspunkt $\hat{Q}$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt

$$\hat{P}_{\mu_\nu} = v(\hat{Q}_{\mu_\nu}, \tilde{\mathfrak{K}}) \to v(\hat{Q}, \tilde{\mathfrak{K}}) = \hat{P} \in \tilde{\mathfrak{K}} \quad \text{für} \quad \nu \to \infty. \tag{9.49}$$

Angenommen es ist $\hat{P} \in A$. Dann ist $\hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{L}_{\mu_\nu} \cap B$ für $\nu \geq \varrho_3$, also $\hat{P}_{\mu_\nu} \in L_{\mu_\nu}$. Dann gehört $\hat{P}$ der Häufungsmenge der Folge L_ν an. Also ist $\hat{P} \in \overline{\mathfrak{K}} \cap L \subseteq \overline{W} \cap L = \emptyset$, was falsch ist. Daher ist $\hat{P} \in \overline{\mathfrak{K}} \cap M$, also $\hat{P} = P^*$ und folglich $\hat{Q} = R^*$, wie oben bewiesen wurde.

Wegen $\mu_\nu \in \mathfrak{J}$ ist $R^* \notin \tilde{L}_{\mu_\nu}$, woraus sich

$$\hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{\mathfrak{K}} \cap (\tilde{L}_{\mu_\nu} - R^*) \subseteq \tilde{\mathfrak{K}} - \{R^*\} = \tilde{\mathfrak{K}} - \tilde{\mathfrak{K}} \cap N = \tilde{\mathfrak{K}} \cap B \tag{9.50}$$

ergibt. Es ist $\hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{L}_{\mu_\nu} \cap B$, also $\hat{P}_{\mu_\nu} \in L_{\mu_\nu} \cap A$ und $P^* = \lim_{\nu \to \infty} \hat{P}_{\mu_\nu} \in \overline{L}$, da $\overline{L}$ die Häufungsmenge der Mengen L_{μ_ν} ist. Man erhält $P^* \in \overline{L} \cap W = \emptyset$, womit der gewünschte Widerspruch gewonnen ist.

In jedem Punkt von $\alpha(Y \cap C' - \mathfrak{Q})$ verhält sich die Abbildung v regulär. Die Menge D der singulären Punkte von v auf C hat keinen Häufungspunkt in C und, weil C abgeschlossen ist, auch keinen in H. Die Behauptungen haben sich als richtig erwiesen, w. z. b. w.

Wie nun gezeigt wird, lassen sich die Voraussetzungen der Sätze 9.1 und 9.2 in jedem Punkt, in dem τ singulär ist, erfüllen:

Satz 9.3. Hauptsatz über meromorphe Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei beiderseits offen und meromorph. Die Abbildung* τ *sei im Punkt* $P_0 \in M$ *singulär.*

Behauptung. *Die Streumenge* $\Sigma(P_0)$ *enthält eine rein 2-dimensionale analytische Menge* C *aus* H. *Die Menge* D *der singulären Punkte* $Q \in C$ *von* v *hat in* H *keinen Häufungspunkt. Für* $Q \in C - D$ *ist* $v(Q, H) = P_0$; *in der offenen Menge* $B \cup (C - D)$ *ist* $v(Q, H)$ *analytisch.*

Beweis. Man kann eine offene Umgebung U_1 von M so wählen, daß M in einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge M^* aus U_1 und N in einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge $V_1^* = \tau(U_1 \cap A) \cup N$ enthalten sind. In U_1 ist eine Karte U_α mit $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ enthalten, so daß mit zwei Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in $0 < \varepsilon_1 < 1$, $0 < \varepsilon_2 < 1$ gilt:

a) Durch α wird der Polyzylinder $U'_\alpha = \{\mathfrak{z} \,|\, |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ pseudokonform auf $U_\alpha \subset U_1$ abgebildet, wobei $P_0 = \alpha(0)$ ist.

b) Setzt man

$$U'_2 = \{\mathfrak{z} \,|\, |z_1| < \varepsilon_1, |z_2| < \varepsilon_2\}, \qquad U_2 = \alpha(U'_2), \tag{9.51}$$

$$\mathfrak{R} = \{\mathfrak{z} \,|\, |z_1| \leq \varepsilon_1, |z_2| = \varepsilon_2\}, \qquad \mathfrak{R} = \alpha(\mathfrak{R}'), \tag{9.52}$$

$$L' = \{\mathfrak{z} \,|\, z_1 = 0, |z_2| < \varepsilon_2\}, \qquad L = \alpha(L'), \tag{9.53}$$

so gilt

$$\mathfrak{R} \cap M^* = \emptyset, \quad \overline{U}_2 \subset U_1, \quad L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}. \tag{9.54}$$

c) Es gibt eine offene Umgebung $U \subset U_1$ von M, so daß

$$U \supseteq U_2, \qquad U \cap \mathfrak{R} = \emptyset \tag{9.55}$$

ist. Die zusammenhängende komplexe Kurve $L \subset U$ ist in U abgeschlossen. Es ist $\overline{L}$ kompakt. In P_0 verhält sich die Abbildung τ längs L bestimmt. Es werde $\tilde{L} = \tau(L, L)$ und $Q_0 = \tau(P_0, L)$ gesetzt.

Da die Abbildung τ in P_0 singulär und die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ offen ist, streut nach Satz 2.9 die Abbildung τ in P_0. Die Streumenge $\Sigma(P_0)$ enthält einen Punkt $Q^* \neq Q_0$. Eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} Q^\nu = Q^*$ existiert. Dabei kann man $P^\nu \in U_2$ annehmen. Es strebt $c^\nu = (c_1^\nu, c_2^\nu) = \alpha^{-1}(P^\nu) \to \alpha^{-1}(P_0) = 0$ für $\nu \to \infty$. Wäre für eine Teilfolge $c_1^{\mu_\nu} = 0$, so wäre $P^{\mu_\nu} \in L$ und es würde $Q^{\mu_\nu} = \tau(P^{\mu_\nu}, L) \to \tau(P_0, L) = Q_0$ für $\nu \to \infty$ streben, was falsch

ist. Daher kann man $c_1^\nu \neq 0$ und $|c_1^\nu| > |c_1^{\nu-1}|$ annehmen. Setzt man

$$L'_\nu = \{\mathfrak{z} \mid z_1 = c_1^\nu,\ |z_2| < \varepsilon_2\}, \tag{9.56}$$

$$L_\nu = \alpha(L'_\nu), \tag{9.57}$$

so schneidet L_ν wegen $\mathfrak{N} \cap M^* = \emptyset$ die Menge M^* also auch M in höchstens q Punkten, wobei q nicht von ν abhängt. Die komplexen Kurven L_ν sind zusammenhängend und in U abgeschlossen. In jedem Punkt von $L_\nu \cap M$ verhält sich die Abbildung τ bestimmt. Es ist $L_\nu \cap M = \overline{L}_\nu \cap M$. Es sei $\tilde{L}_\nu = \tau(L_\nu, L_\nu)$. Es ist

$$L_\nu \cap L_\mu = L_\nu \cap L = \emptyset \quad \text{für} \quad \nu \neq \mu. \tag{9.58}$$

Die Häufungsmenge der Mengen $\tilde{L}_\nu \cap B$ sei $\tilde{S}$; es werden $V = \tau(U \cap A) \cup N$ und $C = \tilde{S} \cap V - \tilde{L} \cap B$ gesetzt. Da $Q^\nu \in \tau(L_\nu \cap A) = \tilde{L}_\nu \cap B$ ist, gehört $Q^* = \lim_{\nu \to \infty} Q^\nu$ der Menge $\tilde{S}$ an. Weil $Q^* \in N$ von Q_0 verschieden ist, enthält $C - \{Q_0\}$ den Punkt Q^*, also ist $C - \{Q_0\}$ nicht leer. Da $c_1^\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$ strebt, ist Voraussetzung 6 von Satz 9.1 erfüllt. Da $V \subset V_1^*$ ist, läßt sich auch Voraussetzung 7 von Satz 9.1 erfüllen. Alle Voraussetzungen der Sätze 9.1 und 9.2 sind erfüllt, woraus unmittelbar die Behauptung folgt, w. z. b. w.

Der Hauptsatz über meromorphe Modifikationen gibt das Hilfsmittel, das die Erzeugung beiderseits offener meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse ermöglichen wird. Er stellt das Kernstück der ganzen Arbeit dar. Die Aussage des Hauptsatzes wird klarer, wenn man Mannigfaltigkeiten G und H mit abzählbarer Basis der offenen Mengen betrachtet. Dann enthalten M und N höchstens abzählbar viele verschiedene irreduzible analytische Mengen der Dimension 2, also sind die Abbildungen τ und v höchstens in abzählbar vielen Punkten singulär. Genauer gilt:

Satz 9.4. Hauptsatz über meromorphe Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei beiderseits offen und meromorph. Die Mannigfaltigkeit* H *habe eine abzählbare Basis der offenen Mengen.*

Behauptung. *Die Menge* M_0 *der singulären Punkte der Abbildung* τ *hat in* G *keinen Häufungspunkt. Zu jedem Punkt* $P_0 \in M_0$ *gibt es eine 2-dimensionale analytische Menge* $C = C(P_0)$ *aus* H, *die in* $\Sigma(P_0)$ *enthalten ist, so daß die Menge* $D = D(P_0)$ *der singulären Punkte* $Q \in C$ *der Abbildung* v *keinen Häufungspunkt in* H *hat. Für* $Q \in C - D$ *ist* $v(Q, H) = P_0$; *in der offenen Menge* $B \cup (C - D)$ *ist* $v(Q, H)$ *analytisch.*

Beweis. Es braucht nur noch bewiesen zu werden, daß M_0 keinen Häufungspunkt hat. Es gibt eine offene Umgebung V von N und eine in V analytische Menge N^* mit $\dim N^* \leq 2$, die N umfaßt. Da V eine abzählbare Basis der offenen Mengen hat, besteht N^* aus höchstens abzählbar vielen irreduziblen Teilen. Also liegen in N höchstens abzählbar viele irreduzible

analytische Mengen der Dimension 2 aus V, und da N abgeschlossen ist, ist jede in V analytische Teilmenge von N auch in H analytisch.

Die Menge der Punkte $Q \in N$, in denen v singulär ist, sei N_0. Jedem Punkt $P_0 \in M_0$ ist nach Satz 9.3 eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C(P_0) \subseteqq \Sigma(P_0)$ aus H zugeordnet. Es hat $C(P_0) \cap N_0 = D(P_0)$ keinen Häufungspunkt in H und auf $B \cup C(P_0) - D(P_0)$ ist $v(Q, H)$ analytisch, wobei $v(Q, H) = P_0$ für $Q \in C(P_0) - D(P_0)$ gilt. Für $P_0 \neq P_1$ mit $P_0 \in M_0$ und $P_1 \in M_0$ ist also

$$C(P_0) \cap C(P_1) \subseteqq D(P_0) \cap D(P_1). \tag{9.59}$$

Daher haben $C(P_0)$ und $C(P_1)$ keinen irreduziblen Teil gemeinsam. Da N höchstens abzählbar viele verschiedene irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 enthält, hat M_0 höchstens abzählbar viele Punkte.

Angenommen R ist ein Häufungspunkt von M_0. Dann gibt es eine Folge $P_\nu \in M_0$ mit $P_\nu \neq P_\mu$ für $\mu \neq \nu$, die gegen R strebt. Man wählt für jedes ν einen Punkt $Q_\nu \in C(P_\nu) - D(P_\nu)$ und eine Folge $Q_\nu^\mu \in B \cap V$, die gegen Q_ν strebt. Dann konvergiert $P_\nu^\mu = v(Q_\nu^\mu) \to P_\nu = v(Q_\nu, H)$ für $\nu \to \infty$. Es gibt eine Karte U_α, die R enthält. O. B. d. A. kann man $P_\nu^\mu \in U_\alpha$ und $P_\nu \in U_\alpha$ annehmen. Auf U_α gibt es eine Metrik $\varrho(P, Q)$. Da H eine abzählbare Basis der offenen Mengen hat, kann man auf H eine Metrik $\tilde{\varrho}(P, Q)$ einführen.

Nun bestimmt man zu jedem ν eine Nummer μ_ν, so daß

$$\tilde{\varrho}(Q_\nu^\mu, Q_\nu) \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{für} \quad \mu \geq \mu_\nu, \tag{9.60}$$

$$\varrho(P_\nu^\mu, P_\nu) \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{für} \quad \mu \geq \mu_\nu \tag{9.61}$$

gilt. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\varrho(P_\nu^{\mu_\nu}, R) \leq \varrho(P_\nu^{\mu_\nu}, P_\nu) + \varrho(P_\nu, R) \leq \frac{1}{\nu} + \varrho(P_\nu, R) \tag{9.62}$$

also

$$\lim_{\nu \to \infty} \varrho(P_\nu^{\mu_\nu}, R) = 0. \tag{9.63}$$

Es strebt $P_\nu^{\mu_\nu} = P(\nu) \to R$ für $\nu \to \infty$. Da die inverse Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ offen ist, gibt es eine Teilfolge ν_λ, so daß $Q(\nu_\lambda) = \tau\big(P(\nu_\lambda)\big) \to R^* \in N^*$ für $\lambda \to \infty$ strebt. Es ist

$$\tilde{\varrho}(R^*, Q_{\nu_\lambda}) \leq \tilde{\varrho}\big(R^*, Q(\nu_\lambda)\big) + \tilde{\varrho}\big(Q(\nu_\lambda), Q_{\nu_\lambda}\big) \leq \tilde{\varrho}\big(R^*, Q(\nu_\lambda)\big) + \frac{1}{\nu_\lambda} = \underset{\lambda \to \infty}{o}(1). \tag{9.64}$$

Es strebt $Q_{\nu_\lambda} \to R^*$ für $\lambda \to \infty$ und es ist Q_{ν_λ} in $C(P_{\nu_\lambda})$ enthalten. Ist K eine kompakte Umgebung von R^* mit $K \subset V$, so dringen in K unendlich viele $C(P_\nu)$ ein. Da $C(P_\nu)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V ist und in N^* liegt, besteht es aus irreduziblen Teilen von N^* der Dimension 2. Verschiedene $C(P_\nu)$ enthalten verschiedene irreduzible Teile von N^*, also dringen in K unendlich viele irreduzible Teile von N^* ein, was falsch ist. In H hat M_0 keinen Häufungspunkt, w. z. b. w.

Haben bei der meromorphen und beiderseits offenen Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ die Mannigfaltigkeiten G und H eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so haben die Mengen M_0 und N_0 der singulären Punkte von τ bzw. v in G bzw. H keinen Häufungspunkt. Bei der Erzeugung der σ-Prozesse wird man also in die einzelnen isolierten Punkte von M_0 bzw. N_0 die erste „*Rate*" von σ-Sphären einsetzen. Man erhält eine neue Modifikation, mit der man entsprechend verfährt. Dabei geschieht es dann nach und nach, daß die entstehenden neuen Modifikationen auf den irreduziblen Teilen der Mengen $C(P_0)$ nichts mehr ändern. Schließlich kommt man beiderseits — bis auf analytische Äquivalenz — zur selben Mannigfaltigkeit. Das ist die grobe Schilderung des Prinzips, nach dem die Modifikation $\mathfrak{M}$ in den nächsten beiden Arbeiten durch σ-Prozesse erzeugt werden wird. Man sieht, welche Rolle hierbei der Hauptsatz über meromorphe Modifikationen spielt.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954.)

FUHRMANN, A.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 211—240 (1955)

Klassen ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse.

Von
ARVED FUHRMANN.

1. Einleitung.

GRASSMANN verallgemeinerte das gewöhnliche Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden mit Hilfe der PLÜCKERschen Linienkoordinaten zu dem Doppelverhältnis von vier Geraden im dreidimensionalen Raum[1]). Zwei durch Permutation dieser vier Geraden gewonnene GRASSMANNsche Doppelverhältnisse bestimmen, von Sonderfällen abgesehen, deren Lagebeziehung eindeutig; die in entsprechender Weise aus den Determinantentensoren vier linearer Mannigfaltigkeiten höherer Dimension gebildete Invariante kann deren Lagebeziehung jedoch nie eindeutig bestimmen; denn sie ist die Determinante einer bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmten Matrix $\mathfrak{A}$, die man durch geeignete Normierung der Koordinatenmatrizen jener vier Mannigfaltigkeiten gewinnen kann. Daher ist die Klasse der zu dieser Matrix $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrizen jener tensoriellen Invariante als Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses vorzuziehen.

Um die besagte Matrizenklasse aus den Koordinaten der vier Mannigfaltigkeiten direkt durch einen Invariantenprozeß statt durch eine Normierung zu gewinnen, wird im ersten Teil des vorliegenden Aufsatzes der dazu erforderliche Kalkül in enger Anlehnung an [*3*] entwickelt.

Im zweiten Teil werden die Klassen ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse systematisch eingeführt; sie besitzen in mannigfacher Hinsicht ganz analoge Eigenschaften wie die gewöhnlichen Doppelverhältnisse. Es ist bemerkenswert, daß die Beweise dafür fast durchweg schon bei Benutzung eines beliebigen Koeffizientenkörpers[2]) durchführbar sind; jedoch entstehen dabei einige Schwierigkeiten, weil die Ähnlichkeitstransformationen über nichtkommutativen Körpern bisher noch wenig untersucht worden zu sein scheinen.

Um diese Schwierigkeiten zu bewältigen, wird im dritten Teil zunächst die Existenz der JORDANschen Normalform, wenn auch mit einer gewissen Einschränkung, bei Zugrundelegung eines beliebigen Körpers bewiesen, und zwar trotz der geringen Voraussetzungen sehr elementar. Mit Hilfe dieser „quasi-JORDANschen Normalform" kann man schließlich eine gewisse spezielle

[1]) Vgl. [*6*], S. 383.

[2]) Ein Körper ist hier stets beliebig, d.h. kommutativ oder nichtkommutativ, soweit nichts anderes gesagt wird.

Ähnlichkeitstransformation auf die gewöhnliche Ähnlichkeitstransformation zurückführen; es handelt sich dabei um ein Isomorphieproblem bei ABELschen Gruppen mit Operatoren.

I. Lineare Mannigfaltigkeiten.

(I 1) *Duale Vektorräume.* $\boldsymbol{K}$ sei ein Körper, n eine natürliche Zahl, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{K}_d^n$ der n-dimensionale Rechtsvektorraum über $\boldsymbol{K}$, und $\boldsymbol{E}^*=\boldsymbol{K}_s^n$ der n-dimensionale Linksvektorraum über $\boldsymbol{K}$. Werden die Elemente $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ explizit als n-gliedrige Spaltenvektoren, die Elemente $\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*$ als n-gliedrige Zeilenvektoren angeschrieben, so kann das Skalarprodukt $\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{x}$ einfach als Matrizenprodukt $\boldsymbol{x}_1^*\cdot\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n^*\cdot\boldsymbol{x}_n$ eingeführt werden. Man verifiziert dann ohne Mühe:

$$\text{(I 1a)}\quad\begin{cases}\mathfrak{x}^*\cdot(\mathfrak{x}_1\cdot\boldsymbol{s}_1+\mathfrak{x}_2\cdot\boldsymbol{s}_2)=(\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{x}_1)\cdot\boldsymbol{s}_1+(\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{x}_2)\cdot\boldsymbol{s}_2\\ \qquad\qquad(\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*;\ \mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2\in\boldsymbol{E};\ \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\in\boldsymbol{K})\\ (\boldsymbol{t}_1\cdot\mathfrak{x}_1^*+\boldsymbol{t}_2\cdot\mathfrak{x}_2^*)\cdot\mathfrak{x}=\boldsymbol{t}_1\cdot(\mathfrak{x}_1^*\cdot\mathfrak{x})+\boldsymbol{t}_2\cdot(\mathfrak{x}_2^*\cdot\mathfrak{x})\\ \qquad\qquad(\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E};\ \mathfrak{x}_1^*,\mathfrak{x}_2^*\in\boldsymbol{E}^*;\ \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\in\boldsymbol{K}).\end{cases}$$

Jeder Vektor $\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*$ bildet also $\boldsymbol{E}$ homomorph auf $\boldsymbol{K}$ ab und stellt somit eine Linearform über $\boldsymbol{E}$ dar, jeder Vektor $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ ebenso eine Linearform über $\boldsymbol{E}^*$. Demnach ist $\boldsymbol{E}^*$ der „Linearformenraum" oder das „Dual" von $\boldsymbol{E}$, und umgekehrt.

Die Vektoren $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ und $\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*$ sind zueinander „konträr", wenn ihr Skalarprodukt verschwindet[3]). Ist $\boldsymbol{X}$ eine Vektorenmenge aus $\boldsymbol{E}$, so bilden alle Vektoren aus $\boldsymbol{E}^*$, die zu jedem Vektor aus $\boldsymbol{X}$ konträr sind, die zu $\boldsymbol{X}$ „linkskonträre" Vektorenmenge ${}^\circ\boldsymbol{X}\subseteqq\boldsymbol{E}^*$; analog wird einer Vektorenmenge $\boldsymbol{X}^*\subseteqq\boldsymbol{E}^*$ die zu ihr „rechtskonträre" Vektorenmenge $\boldsymbol{X}^{*\circ}\subseteqq\boldsymbol{E}$ zugeordnet.

Die Unterräume von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{E}^*$ sowie das Enthaltensein, die Gleichheit, Schnitt, Verbindung, relative Komplementarität und Dimension der Unterräume werden in der üblichen Weise definiert. Offenbar sind ${}^\circ\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{X}^{*\circ}$ stets Unterräume. Bezeichnet $\boldsymbol{M}$ immer einen Unterraum, so gilt[4]):

(I 1b) *Aus* $\boldsymbol{M}_1\subseteqq\boldsymbol{M}_2\subseteqq\boldsymbol{E}$ *folgt umkehrbar:* ${}^\circ\boldsymbol{M}_2\subseteqq{}^\circ\boldsymbol{M}_1\subseteqq\boldsymbol{E}^*$,

(I 1c) $({}^\circ\boldsymbol{M})^\circ=\boldsymbol{M}$ *bzw.* ${}^\circ(\boldsymbol{M}^{*\circ})=\boldsymbol{M}^*$

(I 1d) $\boldsymbol{M}_1\cap\boldsymbol{M}_2=({}^\circ\boldsymbol{M}_1\cup{}^\circ\boldsymbol{M}_2)^\circ$ *bzw.* $\boldsymbol{M}_1^*\cap\boldsymbol{M}_2^*={}^\circ(\boldsymbol{M}_1^{*\circ}\cup\boldsymbol{M}_2^{*\circ})$,

(I 1e) $dim(\boldsymbol{M}_1\oplus\boldsymbol{M}_2)=dim\,\boldsymbol{M}_1+dim\,\boldsymbol{M}_2$ *bzw.* $dim(\boldsymbol{M}_1^*\oplus\boldsymbol{M}_2^*)=dim\,\boldsymbol{M}_1^*+dim\,\boldsymbol{M}_2^*$.

Die Unterräume von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{E}^*$ bilden je einen modularen, relativkomplementären Verband[5]).

Schließlich ist noch zu betonen, daß bei Vektoren $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ unter „Linearkombination", „linearer (Un-)Abhängigkeit" und „Rang" natürlich immer

[3]) Weil die sonst übliche Bezeichnung „orthogonal" in (I 4) zu Mißverständnissen führen könnte, wurde hier der Ausdruck „konträr" gewählt.

[4]) Im einzelnen ausgeführt bei [3].

[5]) Vgl. [2], S. 18, S. 65 und S. 105.

nur die rechtsseitige Linearkombination usw. verstanden wird, bei Vektoren $\mathfrak{x}^* \in \boldsymbol{E}^*$ immer nur die linksseitige Linearkombination usw.

(I 2) *Einseitig äquivalente Matrizen.* Jede Matrix, von der hier die Rede ist, besteht aus Elementen von $\boldsymbol{K}$[6]). Eine n-zeilige Matrix $\mathfrak{M}$ „erzeugt rechtsseitig" den Unterraum $\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$, der aus allen rechtsseitigen Linearkombinationen ihrer Spalten besteht. Analog wird die „linksseitige Erzeugung" eines Unterraumes $\boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*$ durch eine n-spaltige Matrix $\mathfrak{M}^*$ erklärt, in Zeichen:

$$\text{(I 2a)} \qquad \mathfrak{M} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{M}^* \xrightarrow{s} \boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*.$$

Die Matrix $\mathfrak{M}$ (bzw. $\mathfrak{M}^*$) heißt „minimal", wenn ihre Spalten (bzw. Zeilen) linear unabhängig sind. — Offenbar gilt:

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Beziehung*

$$\boldsymbol{M}_1 \leqq \boldsymbol{M}_2 \leqq \boldsymbol{E} \quad \textit{bzw.} \quad \boldsymbol{M}_1^* \leqq \boldsymbol{M}_2^* \leqq \boldsymbol{E}^*$$

ist die Existenz der folgenden Gleichung zwischen den erzeugenden Matrizen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ (bzw. $\mathfrak{M}_1^*$ und $\mathfrak{M}_2^*$) dieser Unterräume:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S} \quad \textit{bzw.} \quad \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}_2^*.$$

Hieraus folgt sofort:

Satz 2. *Notwendig und hinreichend für die Gleichheit der von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ rechtsseitig (bzw. $\mathfrak{M}_1^*$ und $\mathfrak{M}_2^*$ linksseitig) erzeugten Unterräume ist das Bestehen der Gleichungen:*

$$\text{(I 2b)} \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S}_2 \textit{ und } \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}_1 \textit{ bzw. } \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{T}_2 \cdot \mathfrak{M}_2^* \textit{ und } \mathfrak{M}_2^* = \mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{M}_1^*.$$

Zwei Matrizen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ (bzw. $\mathfrak{M}_1^*$ und $\mathfrak{M}_2^*$), die in dieser Beziehung zueinander stehen, werden „rechtsäquivalent" (bzw. „linksäquivalent") genannt, in Zeichen:

$$\text{(I 2c)} \qquad \mathfrak{M}_1 \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{M}_1^* \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}_2^*.$$

Man kann den Satz 2 nun auch so formulieren:

Satz 2'. *Jeder Unterraum $\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$ (bzw. $\boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*$) bestimmt eineindeutig die Klasse der ihn rechtsseitig (bzw. linksseitig) erzeugenden, zueinander rechtsäquivalenten (bzw. linksäquivalenten) Matrizen.*

---

[6]) Nach Einführung der Matrizen als rechteckigen Schemata aus Elementen von $\boldsymbol{K}$ werden die Gleichheit, Addition und Multiplikation von Matrizen in der üblichen Weise definiert. Ist $\boldsymbol{K}$ nicht kommutativ, so gilt für die Transposition von Matrizenprodukten natürlich nicht mehr $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})' = \mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{A}'$. Eine Matrix kann in Teilmatrizen zerlegt bzw. aus ihnen durch Nebeneinander- und Untereinanderstellen aufgebaut werden; zwei Matrizen mit übereinstimmender Einteilung können so addiert werden, als ob die Teilmatrizen Körperelemente wären; das gleiche trifft auch für die Multiplikation zu, wenn die Zeilen des linken Faktors genau so unterteilt sind wie die Spalten des rechten Faktors.

(I 3) *Der Rang einer Matrix.* Es ist zunächst zwischen dem „rechtsseitigen Spaltenrang" $Rg_d\,\mathfrak{X}$ und dem „linksseitigen Zeilenrang" $Rg_s\,\mathfrak{X}$ einer Matrix $\mathfrak{X}$ zu unterscheiden. Man findet sehr leicht:

Satz 3. *Aus*

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{M}^* \xrightarrow{s} \boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*$$

folgt

$$Rg_d\,\mathfrak{M} = \dim \boldsymbol{M} \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_s\,\mathfrak{M}^* = \dim \boldsymbol{M}^*.$$

Satz 4. *Aus*

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}_2^*$$

folgt

$$Rg_d\,\mathfrak{M}_1 \leq Rg_d\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_s\,\mathfrak{M}_1^* \leq Rg_s\,\mathfrak{M}_2^*$$

und

$$Rg_s\,\mathfrak{M}_1 \leq Rg_s\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_d\,\mathfrak{M}_1^* \leq Rg_d\,\mathfrak{M}_2^*.$$

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich direkt aus den Sätzen 1 und 3. — Zu der zweiten Aussage gelangt man so: Sind irgendwelche Zeilen von $\mathfrak{M}_2$ linear abhängig, so sind es auch die entsprechenden Zeilen von $\mathfrak{M}_1$; sind also irgendwelche Zeilen von $\mathfrak{M}_1$ linear unabhängig, so sind es auch die entsprechenden Zeilen von $\mathfrak{M}_2$.

Nun ergibt sich unmittelbar:

Satz 5. *Aus*

$$\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{M}_1^* \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}_2^*$$

folgt

$$Rg_d\,\mathfrak{M}_1 = Rg_d\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_s\,\mathfrak{M}_1^* = Rg_s\,\mathfrak{M}_2^*$$

und

$$Rg_s\,\mathfrak{M}_1 = Rg_s\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_d\,\mathfrak{M}_1^* = Rg_d\,\mathfrak{M}_2^*.$$

Dieser Satz führt zu dem bekannten

Satz 6. *Der rechtsseitige Spaltenrang und der linksseitige Zeilenrang einer Matrix $\mathfrak{X}$ sind einander gleich:*

$$Rg_d\,\mathfrak{X} = Rg_s\,\mathfrak{X}.$$

Von jetzt ab ist es also nicht mehr nötig, $Rg_d\,\mathfrak{X}$ und $Rg_s\,\mathfrak{X}$ voneinander zu unterscheiden; an ihre Stelle tritt daher die übliche Bezeichnung $Rg\,\mathfrak{X}$.

(I 4) *Konträre Matrizen.* Ist $\mathfrak{M}$ eine n-zeilige Matrix, so wird eine zu ihr „linkskonträre" Matrix ${}^\circ\mathfrak{M}$[7]) dadurch eingeführt, daß $\mathfrak{M} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$ mit ${}^\circ\mathfrak{M} \xrightarrow{s} {}^\circ\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}^*$ gleichwertig sein soll. Ganz entsprechend wird eine zu einer n-spaltigen Matrix $\mathfrak{M}^*$ „rechtskonträre" Matrix $\mathfrak{M}^{*\circ}$ definiert. — Daraus ergibt sich ohne Mühe:

$$\text{(I 4a)} \qquad {}^\circ\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{O} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}^* \cdot \mathfrak{M}^{*\circ} = \mathfrak{O}$$

[7]) Die Bezeichnung ${}^\circ\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^{*\circ}$ wird in [4], S. 7 für die linksseitigen bzw. rechtsseitigen Nullteiler von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ eingeführt, während es sich hier um die Rechts- bzw. Linksteiler aller links- bzw. rechtsseitigen Nullteiler handelt. Eine Verwechslung des rechts oben angeschriebenen Zeichens $^\circ$ mit Exponenten ist wohl kaum zu befürchten.

sowie der

Satz 7. *Die Klasse der Rechtsäquivalenten von* $\mathfrak{M}$ *(bzw.* $\mathfrak{M}^{*\circ}$*) und die Klasse der Linksäquivalenten von* ${}^{\circ}\mathfrak{M}$ *(bzw.* $\mathfrak{M}^{*}$*) bestimmen einander eineindeutig.* — Beweis aus (I 1c) und Satz 2′. — Man kann Satz 7 auch so ausdrücken:

Satz 7′. *Die Relationen*

$$\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2 \quad \textit{und} \quad {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \overset{s}{\sim} {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \quad \textit{bzw.} \quad \mathfrak{M}_1^{*} \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}_2^{*} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{M}_1^{*\circ} \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2^{*\circ}$$

sind miteinander gleichwertig. — Oder ganz kurz:

$$({}^{\circ}\mathfrak{M})^{\circ} \overset{d}{\sim} \mathfrak{M} \quad \textit{bzw.} \quad {}^{\circ}(\mathfrak{M}^{*\circ}) \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}^{*}.$$

Satz 8. *Aus*

$$\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \subseteqq \boldsymbol{E} \textit{ und } \mathfrak{M}_2 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_2 \subseteqq \boldsymbol{E} \textit{ bzw. } \mathfrak{M}_1^{*} \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_1^{*} \subseteqq \boldsymbol{E}^{*} \textit{ und } \mathfrak{M}_2^{*} \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_2^{*} \subseteqq \boldsymbol{E}^{*}$$

folgt

$$(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2 \quad \textit{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1^{*} \\ \mathfrak{M}_2^{*} \end{pmatrix} \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_1^{*} \cup \boldsymbol{M}_2^{*},$$

sowie nach (I 1d)

$$\begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}^{\circ} \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2 \quad \textit{bzw.} \quad {}^{\circ}(\mathfrak{M}_1^{*\circ}, \mathfrak{M}_2^{*\circ}) \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_1^{*} \cap \boldsymbol{M}_2^{*}.$$

Besonders sinnfällig werden die Vorzüge des Operierens mit einseitig äquivalenten und konträren Matrizen in dem

Theorem 1 (Hauptttheorem über konträre Matrizen). *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *zwei n-zeilige (bzw.* $\mathfrak{M}_1^{*}$ *und* $\mathfrak{M}_2^{*}$ *zwei n-spaltige) Matrizen, so gilt:*

(I 4b) $$Rg\,(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\,\mathfrak{M}_1$$

bzw.

$$Rg \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1^{*} \\ \mathfrak{M}_2^{*} \end{pmatrix} = Rg\,(\mathfrak{M}_1^{*} \cdot \mathfrak{M}_2^{*\circ}) + Rg\,\mathfrak{M}_2^{*}.$$

Beweis. Nach Satz 8 folgt aus $\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \subseteqq \boldsymbol{E}$ und $\mathfrak{M}_2 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_2 \subseteqq \boldsymbol{E}$:

$$\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}^{\circ} \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{S}$$

und nach Satz 1 existiert die Gleichung $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}$. Es gibt einen Unterraum $\boldsymbol{N}$, so daß $\boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_2$ ist; daraus folgt $\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2$. Setzt man noch $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \overset{d}{\to} \boldsymbol{N}$ voraus, so ist zu schließen:

$${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot (\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}}, \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}) = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot (\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}, \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}) = (\mathfrak{O}, {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}) \overset{d}{\sim} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}$$

und

$${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \overset{s}{\sim} \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathfrak{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \overset{s}{\sim} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} = \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}},$$

daher ist nach Satz 5, Satz 3 und (I 1e)

$$Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) = Rg\,\mathfrak{M}_N$$
$$= dim\,N = dim\,(M_1 \cup M_2) - dim\,M_1 = Rg\,(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) - Rg\,\mathfrak{M}_1.$$

(I 5) *Folgerungen aus dem Hauptheorem.* Das Theorem 1 ist ein Kernsatz der linearen Algebra; denn es läßt sich, wie eben gezeigt wurde, unmittelbar aus den Grundlagen herleiten und führt sofort zu verschiedenen wichtigen und bekannten Sätzen der determinantenfreien linearen Algebra, die sonst kaum einen engeren Zusammenhang erkennen lassen[8]):

Satz 9.

$$Rg\,\mathfrak{M} + Rg\,{}^{\circ}\mathfrak{M} = n \quad \text{bzw.} \quad Rg\,\mathfrak{M}^* + Rg\,\mathfrak{M}^{*\circ} = n.$$

Beweis.

$$Rg\,\mathfrak{M} + Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{E}) = Rg\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{E}) = Rg\,\mathfrak{E} = n.$$

Satz 10.

$$dim\,M_1 + dim\,M_2 = dim\,(M_1 \cup M_2) + dim\,(M_1 \cap M_2).$$

Beweis. Aus (I 4c) und Satz 9 folgt

$$Rg\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ} = -\,Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\,\mathfrak{M}_2,$$

woraus sich durch Addition von (I 4b) die Behauptung ergibt.

Satz 11 (SYLVESTERs Law of nullity). *Ist $\mathfrak{P}$ eine n-spaltige, und $\mathfrak{Q}$ eine n-zeilige Matrix, so gilt:*

$$Max\,(0, Rg\,\mathfrak{P} + Rg\,\mathfrak{Q} - n) \leq Rg\,(\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q}) \leq Min\,(Rg\,\mathfrak{P}, Rg\,\mathfrak{Q}).$$

Beweis. Aus

$$Max\,(Rg\,\mathfrak{P}^{\circ}, Rg\,\mathfrak{Q}) \leq Rg\,(\mathfrak{P}^{\circ}, \mathfrak{Q}) \leq Min\,(n, Rg\,\mathfrak{P}^{\circ} + Rg\,\mathfrak{Q})$$

folgt die Behauptung durch Einsetzen von

$$Rg\,(\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q}) = Rg\,(\mathfrak{P}^{\circ}, \mathfrak{Q}) - Rg\,\mathfrak{P}^{\circ} = Rg\,(\mathfrak{P}^{\circ}, \mathfrak{Q}) + Rg\,\mathfrak{P} - n.$$

Satz 12. *Ist $\mathfrak{R}$ eine n-reihige invertierbare Matrix, so ist*

$${}^{\circ}(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}) \overset{s}{\sim} {}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^{-1} \quad \textit{und} \quad (\mathfrak{M}^* \cdot \mathfrak{R}^{-1})^{\circ} \overset{d}{\sim} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}^{*\circ}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus $({}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^{-1}) \cdot (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}) = \mathfrak{O}$ und

$$Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^{-1}) = Rg\,{}^{\circ}\mathfrak{M} = n - Rg\,\mathfrak{M} = n - Rg\,(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}) = Rg\,{}^{\circ}(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}).$$

Theorem 2. *${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ ist genau dann invertierbar, wenn ${}^{\circ}\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ minimal sind, und wenn $M_1 \oplus M_2 = E$ ist.* — Bei grundsätzlicher Verwendung minimaler erzeugender Matrizen ist also ${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ genau dann invertierbar, wenn ${}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_1$ invertierbar ist. —

[8]) Außer den folgenden Sätzen kann auch der Satz über die Lösbarkeit eines linearen inhomogenen Gleichungssystems auf Theorem 1 zurückgeführt werden.

Beweis. 1. $^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ sei invertierbar und r-reihig; dann folgt

$$(\text{I } 5\text{a}) \qquad r = Rg(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) \leq Min(Rg\, ^\circ\mathfrak{M}_1, Rg\, \mathfrak{M}_2) \leq r \leq n$$

d.h. die r Zeilen von $^\circ\mathfrak{M}_1$ und die r Spalten von $\mathfrak{M}_2$ sind jeweils linear unabhängig, und es ergibt sich

$$(\text{I } 5\text{b}) \quad \begin{cases} Rg(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) = Rg\, ^\circ\mathfrak{M}_1 & Rg(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) = Rg\, \mathfrak{M}_2 \\ Rg(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = Rg(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\, \mathfrak{M}_1 & Rg\begin{pmatrix} ^\circ\mathfrak{M}_1 \\ ^\circ\mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}^\circ = -Rg(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\, \mathfrak{M}_2 \\ = Rg\, ^\circ\mathfrak{M}_1 + Rg\, \mathfrak{M}_1 = n & = -Rg\, \mathfrak{M}_2 + Rg\, \mathfrak{M}_2 = 0 \\ \boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{E} & \boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{O}. \end{cases}$$

2. Die beiden Schlußketten unter (I 5b) sind umkehrbar; sind nun die Zeilen von $^\circ\mathfrak{M}_1$ und die Spalten von $\mathfrak{M}_2$ linear unabhängig, so ist $^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ offenbar invertierbar. — Im Anschluß an dieses Theorem ist noch folgender späterhin gebrauchter sehr einfacher Satz zu erwähnen:

Satz 13. *Bei grundsätzlicher Verwendung minimaler erzeugender Matrizen ist* $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ *und ebenso* $\begin{pmatrix} ^\circ\mathfrak{M}_1 \\ ^\circ\mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}$ *genau dann invertierbar, wenn* $\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{E}$ *ist.*

(I 6) *Darstellung linearer Mannigfaltigkeiten durch Matrizen.* Aus den bekannten formalen Gründen wird in der projektiven Geometrie die Zahl n durch $n+1$ ersetzt. Eine lineare Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ (oder einfach $\boldsymbol{V}$) wird nach Belieben durch einen Unterraum $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{E}$ oder $^\circ\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{E}^*$ repräsentiert; ihre Dimension $d = dim\, \boldsymbol{V}^{(d,c)} = dim\, \boldsymbol{M} - 1$ und ihre Codimension $c = codim\, \boldsymbol{V}^{(d,c)} = dim\, ^\circ\boldsymbol{M} - 1$ ergänzen sich nach Satz 9 zu $n-1$. Die $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ mit $d = 0, 1, n-2$ und $n-1$ werden beziehentlich „Punkt", „Gerade", „Hypergerade" und „Hyperebene" genannt. Ferner ist $\boldsymbol{V}^{(-1,n)}$ der „leere Raum" und $\boldsymbol{V}^{(n,-1)}$ der „volle Raum". Von diesen beiden werden die übrigen $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ als „ordentliche" lineare Mannigfaltigkeiten unterschieden. Die Menge aller $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ ist der n-dimensionale projektive Raum $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$.

Im Hinblick auf Satz 12 wird eine rechtsseitig erzeugende Matrix $\mathfrak{M}$ von $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{E}$ als „kovariante" Koordinatenmatrix, und eine linksseitig erzeugende Matrix $^\circ\mathfrak{M}$ von $^\circ\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{E}^*$ als „kontravariante" Koordinatenmatrix der durch $\boldsymbol{M}$ bzw. $^\circ\boldsymbol{M}$ repräsentierten linearen Mannigfaltigkeit bezeichnet.

Unter einer „Substitution" (einer $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$) ist die Ersetzung einer kovarianten Koordinatenmatrix durch eine Rechtsäquivalente oder einer kontravarianten Koordinatenmatrix durch eine Linksäquivalente zu verstehen.

Eine „Kollineation" des $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$ ist die simultane Multiplikation aller kovarianten Koordinatenmatrizen mit einer $(n+1)$-reihigen invertierbaren Matrix $\mathfrak{A}$ von links und aller kontravarianten Koordinatenmatrizen mit $\mathfrak{A}^{-1}$ von rechts. (Vgl. Satz 12.)

Unter Zugrundelegung der einseitigen, anschaulichen Auffassung der linearen Mannigfaltigkeiten als Punktmannigfaltigkeiten werden für sie die Begriffe „Enthaltensein", „Gleichheit", „Schnitt", „Verbindung", „Komplementarität" und „Dimension" wie üblich im Anschluß an ihre kovariante

Darstellung definiert. Man kann diese Definition aber auch unter der bekannten Vertauschung jener Begriffe ebensogut an die kontravariante Darstellung anschließen (Dualitätsprinzip).

Eine „(g-gliedrige) Konfiguration" ist ein geordnetes g-Tupel von linearen Mannigfaltigkeiten. Zwei Konfigurationen $\{\boldsymbol{V}_1, \ldots, \boldsymbol{V}_g\}$ und $\{\hat{\boldsymbol{V}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{V}}_g\}$ sind projektiv äquivalent, wenn es eine Kollineation gibt, die gleichzeitig jede $\boldsymbol{V}_\gamma$ in die entsprechende $\hat{\boldsymbol{V}}_\gamma$ überführt. $\{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_g\}$ ist eine kovariante, $\begin{Bmatrix} {}^\circ\mathfrak{M}_1 \\ \vdots \\ {}^\circ\mathfrak{M}_g \end{Bmatrix}$ eine kontravariante Darstellung einer Konfiguration und wird der Einfachheit halber auch selbst als Konfiguration bezeichnet.

II. Die verallgemeinerten Doppelverhältnisse.

(II 1) *Existenz und Invarianz der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Im n-dimensionalen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$ seien zwei Hyperebenen durch die $(n+1)$-gliedrigen kontravarianten (Zeilen-)vektoren $\mathfrak{x}_1^*$ bzw. $\mathfrak{x}_2^*$ und zwei Punkte durch die $(n+1)$-gliedrigen kovarianten (Spalten-)vektoren $\mathfrak{x}_3$ bzw. $\mathfrak{x}_4$ gegeben. Über einem kommutativen Körper wird das Doppelverhältnis dieser Konfiguration bekanntlich eindeutig durch

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_4} : \frac{\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_4}$$

definiert; über einem nichtkommutativen Körper erhält man dagegen nach SPERNER das bis auf innere Automorphismen dieses Körpers eindeutig bestimmte Doppelverhältnis[9])

$$\text{(II 1a)} \qquad \boldsymbol{a} = (\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_4)^{-1} \cdot (\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_3) \cdot (\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_3)^{-1} \cdot (\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_4).$$

Nun sei $\boldsymbol{K}$ wieder ein beliebiger Körper. Einer zunächst völlig unbestimmten viergliedrigen Konfiguration $\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3, \boldsymbol{V}_4\}$ im $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$ wird analog zu (II 1a) formal die Matrix

$$\text{(II 1b)} \qquad \mathfrak{A} = ({}^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_4)^{-1} \cdot ({}^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3) \cdot ({}^\circ\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3)^{-1} \cdot ({}^\circ\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_4)$$

zugeordnet, wobei ${}^\circ\mathfrak{M}_1$ und ${}^\circ\mathfrak{M}_2$ kontravariante Koordinatenmatrizen von $\boldsymbol{V}_1$ bzw. $\boldsymbol{V}_2$, dagegen $\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{M}_4$ kovariante Koordinatenmatrizen von $\boldsymbol{V}_3$ bzw. $\boldsymbol{V}_4$ sein sollen. — Aus Theorem 2 ergibt sich sofort

Satz 14. *Notwendig und hinreichend für die Existenz von* $\mathfrak{A}$ *in* (II 1b) *ist, daß sämtliche darin vorkommenden Koordinatenmatrizen minimal sind, und daß gilt:*

$$\boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{V}^{(n,\,-1)} \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{V}_2 \oplus \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}^{(n,\,-1)}.$$

Die Minimaleigenschaft aller benutzten Koordinatenmatrizen wird daher von nun ab immer stillschweigend vorausgesetzt. — Man beachte, daß ${}^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3$ und ${}^\circ\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_4$ in (II 1b) nicht quadratisch zu sein brauchen, daß aber $\mathfrak{A}$ stets quadratisch ist. — Zur Untersuchung des Transformations-

[9]) Vgl. [7], Gl. (24).

verhaltens von $\mathfrak{A}$ wird die Ähnlichkeit zweier m-reihiger Matrizen $\mathfrak{X}$ und $\hat{\mathfrak{X}}$ wie üblich durch die Existenz einer m-reihigen invertierbaren Matrix $\mathfrak{P}$ erklärt, die die Gleichung $\hat{\mathfrak{X}} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{P}$ erfüllt; die Klasse der zu $\mathfrak{X}$ ähnlichen Matrizen wird mit $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{X})$ bezeichnet.

Satz 15. *Die aus der Matrix* $\mathfrak{A}$ *in* (II 1b) *gebildete Matrizenklasse* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ *ist projektiv invariant.*

Beweis. Die Koordinatenmatrizen sind den Transformationen

$$^{\circ}\hat{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{T}_1 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{K}^{-1}, \quad {}^{\circ}\hat{\mathfrak{M}}_2 = \mathfrak{T}_2 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{K}^{-1}, \quad \hat{\mathfrak{M}}_3 = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{S}_3, \quad \hat{\mathfrak{M}}_4 = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{M}_4 \cdot \mathfrak{S}_4$$

mit einer $(n+1)$-reihigen invertierbaren Kollineationsmatrix $\mathfrak{K}$ zu unterwerfen; die Substitutionsmatrizen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_4$ sind ebenfalls invertierbar, weil alle Koordinatenmatrizen minimal sein sollen. Man rechnet nun leicht nach:

$$\text{(II 1c)} \quad \begin{cases} \hat{\mathfrak{A}} = (^{\circ}\hat{\mathfrak{M}}_1 \cdot \hat{\mathfrak{M}}_4)^{-1} \cdot (^{\circ}\hat{\mathfrak{M}}_1 \cdot \hat{\mathfrak{M}}_3) \cdot (^{\circ}\hat{\mathfrak{M}}_2 \cdot \hat{\mathfrak{M}}_3)^{-1} \cdot (^{\circ}\hat{\mathfrak{M}}_2 \cdot \hat{\mathfrak{M}}_4) \\ \quad = (\mathfrak{T}_1 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_4 \cdot \mathfrak{S}_4)^{-1} \cdot (\mathfrak{T}_1 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{S}_3) \cdot (\mathfrak{T}_2 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{S}_3)^{-1} \times \\ \quad\quad \times (\mathfrak{T}_2 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_4 \cdot \mathfrak{S}_4) = \mathfrak{S}_4^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{S}_4. \end{cases}$$

— Es erscheint hiernach gerechtfertigt, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ als ein verallgemeinertes Doppelverhältnis zu bezeichnen. —

(II 2) *Permutationsverhalten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Um das Verhalten von $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ gegenüber Permutationen der vier Mannigfaltigkeiten der Konfiguration zu studieren, werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\text{(II 2a)} \qquad (\alpha;\beta) = {}^{\circ}\mathfrak{M}_\alpha \cdot \mathfrak{M}_\beta,$$

$$\text{(II 2b)} \qquad \alpha \oplus \beta \quad \text{bedeutet} \quad \boldsymbol{V}_\alpha \oplus \boldsymbol{V}_\beta = \boldsymbol{V}^{(n,\,-1)}.$$

— Nach Theorem 2 sind also $(\alpha;\beta)$ und $(\beta;\alpha)$ genau dann invertierbar, wenn $\alpha \oplus \beta$ ist. —

$$\text{(II 2c)} \qquad (\alpha,\beta;\gamma,\delta) = \boldsymbol{\Gamma}\big((\alpha;\delta)^{-1} \cdot (\alpha;\gamma) \cdot (\beta;\gamma)^{-1} \cdot (\beta;\delta)\big),$$

$$\text{(II 2d)} \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = (1;4)^{-1} \cdot (1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4), & \text{also} \quad (1;2;3,4) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) \\ \mathfrak{B} = (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;3), & \text{also} \quad (2,1;4,3) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B}) \\ \mathfrak{C} = (3;2)^{-1} \cdot (3;1) \cdot (4;1)^{-1} \cdot (4;2), & \text{also} \quad (3,4;1,2) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{C}) \\ \mathfrak{D} = (4;1)^{-1} \cdot (4;2) \cdot (3;2)^{-1} \cdot (3;1), & \text{also} \quad (4,3;2,1) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D}). \end{cases}$$

Satz 16. *Ist* $1 \oplus 4$ *und* $2 \oplus 3$, *so gilt:*

$$\boldsymbol{\Gamma}\big((1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot (1;4)^{-1}\big) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}).$$

Beweis.

$$(1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot (1;4)^{-1} = (1;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (1;4)^{-1}.$$

— Demnach sind unter (II 2c) alle wesentlich verschiedenen Doppelverhältnisse erfaßt. —

Satz 17. *Ist* $1 \oplus 4$ *und* $2 \oplus 3$, *so gilt:*

$$(1,3;2,4) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}).$$

Beweis. Die Hilfsmatrix

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_2 \cdot ({}^{\circ}\mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{M}_2)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_3 \cdot ({}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2$$

erfüllt, wie man leicht nachrechnet, die Gleichung

$$\mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3) = (\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3).$$

Da $(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3)$ nach Satz 13 invertierbar ist, erweist sich $\mathfrak{H}$ als die $(n+1)$-reihige Einheitsmatrix; daher ist

$$\begin{aligned}(1,3;2,4) &= \Gamma\big((1;4)^{-1} \cdot (1;2) \cdot (3;2)^{-1} \cdot (3;4)\big)\\ &= \Gamma\big((1;4)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot [\mathfrak{M}_2 \cdot (3;2)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_3] \cdot \mathfrak{M}_4\big)\\ &= \Gamma\big((1;4)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot [\mathfrak{E} - \mathfrak{M}_3 \cdot (2;3)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2] \cdot \mathfrak{M}_4\big)\\ &= \Gamma\big(\mathfrak{E} - (1;4)^{-1} \cdot (1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4)\big) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}).\end{aligned}$$

(Die Einheitsmatrix in den beiden letzten Termen ist im allgemeinen nicht $(n+1)$-reihig, sondern hat soviel Reihen wie $\mathfrak{A}$.)

Satz 18. *Ist außer $1 \oplus 4$ und $2 \oplus 3$ auch noch $1 \oplus 3$ oder $2 \oplus 4$ oder beides, so gilt*[10]*:*

$$\Gamma(\mathfrak{B}) = \Gamma(\mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma(\mathfrak{C})$$

Beweis. Aus (II 2d) entnimmt man leicht

$$\mathfrak{B} = (1;3)^{-1} \cdot (1;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;3) \text{ oder } \mathfrak{B} = (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (2;4)^{-1} \cdot (2;3).$$

Satz 19. *Ist außer $1 \oplus 4$ und $2 \oplus 3$ auch noch $1 \oplus 2$ oder $3 \oplus 4$ oder beides, so gilt:*

$$\Gamma(\mathfrak{C}) = \Gamma(\mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma(\mathfrak{B}).$$

Beweis. Unter Verwendung von Satz 17 und $1 \oplus 2$ erhält man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} &= \mathfrak{E} - (\mathfrak{E} - \mathfrak{C}) = \mathfrak{E} - (3;2)^{-1} \cdot (3;4) \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;2)\\ &= (1;2)^{-1} \cdot (1;4) \cdot [\mathfrak{E} - (1;4)^{-1} \cdot (1;2) \cdot (3;2)^{-1} \cdot (3;4)] \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;2)\\ &= (1;2)^{-1} \cdot (1;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;2).\end{aligned}$$

Satz 20. *Ist außer $1 \oplus 4$ und $2 \oplus 3$ auch noch $1 \oplus 3$ und $2 \oplus 4$, so gilt:*

$$(1,2;4,3) = \Gamma(\mathfrak{A}^{-1}).$$

Beweis.

$$(1,2;4,3) = \Gamma\big((1;3)^{-1} \cdot (1;4) \cdot (2;4)^{-1} \cdot (2;3)\big)$$

$$= \Gamma\big((1;3)^{-1} \cdot (1;4) \cdot [(1;4)^{-1} \cdot (1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4)]^{-1} \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;3)\big) = \Gamma(\mathfrak{A}^{-1}).$$

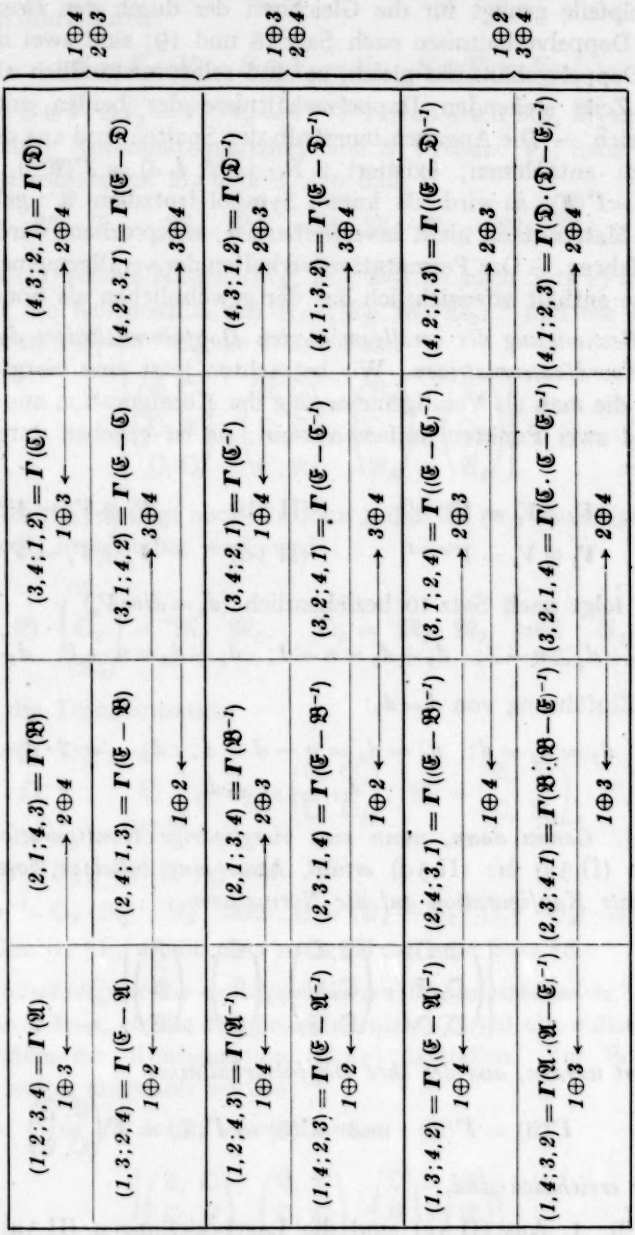
---

[10]) $1 \oplus 3$ oder $2 \oplus 4$ sind keine notwendigen Bedingungen für $\Gamma(\mathfrak{B}) = \Gamma(\mathfrak{A})$ und $\Gamma(\mathfrak{C}) = \Gamma(\mathfrak{D})$, wie man an dem folgenden Beispiel erkennt:

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}, \mathfrak{Y}\\ \mathfrak{X}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}.$$

(Alle Teilmatrizen sind $\frac{n+1}{4}$-reihig, weder $\mathfrak{X}$ noch $\mathfrak{Y}$ invertierbar.)

Die Sätze 17 bis 20 werden übersichtlich zusammengefaßt in der Tabelle (II 2e).



$(1,2;3,4) = \Gamma(\mathfrak{A})$ $1 \oplus 3$	$(2,1;4,3) = \Gamma(\mathfrak{B})$ $2 \oplus 4$	$(3,4;1,2) = \Gamma(\mathfrak{C})$ $1 \oplus 3$	$(4,3;2,1) = \Gamma(\mathfrak{D})$ $2 \oplus 4$	$1 \oplus 4$ $2 \oplus 3$
$(1,3;2,4) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ $1 \oplus 2$	$(2,4;1,3) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{B})$ $1 \oplus 2$	$(3,1;4,2) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{C})$ $3 \oplus 4$	$(4,2;3,1) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{D})$ $3 \oplus 4$	
$(1,2;4,3) = \Gamma(\mathfrak{A}^{-1})$ $1 \oplus 4$	$(2,1;3,4) = \Gamma(\mathfrak{B}^{-1})$ $2 \oplus 3$	$(3,4;2,1) = \Gamma(\mathfrak{C}^{-1})$ $1 \oplus 4$	$(4,3;1,2) = \Gamma(\mathfrak{D}^{-1})$ $2 \oplus 3$	$1 \oplus 3$ $2 \oplus 4$
$(1,4;2,3) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^{-1})$ $1 \oplus 2$	$(2,3;1,4) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{B}^{-1})$ $1 \oplus 2$	$(3,2;4,1) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}^{-1})$ $3 \oplus 4$	$(4,1;3,2) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}^{-1})$ $3 \oplus 4$	
$(1,3;4,2) = \Gamma((\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1})$ $1 \oplus 4$	$(2,4;3,1) = \Gamma((\mathfrak{E} - \mathfrak{B})^{-1})$ $1 \oplus 4$	$(3,1;2,4) = \Gamma((\mathfrak{E} - \mathfrak{C})^{-1})$ $2 \oplus 3$	$(4,2;1,3) = \Gamma((\mathfrak{E} - \mathfrak{D})^{-1})$ $2 \oplus 3$	$1 \oplus 2$ $3 \oplus 4$
$(1,4;3,2) = \Gamma(\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{E})^{-1})$ $1 \oplus 3$	$(2,3;4,1) = \Gamma(\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{E})^{-1})$ $1 \oplus 3$	$(3,2;1,4) = \Gamma(\mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{C} - \mathfrak{E})^{-1})$ $2 \oplus 4$	$(4,1;2,3) = \Gamma(\mathfrak{D} \cdot (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})^{-1})$ $2 \oplus 4$	

(II 2e)

Die Angaben rechts neben den geschweiften Klammern sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der entsprechenden acht

Doppelverhältnisse nach Satz 14. — Je eine der Bedingungen an den Enden der Doppelpfeile genügt für die Gleichheit der durch den Doppelpfeil verbundenen Doppelverhältnisse nach Satz 18 und 19; sind zwei in einer Zeile stehende Doppelverhältnisse gleich, so sind selbstverständlich alle jeweils in derselben Zeile stehenden Doppelverhältnisse der beiden entsprechenden Spalten gleich. — Die Angaben innerhalb der Spalten sind aus den Sätzen 17 und 20 zu entnehmen; existiert z. B. $(1, 2; 4, 3) = \Gamma(\mathfrak{A}^{-1})$, aber nicht $(1, 2; 3, 4) = \Gamma(\mathfrak{A})$, so wird als kurzes Symbol trotzdem $\mathfrak{A}^{-1}$ gebraucht, obwohl diese Matrix dann nicht invertierbar ist; entsprechend wird in analogen Fällen verfahren. — Das Permutationsverhalten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse enthält offensichtlich das der gewöhnlichen als Sonderfall.

(II 3) *Bestimmung der verallgemeinerten Doppelverhältnisse durch Normierung der Koordinatenmatrizen.* Wir betrachten jetzt eine viergliedrige Konfiguration, die man als Verallgemeinerung der Konfiguration aus zwei Hyperebenen und zwei Punkten auffassen kann; sie ist gegeben durch die Lagebeziehungen

(II 3a) $V_1 \cup V_2 = V^{(n,-1)}$ (II 3b) $V_1 \oplus V_3 = V^{(n,-1)}$

(II 3c) $V_2 \oplus V_3 = V^{(n,-1)}$ (II 3d) $V_1 \oplus V_4 = V^{(n,-1)}$.

Aus ihnen folgt nach Satz 10 beziehentlich ($d_\alpha = dim\, V_\alpha$)

(II 3e) $d_1 + d_2 \geq n-1$; $d_1 + d_3 = n-1$; $d_2 + d_3 = n-1$; $d_1 + d_4 = n-1$

und nach Einführung von $d = d_1$:

(II 3f) $$\begin{cases} d_1 = d_2 = d; \quad d_3 = d_4 = n-d-1; \quad d_{1\cap 2} = 2\cdot d - n; \\ d_{(1\cap 2)\cup 3} = d. \end{cases}$$

Satz 21. *Genau dann, wenn eine viergliedrige Konfiguration die Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *erfüllt, kann eine beliebige kovariante Darstellung dieser Konfiguration auf die Normalform*

(II 3g) $$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{F}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$$

transformiert werden, aus der ihre Doppelverhältnisse

(II 3h) $$\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\mathfrak{B}) \quad \textit{und} \quad \Gamma(\mathfrak{C}) = \Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{F}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{A}\end{pmatrix}$$

unmittelbar ersichtlich sind.

Beweis[11]). 1. Aus (II 3g) sind die Lagebeziehungen (II 3a) bis (II 3d) nach Theorem 2 oder Satz 13 leicht abzulesen. —

[11]) Nebeneinanderstehende Teilmatrizen haben gleich viele Zeilen, untereinanderstehende gleich viele Spalten. Dadurch läßt sich die Zeilen- und Spaltenzahl jeder einzelnen Teilmatrix mittels (II 3f) bestimmen, und die Ausführbarkeit der angegebenen Additionen und Multiplikationen nachprüfen.

2. Sind die Lagebeziehungen (II 3a) bis (II 3d) gegeben, so werden $\mathfrak{S}$, $\tilde{\mathfrak{V}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{V}}_2$ eingeführt durch:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{V}_2; \quad \mathfrak{S} \oplus \tilde{\mathfrak{V}}_1 = \mathfrak{V}_1; \quad \mathfrak{S} \oplus \tilde{\mathfrak{V}}_2 = \mathfrak{V}_2.$$

Daraus folgt $\mathfrak{S} \oplus \tilde{\mathfrak{V}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{V}}_2 = \mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}^{(n,-1)}$. Nun seien $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$, $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ minimale kovariante Koordinatenmatrizen von $\mathfrak{S}$, $\tilde{\mathfrak{V}}_1$ bzw. $\tilde{\mathfrak{V}}_2$; nach Satz 2 gibt es Substitutionsmatrizen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, so daß

$$\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{M}}_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{M}}_2)$$

gilt. Die $(n+1)$-reihige Matrix $(\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{M}}_1, \tilde{\mathfrak{M}}_2)$ ist nach Satz 13 invertierbar; daher ergibt die Kollineation mit $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{M}}_1, \tilde{\mathfrak{M}}_2)^{-1}$ und die gleichzeitige Substitution mit $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Normalform

$$\text{(II 3i)} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{Q}_3 \\ \mathfrak{R}_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_4 \\ \mathfrak{Q}_4 \\ \mathfrak{R}_4 \end{pmatrix} \right\}.$$

aus (II 3b) bis (II 3d) folgt nach Theorem 2, daß die $(n-d)$-reihigen Matrizen $\mathfrak{R}_3, \mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ invertierbar sind, weil

$$\mathfrak{R}_3 = (\mathfrak{O}, \mathfrak{O}, \mathfrak{E}) \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{Q}_3 \\ \mathfrak{R}_3 \end{pmatrix} = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3, \qquad \mathfrak{Q}_3 = {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_4 = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_4$$

ist. Durch die Transformation

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & -\mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{Q}_3^{-1}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{Q}_3^{-1}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{Q}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{R}_4^{-1} \cdot \mathfrak{R}_3$$

geht deshalb (II 3i) in (II 3g) mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_3^{-1} \cdot \mathfrak{Q}_4 \cdot \mathfrak{R}_4^{-1} \cdot \mathfrak{R}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{Q}_3^{-1} \cdot \mathfrak{Q}_4) \cdot \mathfrak{R}_4^{-1} \cdot \mathfrak{R}_3$$

über; die Gln. (II 3h) erhält man nach (II 2d) und Satz 18.

(II 4) *Vollständigkeit der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Es ist nun die Frage zu klären, ob die Doppelverhältnisse (II 3h) ein vollständiges Invariantensystem der Konfiguration (II 3g) darstellen. Zur Beantwortung muß etwas weiter ausgeholt werden:

Satz 22. *Sind die beiden Normalformen*

$$\text{(II 4a)} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{F} \\ \mathfrak{A} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\text{(II 4â)} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{F}} \\ \hat{\ } \\ \hat{\ } \end{pmatrix} \right\}$$

projektiv äquivalent, so ist die allgemeinste Transformation, die sie ineinander überführt, vom Typ

$$\text{(II 4b)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1}, & \mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1}, & -\mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & -\mathfrak{N} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{R}. \end{cases}$$

— Zum Beweis nimmt man die Transformationsmatrizen ganz beliebig an, nur entsprechend unterteilt und selbstverständlich invertierbar, und führt dann einen Koeffizientenvergleich durch. — Führt die Transformation (II 4b) etwa (II 4a) in (II 4â) über, so erhält man wie in (II 1c):

$$\text{(II 4c)} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix} = \hat{\mathfrak{D}} = \mathfrak{S}_1^{-1}\cdot\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1}, & \mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & -\mathfrak{N} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

woraus sofort

$$\text{(II 4c')} \quad \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \text{(II 4c'')} \quad \hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{Q}^{-1}\cdot(\mathfrak{F} - \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1}\cdot(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}))\cdot\mathfrak{R}$$

folgt. — Wenn zwei Matrizen $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ und $\hat{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$ durch die spezielle Ähnlichkeitstransformation (II 4c) ineinander übergehen, dann werden sie „verschärft ähnlich" genannt, und die Klasse der zu $\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ verschärft ähnlichen Matrizen wird mit $\Gamma_v\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ bezeichnet. Aus (II 4c) und (II 4c') entnimmt man, daß aus $\Gamma_v\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix} = \Gamma_v\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$ sofort $\Gamma\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix} = \Gamma\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$ und $\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\hat{\mathfrak{A}})$ folgt. Das Theorem 4 in (III 2)[12]) besagt, daß auch der umgekehrte Schluß richtig ist, und so gelangt man zu dem

Satz 23. $\Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ *und* $\Gamma(\mathfrak{A})$ *bilden zusammen mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *ein vollständiges Invariantensystem der Konfiguration*[13]).

[12]) Der Leser möge die Vorwegnahme von späteren Ergebnissen entschuldigen, die von dem hier Dargestellten selbstverständlich ganz unabhängig sind, und nur deshalb für sich behandelt werden, weil sie hier durch ihren umfangreichen Beweis und ihre selbständige Bedeutung stören würden.

[13]) Daß $\Gamma(\mathfrak{D})$ oder $\Gamma(\mathfrak{A})$ allein im allgemeinen nicht ausreichen, um die Konfiguration bis auf Kollineation eindeutig zu bestimmen, erkennt man an folgenden Beispielen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0 \\ 1&0 \\ 0&1 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0 \\ 1&1 \\ 0&1 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1&1 \\ 0&1 \end{pmatrix}$$

Beweis. Zwei Konfigurationen mit den Lagebeziehungen (II 3a) bis (II 3d) lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; ist nun $\Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A}\end{pmatrix} = \Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}}\end{pmatrix}$ und $\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\hat{\mathfrak{A}})$, so ist nach Theorem 4 $\Gamma_v\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A}\end{pmatrix} = \Gamma_v\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}}\end{pmatrix}$, das heißt es gibt Matrizen $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$, die die Gln. (II 4c) bis (II 4c'') erfüllen; die aus ihnen gebildeten Transformationsmatrizen (II 4b) führen dann (II 4a) in (II 4â) über.

(II 5) *Die Ranginvarianten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Da ähnliche Matrizen stets den gleichen Rang haben, kann als Rang eines Doppelverhältnisses, d.h. einer Klasse ähnlicher Matrizen, einfach der Rang eines beliebigen Repräsentanten eingeführt werden. — Setzt man außer (II 3a) bis (II 3d) gewisse weitere Lagebeziehungen voraus, die mit Aussagen über den Rang bestimmter Doppelverhältnisse gleichwertig sind, so liefert schon $\Gamma(\mathfrak{D})$ oder $\Gamma(\mathfrak{A})$ oder sogar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$ zusammen mit jenen Lagebeziehungen ein vollständiges Invariantensystem der Konfiguration (II 3g). — Dazu sei vorweg festgestellt:

(II 5a)
$$\begin{cases} Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) = Rg\begin{pmatrix}-\mathfrak{F}\\ \mathfrak{E}-\mathfrak{A}\end{pmatrix} = Rg\left(\begin{pmatrix}-\mathfrak{E}, & \mathfrak{O}, & \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, & -\mathfrak{E}, & \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{F}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right) = Rg({}^{\circ}\mathfrak{M}_3\cdot\mathfrak{M}_4) \\ \qquad = Rg\,\mathfrak{M}_4 - Rg\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_3\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_4\end{pmatrix}^{\circ} = d_4 - d_{3\cap 4} = n-d-1-d_{3\cap 4} \end{cases}$$

[nach (I 4c), Satz 8 und (II 3f)]

(II 5b)
$$\begin{cases} Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}) = Rg\left((\mathfrak{O}, & -\mathfrak{E}, & \mathfrak{E})\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{F}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right) = Rg\left({}^{\circ}\left(\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ}, \mathfrak{M}_3\right)\cdot\mathfrak{M}_4\right) \\ = Rg\left(\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ}, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4\right) - Rg\left(\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ}, \mathfrak{M}_3\right) = d_{(1\cap 2)\cup(3\cup 4)} - d_{(1\cap 2)\cup 3} \\ = d_{1\cap 2} + d_3 + d_4 - d_{3\cap 4} - d_{(1\cap 2)\cap(3\cup 4)} - d_{(1\cap 2)\cup 3} \\ = n-d-2-d_{3\cap 4} - d_{(1\cap 2)\cap(3\cup 4)} = Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) - 1 - d_{(1\cap 2)\cap(3\cup 4)} \end{cases}$$

[nach Satz 8, (I 4b) und Satz 10].

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Die beiden ersten Konfigurationen stimmen in $\Gamma(\mathfrak{A})$, aber nicht in $\Gamma(\mathfrak{D})$ überein, die beiden letzten in $\Gamma(\mathfrak{D})$, aber nicht in $\Gamma(\mathfrak{A})$.

Nach (II 4c'') kann man mittels der Transformation (II 4b) mit $\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$ und einer geeigneten Matrix $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{F}$ alle die Zeilen eliminieren, die Linearkombinationen aus den Zeilen von $\mathfrak{E}-\mathfrak{A}$ sind. Nach dieser Transformation ist also

$$Rg\,\mathfrak{F} = Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) - Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}). \tag{II 5c}$$

Man erhält nun folgende Sätze:

Satz 24. *Eine Konfiguration mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *und* $V_3 \cap V_4 = V^{(-1,n)}$ *besitzt in diesen Lagebeziehungen und* $\Gamma(\mathfrak{D})$ *ein vollständiges Invariantensystem.*

Beweis. Zwei Konfigurationen der genannten Art lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; aus $V_3 \cap V_4 = V^{(-1,n)}$ folgt nach (II 5a) umkehrbar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) = n-d$. Wegen $\Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma(\hat{\mathfrak{D}})$ ist $\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}, & \mathfrak{R}\\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{R}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}, & \mathfrak{R}\\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{R}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}}\end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix}\mathfrak{O}, & -\mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{E}-\mathfrak{A}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}, & \mathfrak{R}\\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{R}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}, & \mathfrak{R}\\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{R}\end{pmatrix} \times$ $\times\begin{pmatrix}\mathfrak{O}, & -\hat{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{E}-\hat{\mathfrak{A}}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-\mathfrak{F}\\ \mathfrak{E}-\mathfrak{A}\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{B} = \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}$. Infolge $Rg\begin{pmatrix}-\mathfrak{F}\\ \mathfrak{E}-\mathfrak{A}\end{pmatrix} = Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) =$ $n-d$ ergibt sich daher $\mathfrak{B}=\mathfrak{O}$, d.h. $\Gamma_v\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A}\end{pmatrix} = \Gamma_v\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}}\end{pmatrix}$.

Satz 25. *Eine Konfiguration mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *und* $(V_1 \cap V_2) \cap (V_3 \cup V_4) = V^{(-1,n)}$ *besitzt in diesen Lagebeziehungen und* $\Gamma(\mathfrak{A})$ *ein vollständiges Invariantensystem.*

Beweis. Zwei Konfigurationen der genannten Art lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; aus $(V_1 \cap V_2) \cap (V_3 \cup V_4) = V^{(-1,n)}$ folgt nach (II 5b) umkehrbar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}) = Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$, also nach (II 5c) $Rg\,\mathfrak{F} = 0$, d.h. $\mathfrak{F}=\hat{\mathfrak{F}}=\mathfrak{O}$. Wegen $\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\hat{\mathfrak{A}})$ ist $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{R}$; die Transformation (II 4b) mit dieser Matrix $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{R}=\mathfrak{O}$ führt demnach schon (II 4a) in (II 4â) über.

Satz 26. *Eine Konfiguration mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *und* $(V_1 \cap V_2) \cup (V_3 \cup V_4) = (V_1 \cap V_2) \cup V_3$ *besitzt in diesen Lagebeziehungen und* $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$ *ein vollständiges Invariantensystem.*

Beweis. Zwei Konfigurationen der genannten Art lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; aus

$$(V_1 \cap V_2) \cup (V_3 \cup V_4) = (V_1 \cap V_2) \cup V_3$$

folgt nach (II 5b) umkehrbar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}) = 0$, also $\mathfrak{A}=\hat{\mathfrak{A}}=\mathfrak{E}$ und nach (II 5c) $Rg\,\mathfrak{F} = Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) = Rg(\mathfrak{E}-\hat{\mathfrak{D}}) = Rg\,\hat{\mathfrak{F}}$ und daraus $\hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{R}$; die Transformation (II 4b) mit diesen Matrizen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}=\mathfrak{O}$ führt demnach schon (II 4a) in (II 4â) über.

Ergänzend zu diesen drei Sätzen ist noch folgendes zu bemerken: Die Lagebeziehung $(V_1 \cap V_2) \cup (V_3 \cup V_4) = V^{(n,-1)}$ ist nach (II 5b) mit $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}) = n-d$ äquivalent; wegen $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}) \leq Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) \leq n-d$ folgt daraus um-

kehrbar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})=n-d$ und $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})=Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$, d.h.

$$(V_1\cap V_2)\cup(V_3\cup V_4)=V^{(n,-1)}$$

ist äquivalent zu $V_3\cap V_4=V^{(-1,n)}$ und $(V_1\cap V_2)\cap(V_3\cup V_4)=V^{(-1,n)}$.

Die Lagebeziehung $V_3=V_4$ ist nach (II 5a) mit $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})=0$ äquivalent; wegen $0\leq Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})\leq Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$ folgt daraus umkehrbar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})=Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$ und $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})=0$, d.h. $V_3=V_4$ ist äquivalent zu $(V_1\cap V_2)\cap(V_3\cup V_4)=V^{(-1,n)}$ und $(V_1\cap V_2)\cup(V_3\cup V_4)=(V_1\cap V_2)\cup V_3$.

Im Beweis des Satzes 25 wurde gezeigt, daß sich die Normalform (II 3g) zu

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{D}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{E}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{D}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{D}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{D}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$$

spezialisieren läßt, wenn $(V_1\cap V_2)\cap(V_3\cup V_4)=V^{(-1,n)}$ ist. Diese Konfiguration ist ersichtlich zerlegbar in die $2\cdot d-n+1$ (nicht weiter interessierenden) Konfigurationen $\{1,1,0,0\}$ und die Konfiguration

(II 5d)
$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{D}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$$

die Gegenstand der weiteren Untersuchungen sein wird.

(II 6) *Die Z-Invarianten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* (II 6 1) *Zerlegung durch die quasi-*JORDANsche *Normalform.* Wird (II 3a) durch $V_1\oplus V_2=V^{(n,-1)}$ ersetzt, so tritt an die Stelle von (II 3f)

$$d_1=d_2=d_3=d_4=\frac{n-1}{2}$$

(n ist jetzt also notwendig ungerade) und an die Stelle von (II 3g) die unter (II 5d) schon genannte Konfiguration, die als Verallgemeinerung der Konfiguration aus vier Punkten auf einer Geraden oder der GRASSMANNschen Konfiguration aus vier Geraden im dreidimensionalen Raum aufzufassen ist. Nach Satz 18 und 19 ist $\Gamma(\mathfrak{A})=\Gamma(\mathfrak{B})=\Gamma(\mathfrak{C})=\Gamma(\mathfrak{D})$.

Die Matrizenklasse $\Gamma(\mathfrak{A})$ wird über einem kommutativen, algebraisch abgeschlossenen Körper bekanntlich eineindeutig durch ihre JORDANsche Normalform repräsentiert, aus der ihre Eigenwerte und die dazugehörigen Elementarteilerexponenten bzw. Rangdifferenzen zu ersehen sind[14]).

Das Theorem 3 in (III 1 3)[12]) besagt, daß $\Gamma(\mathfrak{A})$ auch über einem beliebigen Körper durch eine „quasi-JORDANsche Normalform" repräsentiert werden kann, wobei der Begriff „Eigenwert" auf Elemente des Zentrums Z von K

[14]) An Stelle der sonst meist verwendeten Elementarteilerexponenten ε_k werden hier zweckmäßiger die Rangdifferenzen δ_g benutzt. Die ε_k und die δ_g bestimmen einander eineindeutig in folgender Weise: Setzt man für $\varphi(n)=\frac{n+|n}{2\cdot n}$ fest: $\varphi(0)=1$, so ist $\varepsilon_k=\sum_g\varphi(\delta_g-k)$ und $\delta_g=\sum_k\varphi(\varepsilon_k-g)$. Die ε_k bilden die „SEGREsche", und die δ_g die „WEYRsche" Charakteristik des Eigenwerts.

eingeschränkt wird, und die Summe der Vielfachheiten dieser Eigenwerte kleiner als die Reihenzahl von $\mathfrak{A}$ und sogar Null sein kann. Die quasi-JORDANsche Normalform hat also im allgemeinen die Gestalt

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{U} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathfrak{J}$ in ihrem Aufbau völlig der gewöhnlichen JORDANschen Normalform gleicht, während $\mathfrak{U}$ die „eigenwertfreie (bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmte) Restmatrix" ist.

Demnach kann man (II 5 d) weiter in

(II 6 1a) $\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$ und (II 6 1b) $\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{U}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$

zerlegen; die Konfiguration (II 6 1 b) besteht aus vier paarweise komplementären Mannigfaltigkeiten, weil $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{E} - \mathfrak{U}$ sicher invertierbar sind; weiteres läßt sich über sie nicht aussagen[15]). Die fernere Untersuchung beschränkt sich deshalb auf die Konfiguration (II 6 1 a); das Ergebnis ist, zunächst ganz grob gesagt, daß $\mathfrak{J}$ die Lagebeziehung zwischen V_4 und der von V_1, V_2 und V_3 erzeugten SEGREschen Mannigfaltigkeit eineindeutig festlegt.

(II 6 2) *Die* SEGRE*sche Mannigfaltigkeit* W_{123}. Obwohl die SEGREschen Mannigfaltigkeiten in der Literatur[16]) schon ausgiebig behandelt worden sind, sei hier eine kurze Repitition gestattet, um eine geeignete Bezeichnungsweise zu vereinbaren.

Aus den Mannigfaltigkeiten V_1, V_2 und V_3 der Konfiguration (II 6 1 a) kann man zwei neue, nichtlineare $\frac{n+1}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeiten ableiten: ($\mathfrak{J}$ sei jetzt $\frac{n+1}{2}$-reihig.)

1. Durch den Punkt $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ \mathfrak{o}\end{pmatrix} \in V_1$ $(\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o})$ verläuft genau eine Gerade $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$, die auch V_2 $\left(\text{in } \begin{pmatrix}\mathfrak{o}\\ \mathfrak{x}\end{pmatrix}\right)$ und V_3 $\left(\text{in } \begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ \mathfrak{x}\end{pmatrix}\right)$ schneidet. Die Treffgeraden $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$ bilden offenbar eine $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-parametrige Schar und haben die Koordinatenmatrix $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}, \mathfrak{o}\\ \mathfrak{o}, \mathfrak{x}\end{pmatrix}$. Ein beliebiger Punkt auf der Treffgeraden $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$ wird daher durch

(II 6 2a) $$\begin{pmatrix}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{u}\\ \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{v}\end{pmatrix}$$

angegeben. Die Menge aller Punkte (II 6 2a) ist die $\frac{n+1}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit W_{123}.

[15]) Es ist ein sehr reizvolles, aber wohl recht schwieriges Problem, ob sich notwendige und hinreichende Kriterien für die Ähnlichkeit von eigenwertfreien Matrizen angeben lassen.

[16]) Vgl. [1], S. 358.

2. V_1, V_2 und V_3 gehören der einparametrigen Schar von $\frac{n-1}{2}$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten $V(a)$ an, deren Koordinatenmatrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{E} \cdot u \\ \mathfrak{E} \cdot v \end{pmatrix}$ ist, wobei u und v nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, und $a = u \cdot v^{-1}$ im Falle $v \neq 0$ bzw. $a = \infty$ im Falle $v = 0$ gesetzt wird. Offenbar ist $V_1 = V(\infty)$, $V_2 = V(0)$ und $V_3 = V(1)$. Ein beliebiger Punkt auf $V(a)$ wird also durch

$$\text{(II 6 2b)} \qquad \begin{pmatrix} u \cdot \mathfrak{x} \\ v \cdot \mathfrak{x} \end{pmatrix}$$

angegeben. Die Menge aller Punkte (II 6 2b) ist die $\frac{n+1}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit ${}_aW_{123}$.

Ist $n \geq 3$, so sind ${}_\mathfrak{x}W_{123}$ und ${}_aW_{123}$ genau dann identisch, wenn der Koeffizientenkörper kommutativ ist. — Da die Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, wie schon gesagt, in Z liegen [daher werden sie die Z-Invarianten von $\Gamma(\mathfrak{A})$ genannt], können wir uns also jetzt auf Z als (kommutativen) Koeffizientenkörper beschränken. Dann ist ${}_\mathfrak{x}W_{123} = {}_aW_{123} = W_{123}$ die von V_1, V_2 und V_3 erzeugte Segresche Mannigfaltigkeit im $P_n(Z)$.

Über die W_{123} ist noch folgendes zu bemerken: Es ist genau dann $V(a_1) \cap V(a_2) = V^{(-1,n)}$, wenn $a_1 \neq a_2$ ist; ebenso ist $G(\mathfrak{x}_1) \cap G(\mathfrak{x}_2) = V^{(-1,n)}$ genau dann, wenn $Rg(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = 2$ ist. $V(a_0)$ und $G(\mathfrak{x}_0)$ schneiden sich stets in genau einem Punkt, nämlich in $\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_0 \cdot u_0 \\ \mathfrak{x}_0 \cdot v_0 \end{pmatrix} \left(\frac{u_0}{v_0} = a_0 \right)$; durch jeden Punkt $\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_0 \cdot a_0 \\ \mathfrak{x}_0 \end{pmatrix}$ der W_{123} verläuft andererseits genau eine $V(a)$ und eine $G(\mathfrak{x})$, und zwar die $V(a_0)$ und die $G(\mathfrak{x}_0)$.

Die vier Mannigfaltigkeiten $V_1 = V(\infty)$, $V_2 = V(0)$, $V_3 = V(1)$ und $V(a)$ werden von einer $G(\mathfrak{x})$ in den vier Punkten $\begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{x} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \mathfrak{x} \cdot a \\ \mathfrak{x} \end{pmatrix}$ geschnitten, die das gewöhnliche Doppelverhältnis a besitzen. — Daraus ist zu schließen: Bei einer Permutation von V_1, V_2 und V_3 geht die W_{123} zwar offensichtlich in sich über, ihre a-Skala unterliegt dabei jedoch den von den gewöhnlichen Doppelverhältnissen her bekannten Transformationen. Die Indizes in dem Symbol W_{123} geben also nicht nur die erzeugenden Mannigfaltigkeiten V_1, V_2 und V_3 an, sondern legen durch ihre Reihenfolge auch die a-Skala auf der W_{123} fest.

(II 6 3) *Die Lagebeziehung der V_i zur W_{123}.* $a \in Z$ sei ein Eigenwert von $\mathfrak{J}$, $\delta_k = Rg(\mathfrak{J} - a \cdot \mathfrak{E})^{k-1} - Rg(\mathfrak{J} - a \cdot \mathfrak{E})^k$ die zu a gehörigen, mit wachsendem k monoton abnehmenden Rangdifferenzen; es gibt je δ_k linear unabhängige Hauptvektoren k. Stufe $\mathfrak{x}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)}$, die die Gleichungen

$$(\mathfrak{J} - a \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)} = \mathfrak{x}_i^{(k-1)} \qquad (i = 1, \ldots, \delta_k;\ k = 2, \ldots, e)$$

bzw.

$$(\mathfrak{J} - a \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(1)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \delta_1)$$

erfüllen[17]). — Die $(\delta_k - 1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten $V^{(k)}(a)$ werden durch die kovarianten Koordinatenmatrizen

$$\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{J}-a\cdot\mathfrak{E})^{k-1}\cdot(\mathfrak{x}_1^{(k)},\dots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)})\right)=\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_1^{(1)},\dots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(1)})\right)=\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1^{(1)}\cdot a,\dots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(1)}\cdot a\\ \mathfrak{x}_1^{(1)},\quad\dots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(1)}\end{pmatrix}$$

definiert. Offenbar ist

$$V(a)\geqq V^{(1)}(a)\geqq V^{(2)}(a)\geqq\cdots\geqq V^{(o)}(a).$$

Um unnötigen Komplikationen aus dem Wege zu gehen, wird bei dem nun folgenden Satz angenommen, daß K und damit auch sein Zentrum Z die Charakteristik 0 hat.

Satz 27. *V_4 und die* SEGREsche *Mannigfaltigkeit W_{123} schneiden sich in der $V^{(1)}(a)$ und berühren sich in der $V^{(k)}(a)$ von $(k-1)$. Ordnung.*

— Darunter ist folgendes zu verstehen: Ist P ein beliebiger Punkt der $V^{(k)}(a)$, der jedoch nicht in der $V^{(k+1)}(a)$ liegt, so gibt es mindestens ein Paar von Kurven, von denen die eine ganz in V_4 und die andere ganz in W_{123} enthalten ist, die regulär durch P verlaufen und sich dort von $(k-1)$. Ordnung berühren; es gibt aber keine derartigen Kurven, die sich dort von höherer Ordnung berühren. —

Beweis. 1. Die in V_4 gelegene Kurve

$$\text{(II 6 3a)}\qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_i^{(1)}+\mathfrak{x}_i^{(2)}\cdot x+\cdots+\mathfrak{x}_i^{(k)}\cdot x^{k-1})\qquad i=1,\dots,\delta_k$$

mit dem Kurvenparameter $x\in Z$ und die in W_{123} gelegene Kurve

$$\text{(II 6 3b)}\quad\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\cdot(a+y)\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_i^{(1)}+\mathfrak{x}_i^{(2)}\cdot y+\cdots+\mathfrak{x}_i^{(k)}\cdot y^{k-1})\\ \quad=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_i^{(1)}+\mathfrak{x}_i^{(2)}\cdot y+\cdots+\mathfrak{x}_i^{(k)}\cdot y^{k-1})+\begin{pmatrix}\mathfrak{x}^{(k)}\cdot y^k\\ 0\end{pmatrix}\end{cases}$$

mit dem Kurvenparameter $y\in Z$ verlaufen offensichtlich regulär durch $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_i^{(1)}\cdot a\\ \mathfrak{x}_i^{(1)}\end{pmatrix}$ und berühren sich dort von $(k-1)$. Ordnung[18]).

2. Die allgemeinsten in V_4 bzw. W_{123} gelegenen Kurven sind $\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{x}(x)$ bzw. $\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\cdot f(y)\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{x}(y)$. Aus der Forderung, daß sie an der Stelle $x=0$ bzw. $y=0$ regulär sein und sich dort von mindestens $(k-1)$. Ordnung berühren sollen, ergibt sich im wesentlichen die oben angegebene Darstellung für sie.

Bei einer Permutation von V_1, V_2 und V_3 ändert sich die eben beschriebene Lagebeziehung der V_4 zur W_{123} nur insoweit, als a den von den gewöhnlichen Doppelverhältnissen her bekannten Transformationen unterliegt.

[17]) Vgl. Abschnitt (III 1).

[18]) Die Ableitungen werden rein formal gebildet, so daß der Ausdruck „Berührung" keine topologische Bedeutung zu besitzen braucht.

Das folgt einerseits aus dem letzten Absatz des Abschnitts (II 6 2), andererseits auch aus den Gleichungen

$$\text{(II 6 3 c)} \quad \begin{cases} ((\mathfrak{E}-\mathfrak{J})-(1-a)\cdot\mathfrak{E}) = -(\mathfrak{J}-a\cdot\mathfrak{E}) & \text{und} \\ \left(\mathfrak{J}^{-1}-\frac{1}{a}\cdot\mathfrak{E}\right) = -\frac{1}{a}\cdot\mathfrak{J}^{-1}\cdot(\mathfrak{J}-a\cdot\mathfrak{E}) \end{cases}$$

die besagen, daß sich die Eigenwerte bei den Permutationen der Mannigfaltigkeiten unter Erhaltung der zu ihnen gehörigen Rangdifferenzen genau so transformieren wie die Doppelverhältnismatrizen selbst. — Hiernach ist es nur noch nötig, das Verhalten der betrachteten Lagebeziehung gegenüber den Permutationen der KLEINschen Vierergruppe zu untersuchen:

Satz 28. *Besitzt $\mathfrak{J}$ nicht den Eigenwert 0 bzw. 1 bzw. weder 0 noch 1, so stimmt die Lagebeziehung der V_4 zur W_{123} überein mit der der V_3 zur W_{214} bzw. der V_2 zur W_{341} bzw. der V_1 zur W_{432}.*

Beweis. Die Transformationen

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}, \mathfrak{J} \\ \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{J}^{-1}; \quad \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{J}^{-1},$$

bzw.

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, -\mathfrak{J} \\ \mathfrak{E}, -\mathfrak{E} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{S}_2 = -\mathfrak{E}; \quad \mathfrak{S}_3 = (\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1}; \quad \mathfrak{S}_4 = -(\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1},$$

bzw.

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} -\mathfrak{E}, & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{J}^{-1}, & \mathfrak{E} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{S}_1 = -\mathfrak{J}; \quad \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{J}\cdot(\mathfrak{J}-\mathfrak{E})^{-1}; \quad \mathfrak{S}_4 = (\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1}$$

führen

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\} \quad \text{in} \quad \left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$$

bzw.

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}\right\}$$

über.

Schließlich ist noch festzustellen:

Satz 29. *Die Lagebeziehung der V_4 zur W_{123} ist in sich dual.*

Beweis. Offenbar ist

$$^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix} \overset{s}{\sim} (\mathfrak{O}, -\mathfrak{E}); \quad ^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix} \overset{s}{\sim} (\mathfrak{E}, \mathfrak{O}); \quad ^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix} \overset{s}{\sim} (\mathfrak{E}, -\mathfrak{E}) \quad \text{und} \quad ^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix} \overset{s}{\sim} (\mathfrak{E}, -\mathfrak{J})$$

und $\begin{Bmatrix}(\mathfrak{O}, -\mathfrak{E})\\ (\mathfrak{E}, \mathfrak{O})\\ (\mathfrak{E}, -\mathfrak{E})\\ (\mathfrak{E}, -\mathfrak{J})\end{Bmatrix}$ geht durch $\mathfrak{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}$ in $\begin{Bmatrix}(\mathfrak{E}, \mathfrak{O})\\ (\mathfrak{O}, \mathfrak{E})\\ (\mathfrak{E}, \mathfrak{E})\\ (\mathfrak{J}, \mathfrak{E})\end{Bmatrix}$ über[19]).

[19]) Über einem kommutativen Körper sind transponierte Matrizen ähnlich: $\Gamma(\mathfrak{J}') = \Gamma(\mathfrak{J})$.

(II 6 4) *Zusammenfallende Doppelverhältnisse.* Bei den nun folgenden Untersuchungen muß gegebenenfalls angenommen werden, daß $\boldsymbol{K}$ und damit auch sein Zentrum $\boldsymbol{Z}$ nicht die Charakteristik 2 hat, und daß $-\boldsymbol{3}$ in $\boldsymbol{Z}$ ein Quadrat ist[20]). — Es kann vorkommen, daß einige der bei den Permutationen der vier Mannigfaltigkeiten auftretenden sechs Doppelverhältnisse einander gleich sind, und zwar sind folgende acht Fälle zu unterscheiden[21]):

$$\text{(II 6 4a)}\quad \mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{-1};\quad \mathfrak{J}=\mathfrak{E}-\mathfrak{J};\quad \mathfrak{J}=\mathfrak{J}\cdot(\mathfrak{J}-\mathfrak{E})^{-1};\quad \mathfrak{J}=(\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1}$$

$$\text{(II 6 4b)}\quad \begin{cases} \Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma(\mathfrak{J}^{-1});\quad \Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma(\mathfrak{E}-\mathfrak{J});\quad \Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma\big(\mathfrak{J}\cdot(\mathfrak{J}-\mathfrak{E})^{-1}\big); \\ \Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma\big((\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1}\big). \end{cases}$$

— Die Gln. (II 6 4a) gehen beziehentlich in

$$(\mathfrak{J}+\mathfrak{E})\cdot(\mathfrak{J}-\mathfrak{E})=\mathfrak{O};\quad \mathfrak{J}-\frac{1}{2}\cdot\mathfrak{E}=\mathfrak{O};\quad (\mathfrak{J}-2\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{J}=\mathfrak{O};$$

$$\Big(\mathfrak{J}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\cdot\mathfrak{E}\Big)\cdot\Big(\mathfrak{J}-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\cdot\mathfrak{E}\Big)=\mathfrak{O}$$

über; das Minimalpolynom von $\mathfrak{J}$ ist also Teiler des jeweils linksstehenden Polynoms; demnach besitzt $\mathfrak{J}$ beziehentlich die schon als entsprechende gewöhnliche Doppelverhältnisse bekannten Eigenwerte

$$\text{(II 6 4c)}\qquad -1,1;\quad \frac{1}{2};\quad 2,0;\quad \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

und zwar ist der zu ihnen gehörende Minimalexponent höchstens 1[17]). — Die Gln. (II 6 4b) werden an Hand des ersten Falles gedeutet: Einerseits besitzen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}^{-1}$ die gleichen Eigenwerte, andererseits treten nach der an (II 6 3c) anknüpfenden Bemerkung in $\mathfrak{J}^{-1}$ die Eigenwerte $\frac{1}{a}$ mit den gleichen zugehörigen Rangdifferenzen auf wie die Eigenwerte a in $\mathfrak{J}$. Demnach kann $\mathfrak{J}$ die Eigenwertpaare $a, \frac{1}{a}$ mit jeweils übereinstimmenden zugehörigen Rangdifferenzen sowie die Eigenwerte -1 oder 1 besitzen. In dieser Weise gehören zu

dem Fall	die Eigenwerte	und Eigenwertpaare (-tripel)
$\Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma(\mathfrak{J}^{-1})$	$-1,\ 1$	$a,\ \frac{1}{a}$
$\Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma(\mathfrak{E}-\mathfrak{J})$	$\frac{1}{2}$	$a,\ 1-a$
$\Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma\big(\mathfrak{J}\cdot(\mathfrak{J}-\mathfrak{E})^{-1}\big)$	$2,\ 0$	$a,\ \frac{a}{a-1}$
$\Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma\big((\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1}\big)$	$\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$	$a,\ \frac{1}{1-a},\ \frac{a-1}{a}$

Es gibt sogar Doppelverhältnisse, die gegenüber allen Permutationen der vier Mannigfaltigkeiten invariant sind; das ist offenbar der Fall, wenn $\mathfrak{J}$ die

[20]) Besonders interessant ist der Fall, daß $\boldsymbol{K}$ die Charakteristik 3 hat.

[21]) Aus $\mathfrak{J}=(\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1}$ folgt umkehrbar $\mathfrak{J}=\mathfrak{E}-\mathfrak{J}^{-1}$ und aus $\Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma((\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1})$ ebenso $\Gamma(\mathfrak{J})=\Gamma(\mathfrak{E}-\mathfrak{J}^{-1})$.

Eigenwertsextupel $a, 1-a, \frac{1}{a}, \frac{a}{a-1}, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}$, das Eigenwerttripel $-1, 2, \frac{1}{2}$ oder das Eigenwertpaar $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ mit jeweils übereinstimmenden zugehörigen Rangdifferenzen aufweist[20]).

(II 7) WEISNER*sche Doppelverhältnisse.* WEISNER hat in [8] eine Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses angegeben, die sich mit der hier dargestellten Verallgemeinerung ohne weiteres verbinden läßt; von einer näheren Ausführung wird jedoch aus Platzmangel, und weil dabei keine wesentlich neuen Ergebnisse gewonnen werden, abgesehen.

III. Ähnlichkeitstransformationen über nichtkommutativen Körpern.

(III 1) *Die quasi-*JORDAN*sche Normalform.* (III 1 1) *Eigenwerte im Zentrum eines nichtkommutativen Körpers.* Bekanntlich wird die Klasse $\Gamma(\mathfrak{A})$ der zu einer n-reihigen Matrix $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrizen $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}$ über einem kommutativen, algebraisch abgeschlossenen Körper eineindeutig durch die JORDANsche Normalform repräsentiert, aus der ihre Eigenwerte und die zugehörigen Elementarteilerexponenten bzw. Rangdifferenzen[14]) zu ersehen sind. Bei dem Beweis dieses Theorems spielt die charakteristische Gleichung $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}| = 0$ eine grundlegende Rolle; zu der bei ihrer Aufstellung notwendigen Determinantenbildung wird die Kommutativität des Koeffizientenkörpers benutzt, und seine algebraische Abgeschlossenheit sichert die Existenz von n Lösungen. Will man das Theorem zunächst auf einen beliebigen kommutativen Körper übertragen, so muß man also gegebenenfalls auf eine vollständige Reduktion, d. h. darauf, daß die Summe der Vielfachheiten der Eigenwerte die Reihenzahl n von $\mathfrak{A}$ erreicht, verzichten. Die Kommutativität kann man vorerst ganz entbehren, indem man definiert, daß das Körperelement a ein Eigenwert von $\mathfrak{A}$ ist, wenn $(\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})$ nicht invertierbar ist; die so eingeführten Eigenwerte sind jedoch nur genau dann invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$, wenn sie dem Zentrum Z von K angehören[22]), und daher wird der Begriff „Eigenwert" von vornherein auf Elemente von Z eingeschränkt. Eine Matrix, die in diesem Sinne keine Eigenwerte besitzt, wird „eigenwertfrei" genannt. Die Invarianz der Eigenwerte gegenüber Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$ ist leicht einzusehen: Ist $P(\mathfrak{A})$ ein Polynom aus dem Polynomring $Z[\mathfrak{A}]$, so gilt

$$P(\mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^{-1} \cdot P(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{P} \tag{III 1 1a}$$

daraus folgt für $a \in Z$ und jede natürliche Zahl g:

$$Rg\left((\mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P} - a \cdot \mathfrak{E})^g\right) = Rg\left(\mathfrak{P}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^g \cdot \mathfrak{P}\right) = Rg\left((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^g\right). \tag{III 1 1b}$$

[22]) Ist $a \notin Z$, so gibt es mindestens ein b derart, daß $b^{-1} \cdot a \cdot b = c \neq a$ ist. Setzt man $\mathfrak{P} = b \cdot \mathfrak{E}$, und $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P} = b^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot b$, so ist $\widehat{\mathfrak{A}} - c \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{P}$. Ist nun a ein „Eigenwert" von $\mathfrak{A}$, so geht es also in den von ihm verschiedenen „Eigenwert" c der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrix $\widehat{\mathfrak{A}}$ über.

Diese Gleichung sichert nicht nur die Invarianz der Eigenwerte $a \in Z$ von $\mathfrak{A}$, sondern auch die der zugehörigen „Rangdefekte" $n - Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{\varepsilon})$ und „Rangdifferenzen" $Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{\varepsilon-1}) - Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{\varepsilon})$ gegenüber den Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$.

(III 1 2) Einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{X}$ sei eine n-reihige Matrix; mit wachsendem ε nehmen die Rangdefekte $n - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon}$ monoton zu, und die Rangdifferenzen $Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon-1} - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon}$ nehmen monoton ab:*

(III 1 2a) $\quad Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon} \leq Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon-1} \quad$ *bzw.* $\quad n - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon} \geq n - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon-1}.$

(III 1 2b) $\quad Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon} - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon+1} \leq Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon-1} - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon}.$

Beweis. 1. (III 1 2a) folgt unmittelbar aus Satz 11. —

2. $\mathfrak{X}^{\varepsilon}$ erzeuge rechtsseitig den Unterraum $X_{\varepsilon} \subseteqq E: \mathfrak{X}^{\varepsilon} \xrightarrow{d} X_{\varepsilon}$. Aus $\mathfrak{X}^{\varepsilon} = \mathfrak{X}^{\varepsilon-1} \cdot \mathfrak{X}$ folgt nach Satz 1: $X_{\varepsilon} \subseteqq X_{\varepsilon-1}$ [vgl. mit (III 1 2a)]. Demnach existieren Unterräume $Y_{\varepsilon} \subseteqq E$, so daß gilt: $X_{\varepsilon} \oplus Y_{\varepsilon} = X_{\varepsilon-1}$. Eine rechtsseitig erzeugende Matrix von Y_{ε} sei $\mathfrak{Y}_{\varepsilon}$: $\mathfrak{Y}_{\varepsilon} \xrightarrow{d} Y_{\varepsilon}$. Es folgt:

(III 1 2c) $\quad Rg\,\mathfrak{Y}_{\varepsilon} = Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon-1} - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon}$ und (III 1 2d) $\quad (\mathfrak{X}^{\varepsilon}, \mathfrak{Y}_{\varepsilon}) \overset{d}{\sim} \mathfrak{X}^{\varepsilon-1}.$

Nach Multiplikation mit $\mathfrak{X}$ von links ergibt (III 1 2d): $(\mathfrak{X}^{\varepsilon+1}, \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_{\varepsilon}) \overset{d}{\sim} \mathfrak{X}^{\varepsilon}$. Daraus schließt man: $Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon} \leq Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon+1} + Rg(\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_{\varepsilon})$ und erhält mit (III 1 2c) die Ungleichung (III 1 2b):

$$Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon} - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon+1} \leq Rg(\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_{\varepsilon}) \leq Rg\,\mathfrak{Y}_{\varepsilon} = Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon-1} - Rg\,\mathfrak{X}^{\varepsilon}.$$

Ist a ein Eigenwert von $\mathfrak{A}$, so existiert nach Hilfssatz 1 eine kleinste natürliche Zahl e derart, daß für jede natürliche Zahl g gilt: $Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{e+\varepsilon}) = Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{e})$. Diese Zahl e ist nach (III 1 1b) gegenüber Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$ invariant, und wird der zu a gehörige „Minimalexponent"[23]) genannt; der Rangdefekt $p = n - Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{e})$ heißt die „Vielfachheit"[24]) von a. — $\mathfrak{x}^{(k)}$ ist ein zu a gehöriger „Hauptvektor k. Stufe", wenn

$$(\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{k} \cdot \mathfrak{x}^{(k)} = \mathfrak{o}, \quad \text{aber} \quad (\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{k-1} \cdot \mathfrak{x}^{(k)} \neq \mathfrak{o}$$

ist. Es gibt offenbar $\delta_k = Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{k-1}) - Rg((\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E})^{k})$ linear unabhängige Hauptvektoren k. Stufe $\mathfrak{x}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)}$ derart, daß jede echte Linearkombination aus ihnen ebenfalls ein Hauptvektor k. Stufe ist. Die Vektoren

$$(\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_1^{(k)}, \ldots, (\mathfrak{A} - a \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)}$$

sind daher wiederum linear unabhängige Hauptvektoren $(k-1)$. Stufe. Von den Hauptvektoren der höchsten Stufe e ausgehend, können also die sämt-

[23]) e entspricht dem höchsten zu a gehörigen Elementarteilerexponenten in der sonst üblichen Darstellungsweise und hat hier, wie Hilfssatz 3 zeigt, eine analoge Bedeutung.

[24]) p stimmt mit der Vielfachheit von a in der sonst üblichen Darstellungsweise überein.

lichen zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Hauptvektoren

$$\text{(III 1 2e)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_1^{(e)} \cdots \mathfrak{x}_{\delta_e}^{(e)} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \mathfrak{x}_1^{(k)} \cdots\cdots \mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \mathfrak{x}_1^{(1)} \cdots\cdots\cdots \mathfrak{x}_{\delta_1}^{(1)} \end{cases}$$

so gewählt werden, daß stets gilt:

$$\text{(III 1 2f)} \qquad \begin{cases} (\mathfrak{A} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)} = \mathfrak{x}_i^{(k-1)} & (i = 1, \ldots, \delta_k;\ k = 2, \ldots, e) \\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(1)} = \mathfrak{o} & (i = 1, \ldots, \delta_1). \end{cases}$$

Die Hauptvektoren 1. Stufe $\mathfrak{x}_i^{(1)}$ heißen auch „Eigenvektoren". — Aus den Gln. (III 1 2f) entnimmt man für $P(\mathfrak{A}) \in \boldsymbol{Z}[\mathfrak{A}]$[25]:

$$\text{(III 1 2g)} \qquad P(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{P^{(\nu)}(\mathfrak{a})}{\nu!} \cdot \mathfrak{x}_i^{(k-\nu)}$$

— Alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Hauptvektoren spannen den zu $\mathfrak{a}$ gehörigen „Hauptraum" $\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}) \subseteq \boldsymbol{E}$ auf[26]:

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{E})^e \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)} = \mathfrak{o}; \qquad (i = 1, \ldots, \delta_k;\ k = 1, \ldots, e)$$

$$\left((\mathfrak{A} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{E})^e\right)^{\circ} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}); \qquad \dim \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}) = n - Rg\left((\mathfrak{A} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{E})^e\right) = p.$$

Hilfssatz 2. *$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ seien verschiedene Eigenwerte von $\mathfrak{A}$; die zugehörigen Minimalexponenten, Vielfachheiten und Haupträume seien beziehentlich $e_1, \ldots, e_r$ und $p_1, \ldots, p_r$ sowie $\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_1), \ldots, \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_r)$. Keiner von diesen Haupträumen schneidet die Verbindung der anderen; es ist also z. B.*

$$\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_1) \cap \left(\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_r)\right) = \boldsymbol{O}.$$

Beweis. Aus

$$\mathfrak{x} \in \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_1) \cap \left(\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_r)\right) \text{ folgt } \mathfrak{x} \in \left(\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_r)\right),$$

also

$$\text{(III 1 2h)} \qquad (\mathfrak{A} - \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{E})^{e_2} \cdot \ \ldots\ \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{e_r} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

andererseits ist $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_1)$; da kein Hauptvektor Linearkombination von Hauptvektoren niederer Stufe ist, ergibt sich aus (III 1 2h) und (III 1 2g) wegen $(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2)^{e_2} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_r)^{e_r} \neq \boldsymbol{0}$ leicht $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$.

$\mathfrak{A}$ besitzt demnach höchstens n verschiedene Eigenwerte, weil $p_1 + \cdots + p_r = \dim\left(\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_1) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_r)\right) \leq n$ ist. Daher kann man annehmen, daß $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ bereits alle Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ sind. — Der $(p_1 + \cdots + p_r)$-dimensionale Unterraum $\boldsymbol{M}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_r)$ heißt der „Maximalraum" von $\mathfrak{A}$. Ferner wird $M(\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A} - \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{e_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{e_r}$ das „Minimalpolynom" von $\mathfrak{A}$

[25]) Diese Schreibweise ist bei Zulassung eines Körpers von Primzahlcharakteristik zwar lax, ist aber noch vertretbar, weil die Ableitung $P^{(\nu)}(\mathfrak{a})$ stets den Faktor $\nu!$ enthält. Übrigens interessiert bei der Anwendung dieser Formel nur das erste Glied $P(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)}$.

[26]) Das Zeichen $^{\circ}$ wird im folgenden nur in der unter (I 4) definierten Bedeutung, nicht als Exponent gebraucht.

genannt. — Über diese Bezeichnungen sowie die Beziehung zwischen dem Maximalraum und dem Minimalpolynom erhält man Aufschluß durch den

Hilfssatz 3. *Das Polynom* $P(\mathfrak{A}) \in \boldsymbol{Z}[\mathfrak{A}]$ *sei über* $\boldsymbol{Z}$ *vollständig* (in Linearfaktoren) *zerlegbar; dann gilt* $(P(\mathfrak{A}))^{\circ} \xrightarrow{d} \overline{\boldsymbol{M}} \leqq \boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$ *und es ist genau dann* $\overline{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$, *wenn das Minimalpolynom* $M(\mathfrak{A})$ *Teiler von* $P(\mathfrak{A})$ *ist.* — $\boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$ ist also der größte Unterraum aus $\boldsymbol{E}$, dessen Vektoren zu den Zeilen eines über $\boldsymbol{Z}$ vollständig zerlegbaren Polynoms von $\mathfrak{A}$ konträr sind, und $M(\mathfrak{A})$ ist das über $\boldsymbol{Z}$ vollständig zerlegbare Polynom niedrigsten Grades, dessen Zeilen zu allen Vektoren aus $\boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$ konträr sind. —

Beweis. Es sei

$$P(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{c} \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{b}_1 \cdot \mathfrak{E})^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{b}_t \cdot \mathfrak{E})^{\varepsilon_t} \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r}$$
$$(\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{Z};\ \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}),$$

wobei $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t \in \boldsymbol{Z}$ keine Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ sein sollen. Die Unterräume $\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)$ werden eingeführt durch

$$((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1})^{\circ} \xrightarrow{d} \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \leqq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1), \ldots, ((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r})^{\circ} \xrightarrow{d} \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r) \leqq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r).$$

Offenbar ist genau dann $\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_\varrho) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_\varrho)$, wenn $f_\varrho \geq e_\varrho$ ist. — Jeder Vektor $\mathfrak{x} \in \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)$ erfüllt die Gleichung $P(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, d. h. $((\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r))$ ist in dem von $(P(\mathfrak{A}))^{\circ}$ rechtsseitig erzeugten Unterraum $\overline{\boldsymbol{M}}$ enthalten: $(\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)) \leqq \overline{\boldsymbol{M}}$, und es gilt unter Benutzung von Hilfssatz 2:

$$Rg\,(P(\mathfrak{A})) = n - dim\,\overline{\boldsymbol{M}} \leq n - (dim\,\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + dim\,\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)).$$

Andererseits folgt aus Satz 11 durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned} Rg\,(P(\mathfrak{A})) &= Rg\,((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r}) \\ &\geq Rg\,((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1}) + \cdots + Rg\,((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r}) - (r-1) \cdot n \\ &= n - (dim\,\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + dim\,\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)) \end{aligned}$$

Demnach ist

$$Rg\,(P(\mathfrak{A})) = n - (dim\,\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + dim\,\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r))$$

und

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \oplus \cdots \oplus \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r) \leqq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{M}(\mathfrak{A}).$$

(III 1 3) *Existenzbeweis der quasi-*JORDANschen *Normalform.*

Theorem 3. *Eine n-reihige Matrix* $\mathfrak{A}$ *über einem nichtkommutativen Körper* $\boldsymbol{K}$ *wird durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation in*

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{U} \end{pmatrix}$$

übergeführt; dabei ist $\mathfrak{J}$ *eine* $(p_1 + \cdots + p_r)$*-reihige* JORDANsche *Normalform, aus der die Eigenwerte* $\boldsymbol{a}_\varrho \in \boldsymbol{Z}$ *von* $\mathfrak{A}$ *nebst zugehörigen Rangdifferenzen bzw. Elementarteilerexponenten ersichtlich sind. Die* $(n - (p_1 + \cdots + p_r))$*-reihige Matrix* $\mathfrak{U}$ *ist eigenwertfrei und bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt*[27]).

[27]) Das Theorem 3 kann auch aus [5] hergeleitet werden; jedoch scheint DIEUDONNÉ diese Umformung seiner Ergebnisse nicht beabsichtigt zu haben. Es gilt natürlich auch in einem kommutativen, algebraisch abgeschlossenen Körper und reduziert sich dort auf die Behauptung der Existenz der gewöhnlichen JORDANschen Normalform, weil es dort keine eigenwertfreien Matrizen gibt.

Beweis. 1. Eine n-reihige Matrix $\mathfrak{P}$ wird in folgender Weise konstruiert: ihre $(p_1+\cdots+p_r)$ ersten Spalten seien die sämtlichen, nach Hilfssatz 2 linear unabhängigen Hauptvektoren von $\mathfrak{A}$, in der üblichen Weise[25]) geordnet; die restlichen Spalten werden so gewählt, daß $\mathfrak{P}$ invertierbar ist. Dann ergibt sich zunächst:

$$\mathfrak{P}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{P}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}.$$

2. Angenommen, $\mathfrak{U}$ besäße Eigenwerte; dann gibt es nach dem eben Bewiesenen eine $(n-(p_1+\cdots+p_r))$-reihige invertierbare Matrix $\mathfrak{R}$ derart, daß

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{J}},\mathfrak{X}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}$$

wird, wobei $\overline{\mathfrak{J}}$ die zu $\mathfrak{U}$ gehörige JORDANsche Normalform darstellt. Ist $\overline{M}(\mathfrak{U})$ das Minimalpolynom von $\mathfrak{U}$, so ist

$$M\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{J}},\mathfrak{X}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}\cdot\overline{M}\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{J}},\mathfrak{X}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{O},&\mathfrak{Y}_1,&\mathfrak{Y}_2\\ \mathfrak{O},&M(\overline{\mathfrak{J}}),&\mathfrak{Y}_3\\ \mathfrak{O},&\mathfrak{O},&M(\overline{\mathfrak{U}})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overline{M}(\mathfrak{J}),&\mathfrak{Z}_1,&\mathfrak{Z}_2\\ \mathfrak{O},&\mathfrak{O},&\mathfrak{Z}_3\\ \mathfrak{O},&\mathfrak{O},&\overline{M}(\mathfrak{U})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathfrak{O},\mathfrak{O},\mathfrak{Y}_1\cdot\mathfrak{Z}_3+\mathfrak{Y}_2\cdot\overline{M}(\mathfrak{U})\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},M(\overline{\mathfrak{J}})\cdot\mathfrak{Z}_3+\mathfrak{Y}_3\cdot\overline{M}(\mathfrak{U})\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},M(\mathfrak{U})\cdot\overline{M}(\mathfrak{U})\end{pmatrix}$$

im Widerspruch zu Hilfssatz 3, wonach kein über $\boldsymbol{Z}$ vollständig reduzibles Polynom aus $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{A}]$ einen kleineren Rang als $M(\mathfrak{A})$ besitzt. $\mathfrak{U}$ ist daher eigenwertfrei.

3. Sind die n-reihigen Matrizen $\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\overline{\mathfrak{X}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}$ ähnlich, so existiert eine n-reihige invertierbare Matrix $\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}$, so daß

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\overline{\mathfrak{X}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}$$

also nach (III 1 1a) auch

$$\left(M\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\cdot\left(M\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\overline{\mathfrak{X}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}\right),$$

d.h.

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{O},&\mathfrak{Y}\\ \mathfrak{O},&M(\mathfrak{U})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{O},&\mathfrak{Y}\\ \mathfrak{O},&M(\overline{\mathfrak{U}})\end{pmatrix}$$

[25]) Unter den Eigenwerten wird eine beliebige Reihenfolge festgelegt. Die zu einem Eigenwert gehörigen Hauptvektoren werden in der Reihenfolge $\mathfrak{x}_1^{(1)}\dots\mathfrak{x}_1^{(s)}$; $\mathfrak{x}_2^{(1)},\mathfrak{x}_2^{(2)}\dots$; $\mathfrak{x}_3^{(1)}\dots$ angeordnet [vgl. (III 1 2e) und (III 1 2f)].

gilt. Daraus folgt $M(\mathfrak{U})\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{O}$; $M(\mathfrak{U})$ ist invertierbar, weil $\mathfrak{U}$ als eigenwertfrei bekannt ist; infolgedessen ist $\mathfrak{B}=\mathfrak{O}$,

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{O}^{-1}, & -\mathfrak{O}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{O},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\mathfrak{U}=\mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{R}.$$

4. $\mathfrak{J}_\varrho$ seien die zu den Eigenwerten α_ϱ von $\mathfrak{A}$ gehörigen Teilmatrizen von $\mathfrak{J}$. Analog wird $\mathfrak{X}$ aufgegliedert[29]):

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & \mathfrak{J}_r, & \mathfrak{X}_r\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}.$$

Mit den noch näher zu bestimmenden Teilmatrizen $\mathfrak{N}_1,\ldots,\mathfrak{N}_r$ wird die Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{E} & & -\mathfrak{N}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & \mathfrak{E}, & -\mathfrak{N}_r\\ & & \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & \mathfrak{J}_r, & \mathfrak{X}_r\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{E} & & \mathfrak{N}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & \mathfrak{E}, & \mathfrak{N}_r\\ & & \mathfrak{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1+\mathfrak{J}_1\cdot\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_1\cdot\mathfrak{U}\\ & \ddots & \\ & \mathfrak{J}_r, & \mathfrak{X}_r+\mathfrak{J}_r\cdot\mathfrak{N}_r-\mathfrak{N}_r\cdot\mathfrak{U}\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1^{(1)}\\ & \ddots & \\ & \mathfrak{J}_r, & \mathfrak{X}_r^{(1)}\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}$$

durchgeführt. Wegen $\alpha_\varrho\in\boldsymbol{Z}$ ist offenbar

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(1)}=\mathfrak{X}_\varrho+(\mathfrak{J}_\varrho-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{N}_\varrho-\mathfrak{N}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E}).$$

$\mathfrak{U}-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E}$ ist invertierbar, weil $\mathfrak{U}$ eigenwertfrei ist; daher kann $\mathfrak{N}_\varrho=\mathfrak{X}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{-1}$ gewählt werden, so daß

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(1)}=(\mathfrak{J}_\varrho-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{X}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{-1}$$

wird. Durch g-fache Iteration dieses Prozesses gelangt man zu

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(g)}=(\mathfrak{J}_\varrho-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{g}\cdot\mathfrak{X}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{-g}.$$

Wegen $(\mathfrak{J}_\varrho-\alpha_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{e_\varrho}=\mathfrak{O}$ erhält man deshalb nach höchstens e_ϱ Schritten

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(e_\varrho)}=\mathfrak{O}.$$

(III 2) *Die verschärfte Ähnlichkeit.* Zwei n-reihige Matrizen $\begin{pmatrix}\mathfrak{A},\mathfrak{F}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{B}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\mathfrak{A},\mathfrak{F}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{B}\end{pmatrix}$ mit m-reihigen Teilmatrizen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}$ und $(n-m)$-reihigen Teilmatrizen $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}$ über $\boldsymbol{K}$ heißen „verschärft ähnlich", wenn es eine n-reihige invertierbare Matrix $\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}\end{pmatrix}$ mit m-reihiger invertierbarer Teilmatrix

[29]) Freie Stellen bedeuten Nullen.

$\mathfrak{Q}$ und $(n-m)$-reihiger invertierbarer Teilmatrix $\mathfrak{R}$ gibt, so daß

$$\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}^{-1}, & -\mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{R}^{-1}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{R}\end{pmatrix}$$

gilt. Es folgt

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{Q}, \quad \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{Q}^{-1}\cdot(\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{R} + \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{R} - \mathfrak{R}\cdot\overline{\mathfrak{B}}).$$

Die Klasse der zu $\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix}$ verschärften ähnlichen Matrizen wird mit $\Gamma_v\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix}$, und die Klasse der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrizen mit $\Gamma(\mathfrak{A})$ bezeichnet usw. Man sieht sofort: Aus $\Gamma_v\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix} = \Gamma_v\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{B}}\end{pmatrix}$ folgt $\Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix} = \Gamma\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{B}}\end{pmatrix}$, $\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\overline{\mathfrak{A}})$ und $\Gamma(\mathfrak{B}) = \Gamma(\overline{\mathfrak{B}})$. Die Umkehrung dieser Folgerung ist nicht so trivial und scheint auch nur mit einer gewissen Einschränkung zu gelten[30]:

Theorem 4. $\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{B}}\end{pmatrix}$ *seien n-reihige Matrizen mit m-reihigen Teilmatrizen* $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{A}}$ *und* $(n-m)$*-reihigen Teilmatrizen* $\mathfrak{B}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{B}}$. *Aus* $\Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix} = \Gamma\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{B}}\end{pmatrix}$, $\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\overline{\mathfrak{A}})$ *und* $\Gamma(\mathfrak{B}) = \Gamma(\overline{\mathfrak{B}})$ *folgt* $\Gamma_v\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix} = \Gamma_v\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{B}}\end{pmatrix}$, *wenn wenigstens eine der Matrizenklassen* $\Gamma(\mathfrak{A})$ *oder* $\Gamma(\mathfrak{B})$ *keine eigenwertfreie Restmatrix besitzt.*

Beweis. Angenommen, $\Gamma(\mathfrak{A})$ besitzt keine eigenwertfreie Restmatrix. Dann geht $\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix}$ durch eine verschärfte Ähnlichkeitstransformation mit geeigneten Teilmatrizen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ in[29])

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}^{-1}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{R}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{A}, \mathfrak{F}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{B}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}, \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, \mathfrak{R}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{Q}, & \mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{R}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{R}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\mathfrak{J}_1^1 & & \mathfrak{F}_1^1\cdots\mathfrak{F}_{l_1}^1 & \mathfrak{F}_1\\ & \ddots & \vdots\quad\quad\vdots & \vdots\\ & & \mathfrak{J}_{r_1}^1\ \mathfrak{F}_{r_1}^1\cdots\mathfrak{F}_{r_1}^{s_1} & \mathfrak{F}_{r_1}\\ & & \mathfrak{J}_1^2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathfrak{J}_{s_1}^2 & \\ & & & & & \mathfrak{U}\end{bmatrix}$$

über. Dabei bedeuten $\mathfrak{J}_\varrho^1$ die zu den verschiedenen Eigenwerten von $\mathfrak{A}$ gehörigen Teilmatrizen der JORDANschen Normalform, $\mathfrak{J}_\sigma^2$ die zu den verschiedenen Eigenwerten von $\mathfrak{B}$ gehörigen Teilmatrizen der JORDANschen Normalform und $\mathfrak{U}$ die bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmte eigenwertfreie Restmatrix von $\Gamma(\mathfrak{B})$. Die Teilmatrizen $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_r$ von $\mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{R}$, die über $\mathfrak{U}$ stehen, werden nun durch den gleichen Kunstgriff, der im Teil 4 des

[30]) Es gelang bisher nicht, zu entscheiden, ob das Theorem 4 auch dann noch gilt, wenn sowohl $\Gamma(\mathfrak{A})$ als auch $\Gamma(\mathfrak{B})$ eine eigenwertfreie Restmatrix besitzen. Diese Frage scheint eng mit dem in der Anmerkung 15 berührten Problem zusammenzuhängen.

Beweises zum Theorem 3 verwendet wurde, und der offenbar stets eine verschärfte Ähnlichkeitstransformation der Gesamtmatrix bedeutet, zum Verschwinden gebracht; ebenso können die $\mathfrak{F}_\varrho^\sigma$ eliminiert werden, soweit $\mathfrak{J}_\varrho^1$ und $\mathfrak{J}_\sigma^2$ zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Wenn aber $\mathfrak{J}_\varrho^1$ und $\mathfrak{J}_\sigma^2$ zu dem gleichen Eigenwert $\boldsymbol{a}$ gehören, so kann die Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{J}_\varrho^1, & \mathfrak{F}_\varrho^\sigma \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{J}_\sigma^2 \end{pmatrix}$ durch eine geeignete verschärfte Ähnlichkeitstransformation auf eine Normalform $\begin{pmatrix} \mathfrak{J}_\varrho^1, & \mathfrak{J}_\varrho^\sigma \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{J}_\sigma^2 \end{pmatrix}$ gebracht werden, in der $\mathfrak{J}_\varrho^\sigma$ nur noch aus Nullen und Einsen besteht, und die sich von der üblichen JORDANschen Normalform nur durch eine andere Anordnung der Hauptvektoren unterscheidet; wieviele Einsen in $\mathfrak{J}_\varrho^\sigma$ stehenbleiben, und an welchen Stellen, hängt offensichtlich nur von den zum Eigenwert $\boldsymbol{a}$ gehörigen Rangdifferenzen von $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ ab. Damit hat $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ durch verschärfte Ähnlichkeitstransformationen eine Normalform angenommen, die von $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B})$ und $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ im wesentlichen eindeutig bestimmt wird und daher mit der entsprechenden Normalform von $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ identisch ist. Demnach sind $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ verschärft ähnlich.

Literatur.

[1] BERTINI-DUSCHEK: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. 1924. — [2] BIRKHOFF: Lattice theory. 1948. — [3] BOURBAKI: Algèbre linéaire. 1947. — [4] COOKE: Infinite matrices and sequence spaces. 1950. — [5] DIEUDONNÉ: Sur la réduction canonique des couples de matrices. Bull. Soc. math. France **74**, 130—146 (1946). — [6] FANO: Enzyklop. math. Wiss., III 1_1. — [7] SPERNER: Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1949**, 10. Abh. — [8] WEISNER: On m-dimensional cross-ratios. Ann. of Math. (2) **29**, 440—44 (1928).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 9. November 1954.)

LEPTIN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 241—267 (1955)

Linear kompakte Moduln und Ringe.

Von

HORST LEPTIN.

Es ist ein häufig zu beobachtendes und im übrigen nicht weiter erstaunliches Phänomen, daß die Verhältnisse bei der Untersuchung algebraischer Strukturen weitgehend unübersichtlich werden, sowie man gewisse Endlichkeitsforderungen aufgibt. So ist z. B. seit DEDEKIND bekannt, daß die Sätze der klassischen Galoistheorie nur dann gelten, wenn man sich auf Körpererweiterungen endlichen Grades beschränkt. Die Zerlegung einer endlichen abelschen Gruppe in primäre Komponenten hat für unendliche Gruppen nicht einmal ein Analogon. Und die Wedderburnschen Struktursätze über halbeinfache Ringe hängen ebenfalls wesentlich von der vorausgesetzten Endlichkeitsbedingung für absteigende Ketten von Linksidealen ab. Nun hat KRULL [5] gezeigt, daß man in der Galoistheorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen die Situation klären kann, wenn man sich der Begriffe der Topologie, genauer der topologischen Gruppen bedient: Man kann in einer vorgegebenen Galoisgruppe in naheliegender Weise eine topologische Struktur definieren und dann zeigen, daß die topologisch abgeschlossenen Untergruppen genau den Zwischenkörpern entsprechen. Es zeigt sich, daß die topologischen Galoisgruppen kompakt und total unzusammenhängend sind. Übrigens kann man zeigen, daß *jede* kompakte und total unzusammenhängende topologische Gruppe zu einer Galoisgruppe algebraisch und topologisch isomorph ist. Vor KRULL zeigte bereits PRÜFER [8], angeregt durch die Henselsche Methode der p-adischen Zahlen, daß auch für abelsche Gruppen die Topologie geeignete Mittel liefert, um wesentliche Ergebnisse von der Theorie der endlichen Gruppen auf unendliche zu übertragen. Durch PRÜFERs Verfahren der Topologisierung beliebiger abelscher Gruppen erhält man eine Klasse von Gruppen, für die wieder der Satz von der Zerlegung in primäre Komponenten gilt [7], [8]. Weiter kann man z. B. zeigen, daß jede periodische Prüfersche Gruppe vollständige direkte Summe einrangiger Gruppen ist [7]. In der Theorie der halbeinfachen Ringe schließlich zeigen Untersuchungen von KAPLANSKY [4] und ZELINSKY [9], daß man auch hier mit der Topologie ein gutes Stück weiter kommt.

Sowohl die in [7] untersuchten Gruppen als auch die in [9] studierten Ringe sind Spezialfälle linear kompakter Operatormoduln. Der Begriff des linear kompakten Vektormoduls stammt von LEFSCHETZ [6]; in [9] sind dann allgemeine linear kompakte Moduln definiert und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt. Wir entwickeln im ersten Abschnitt dieser Arbeit die allgemeine Theorie beliebiger linear kompakter Moduln; ihre

fundamentalsten Eigenschaften sind in den Aussagen (1), (2) und in Satz 1 enthalten: Die lineare Kompaktheit bleibt erhalten bei Übergang zu abgeschlossenen Untermoduln und zu stetig homomorphen Bildern, die Bildung des Durchschnitts abgeschlossener Restklassen eines Filters ist mit jedem stetigen Homomorphismus vertauschbar.

Satz 2 gibt Auskunft über die Vergröberungen einer gegebenen linear kompakten Topologie eines Moduls. Während die kompakten topologischen Räume dadurch ausgezeichnet sind, daß auf ihnen jede stetige Funktion auch offen ist, gibt es linear kompakte Moduln mit stetigen, nicht offenen Homomorphismen [9]. Wir werden so dazu geführt, einen Modul *im engeren Sinne linear kompakt* zu nennen, wenn jeder stetige Homomorphismus gleichzeitig offen ist. Die im engeren Sinne linear kompakten Moduln werden gekennzeichnet in Satz 4. Den Schluß des ersten Teiles dieser Arbeit bildet die Untersuchung gewisser Erweiterungen des Multiplikatorringes eines linear kompakten Moduls. Diese Oberringe lassen sich in naheliegender Weise so topologisieren, daß sie selbst zu linear kompakten Ringen werden.

Im zweiten Teil werden die linear kompakten assoziativen Ringe untersucht. Die Grundlage der Untersuchung bilden die Ergebnisse von JACOBSON über das Radikal eines beliebigen Ringes [1] und die Struktur primitiver Ringe [2]. Das Jacobsonsche Radikal eines linear kompakten Ringes ist immer abgeschlossen, es ist transfinit nilpotent (vgl. die Definitionen im zweiten Abschnitt), falls der Ring im engeren Sinne linear kompakt ist. Alle transfinit nilpotenten Ideale liegen im Radikal, jedes transfinit nilpotente Linksideal liegt in einem transfinit nilpotenten zweiseitigen Ideal, die Summe von zwei transfinit nilpotenten Idealen ist transfinit nilpotent, kurz, es gelten ganz analoge Sätze wie im Falle der erfüllten Minimalbedingung. Die Theorie der halbeinfachen Ringe läßt sich in gewisser Weise mit unseren Methoden zum Abschluß bringen: Jeder halbeinfache linear kompakte Ring ist vollständige direkte Summe voller Ringe linearer Transformationen von Vektormoduln beliebiger Dimension über beliebigen Schiefkörpern, ein einfacher nicht quasiregulärer linear kompakter Ring ist ein solcher voller Ring linearer Transformationen. Die Umkehrungen dieser Sätze gelten ebenfalls. Schließlich ist ein beliebiger halbeinfacher Ring dichter Unterring eines linear kompakten halbeinfachen Ringes und jeder dichte Unterring eines linear kompakten halbeinfachen Ringes ist halbeinfach. Die bisher bekannten Sätze dieser Art (Theorem 28 in [1], Theorem 16 und 17 in [4], Theorem 1 in [9]) sind Spezialfälle unserer Ergebnisse oder lassen sich aus ihnen leicht herleiten.

Im dritten Teil untersuchen wir spezielle direkte Zerlegungen allgemeinerer Operator-Doppelmoduln. Diese von uns *hyperdirekt* genannten Zerlegungen sind die natürlichen Verallgemeinerungen der Zerlegung halbeinfacher Ringe in einfache und Prüferscher Gruppen in primäre Summanden. Satz 16 besagt, daß aus der hyperdirekten Zerlegung gewisser Faktormoduln unter ziemlich allgemeinen Bedingungen auf die Existenz einer feinsten hyperdirekten Zerlegung des Moduls geschlossen werden kann. In die Definition der hyperdirekten Zerlegung des Moduls geht auch der Rechtsmultiplikatorenbereich

mit ein, es zeigt sich jedoch, daß die Rechtsmultiplikatoren, falls sie nur stetig sind, für die Zerlegungen keine Rolle spielen, d.h. die hyperdirekten Summanden einer Zerlegung sind invariant gegenüber allen mit den Linksoperatoren vertauschbaren stetigen Endomorphismen. Die Anwendung dieser Ergebnisse auf linear kompakte Moduln führt zu der bemerkenswerten Tatsache, daß sowohl die Zerlegung halbeinfacher linear kompakter Ringe in einfache, die Zerlegung kommutativer linear kompakter Ringe in vollständig primäre und Radikalringe als auch die Zerlegung Prüferscher Gruppen in primäre Summanden Spezialfälle eines allgemeinen Zerlegungssatzes für linear kompakte Moduln sind.

Zur Terminologie der Arbeit: Als *Filter* bezeichnen wir stets ein System $\boldsymbol{F}$ von Mengen $\mathfrak{F}_\mu$, mit der Eigenschaft, daß zu $\mathfrak{F}_\mu, \mathfrak{F}_\nu \in \boldsymbol{F}$ ein $\mathfrak{F}_\lambda \in \boldsymbol{F}$ mit $\mathfrak{F}_\lambda < \mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_\nu$ existiert. Ein *Basisfilter* einer topologischen Gruppe ist ein Filter, dessen Elemente ein Fundamentalsystem für die Umgebungen des neutralen Elementes der Gruppe bilden. Ist $\boldsymbol{F}$ ein Filter aus Teilmengen eines topologischen Raumes $\mathfrak{T}$, so bezeichnen wir mit $\downarrow \boldsymbol{F}$ die Menge der Berührungspunkte von $\boldsymbol{F}$:

$$\downarrow \boldsymbol{F} = \bigcap_{\mathfrak{F} \in \boldsymbol{F}} \overline{\mathfrak{F}}.$$

Unter $\overline{\mathfrak{F}}$ verstehen wir dabei stets die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{T}$. $\lim \boldsymbol{F} = t$ bedeutet: Jede Umgebung des Punktes $t \in \mathfrak{T}$ enthält ein $\mathfrak{F} \in \boldsymbol{F}$. Ist $\mathfrak{T}$ separiert, so folgt aus $\lim \boldsymbol{F} = t$ stets $\downarrow \boldsymbol{F} = t$.

Als *direkte Summe* $\sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ der Moduln $\mathfrak{M}_\mu$ bezeichnen wir das, was man gewöhnlich als *vollständige* oder *cartesische* direkte Summe der $\mathfrak{M}_\mu$ bezeichnet. Als Topologie in $\sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ wählen wir stets die Tychonoffsche. Die *algebraische* direkte Summe $\sum\limits_\mu^{\vee} \mathfrak{M}_\mu$ ist die von den $\mathfrak{M}_\mu$ algebraisch erzeugte Untergruppe von $\sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$, für $x = \sum_\mu x_\mu \in \sum\limits_\mu^{\vee} \mathfrak{M}_\mu$ verschwinden also fast alle Komponenten $x_\mu \in \mathfrak{M}_\mu$. Im übrigen verwenden wir das Adjektiv *algebraisch*, wenn wir von den topologischen Eigenschaften des jeweils bezeichneten absehen wollen; so ist also ein algebraischer Homomorphismus eines topologischen Moduls eine Abbildung, welche die algebraischen Operationen erhält, im übrigen aber ruhig unstetig sein darf. Die von uns untersuchten Ringe sind alle assoziativ, die Ergebnisse insbesondere des dritten Teils lassen natürlich auch Anwendungen auf nichtassoziative Ringe zu, was wir hier jedoch nicht ausführen wollen.

I. Linear kompakte Moduln.

$\mathfrak{M}$ sei ein topologischer Modul und Λ ein System von Linksoperatoren von $\mathfrak{M}$. Wir nennen $\mathfrak{M}$ *linear topologisch* (bezüglich Λ), wenn $\mathfrak{M}$ separiert ist und einen Basisfilter aus Λ-invarianten Untermoduln besitzt. Ein linear topologischer Λ-Modul heißt *linear kompakt* (bezüglich Λ) oder kürzer l.k. (bezüglich Λ), wenn jeder Filter aus abgeschlossenen Λ-Untermoduln in $\mathfrak{M}$ Berührungspunkte hat.

Die wichtigsten elementaren Eigenschaften linear kompakter Moduln findet man etwa in [9]. Von besonderer Bedeutung sind die folgenden drei Eigenschaften ($\mathfrak{M}$ sei im folgenden stets l.k. bezüglich Λ):

(1) *Ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$ ist linear kompakt bezüglich Λ.*

Beweis trivial.

Die im folgenden vorkommenden Untermoduln sollen stets Λ-invariant sein.

(2) *Ist φ ein stetiger Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in einen linear topologischen Λ-Modul $\mathfrak{M}'$, so ist mit $\mathfrak{M}$ auch $\varphi(\mathfrak{M})$ linear kompakt* ([7] (3.5), [9], prop. 2).

Beweis. Sei $\boldsymbol{F}' = \{\mathfrak{A}'\}$ ein Filter abgeschlossener Restklassen von Untermoduln von $\varphi(\mathfrak{M})$. $\boldsymbol{F} = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{A}')\}$ ist ein Filter abgeschlossener Restklassen in $\mathfrak{M}$, deshalb ist $\downarrow \boldsymbol{F} \neq \emptyset$, also auch $\varphi(\downarrow \boldsymbol{F}) = \downarrow \boldsymbol{F}' \neq \emptyset$.

Da ein l.k. Modul stets topologisch vollständig ist, erhalten wir als Folgerung aus (2), daß $\varphi(\mathfrak{M})$ in $\mathfrak{M}'$ abgeschlossen ist.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein bezüglich Λ linear kompakter Modul, $\boldsymbol{R}$ ein Filter abgeschlossener Restklassen und φ ein stetiger Λ-Homomorphismus, so gilt:*

$$\downarrow \varphi(\boldsymbol{R}) = \varphi(\downarrow \boldsymbol{R}).$$

Beweis. Sei $\boldsymbol{R} = \{\mathfrak{R}_\mu\}_\mu$. Wir müssen $\downarrow \varphi(\boldsymbol{R}) \subset \varphi(\downarrow \boldsymbol{R})$ zeigen. Ist $x' \in \downarrow \varphi(\boldsymbol{R})$, so existiert zu jedem μ ein $x_\mu \in \mathfrak{R}_\mu$ mit $x' = \varphi(x_\mu)$. Sei $\mathfrak{R}_\mu$ Restklasse des Untermoduls $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{K}$ der Kern von φ. Die Restklassen

$$x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K}$$

bilden ein Filter $\boldsymbol{A}$, denn ist $\mathfrak{A}_\mu \subset \mathfrak{A}_\nu$, so folgt aus $x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \subset x_\nu + \mathfrak{A}_\nu$ und $\varphi(x_\mu - x_\nu) = 0$:

$$x_\mu - x_\nu \in \mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{K}, \quad \text{also} \quad x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K} \subset x_\nu + \mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{K}.$$

Sei $x \in \downarrow \boldsymbol{A}$. Wegen $x - x_\mu \in \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$ ist $\varphi(x) = \varphi(x_\mu) = x'$ und wegen $x \in x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K} \subset x_\mu + \mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{R}_\mu$ liegt x in $\downarrow \boldsymbol{R}$. Folglich: $x' = \varphi(x) \in \varphi(\downarrow \boldsymbol{R})$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ist $\{\mathfrak{A}_\mu\}$ ein Filter abgeschlossener Untermoduln und $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossener Untermodul, so folgt aus Satz 1 die Formel (vgl. [7], (3.3))

$$\bigcap_\mu (\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{B}) = \left(\bigcap_\mu \mathfrak{A}_\mu\right) + \mathfrak{B}. \tag{3}$$

Wir brauchen nämlich nur $\boldsymbol{R} = \{\mathfrak{A}_\mu\}$ zu setzen und für φ die Restklassenabbildung nach $\mathfrak{B}$ zu nehmen.

Aus (2) folgt (Beweis wie in [7]):

(4) *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeschlossene Untermoduln aus $\mathfrak{M}$, so ist auch der algebraisch von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erzeugte Untermodul $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen.*

Während die kompakten Topologien eines Raumes stets die gröbsten separierten sind, kann man die Topologie eines l.k. Moduls unter Umständen noch echt vergröbern; so ist z.B. der Modul P der ganzen p-adischen Zahlen in bezug auf die Multiplikation mit ganzen p-adischen Zahlen in der diskreten Topologie linear kompakt, erst recht also in der p-adischen, die eine echte Vergröberung der diskreten ist. Wir können jedoch folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter Λ-Modul mit der Topologie τ. Unter den linear kompakten Topologien von $\mathfrak{M}$, welche gröber als τ sind, gibt es genau eine maximale, d.h. gröbste linear kompakte Topologie τ^*. Alle τ-abgeschlossenen Λ-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ sind auch τ^*-abgeschlossen. Ist $\tau' \geq \tau$ eine linear kompakte Topologie von $\mathfrak{M}$, so ist $\tau' \leq \tau^*$. τ^* ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft, daß jeder Filter $\boldsymbol{A}$ abgeschlossener Λ-Untermoduln mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$ gegen 0 konvergiert: Aus $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$ folgt in τ^* $\lim \boldsymbol{A} = 0$. Jeder τ-stetige Λ-Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ in einen linear topologischen Λ-Modul $\mathfrak{M}'$ mit gröbster linear kompakter Topologie ist auch τ^*-stetig. Insbesondere ist jeder τ-stetige Λ-Endomorphismus von $\mathfrak{M}$ auch τ^*-stetig.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{B}$ der Basisfilter aller offenen Λ-Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{U} \in \boldsymbol{B}$ und liegt $x \in \mathfrak{M}$ nicht in $\mathfrak{U}$, so gibt es nach dem Satz von Zorn einen maximalen Λ-Obermodul $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{U}$ mit $x \notin \mathfrak{U}^*$. Ist $\mathfrak{V}$ echter Obermodul von $\mathfrak{U}^*$, so liegt (x)[1]) und somit auch $(x) + \mathfrak{U}^*$ in $\mathfrak{V}$, d.h. $(x) + \mathfrak{U}^*$ ist ein in allen Obermoduln von $\mathfrak{U}^*$ enthaltener und somit minimaler echter Obermodul von $\mathfrak{U}^*$. Wir wollen der Kürze halber einen solchen echten minimalen Obermodul eines Untermoduls $\mathfrak{W} < \mathfrak{M}$ als das *Dach* von $\mathfrak{W}$ bezeichnen und sagen, $\mathfrak{W}$ sei *überdacht*.

Unsere Überlegung zeigt, daß jedes $\mathfrak{U} \in \boldsymbol{B}$ Durchschnitt überdachter Obermoduln aus $\mathfrak{M}$ ist. Daraus folgt: 1. Ist $\boldsymbol{B}^*$ der von allen überdachten offenen $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}$ erzeugte Filter, so ist $\downarrow \boldsymbol{B}^* = 0$. 2. Jeder abgeschlossene Untermodul von $\mathfrak{M}$ ist Durchschnitt von Moduln aus $\boldsymbol{B}^*$. Wegen 1. ist die durch $\boldsymbol{B}^*$ definierte Topologie τ^* separiert, wegen 2. sind in τ^* und der gegebenen Topologie τ dieselben Λ-Untermoduln abgeschlossen, insbesondere bedeutet $\downarrow \boldsymbol{A}$ für einen Filter $\boldsymbol{A}$ abgeschlossener Restklassen nach Λ-Untermoduln in τ und τ^* dasselbe.

Sei nun $\boldsymbol{A}$ ein Filter abgeschlossener Untermoduln mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$. Ein $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}^*$ ist Durchschnitt endlich vieler überdachter $\mathfrak{U}_i^* \in \boldsymbol{B}^*$ mit minimalen Obermoduln $\mathfrak{V}_i$. Nach (3) gilt für jedes i:

$$(*) \qquad \bigcap_{\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}} (\mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^*) = \Big(\bigcap_{\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}} \mathfrak{A}\Big) + \mathfrak{U}_i^* = \mathfrak{U}_i^*.$$

Falls $\mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^* \neq \mathfrak{U}_i^*$ für alle $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ ist, folgte $\mathfrak{V}_i < \mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^*$, also $\mathfrak{V}_i < \bigcap_{\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}} (\mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^*)$, im Gegensatz zu (*). Folglich existiert zu jedem i ein $\mathfrak{A}_i \in \boldsymbol{A}$ mit $\mathfrak{A}_i + \mathfrak{U}_i^* = \mathfrak{U}_i^*$, d.h. $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{U}_i^*$. Liegt $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ im Durchschnitt dieser endlich vielen $\mathfrak{A}_i$, so auch in $\bigcap_i \mathfrak{U}_i^* = \mathfrak{U}^*$. Jedes $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}^*$ enthält also ein $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$, d.h. es ist $\lim \boldsymbol{A} = 0$.

Sei nun τ' irgendeine linear kompakte Vergröberung von τ. Ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{M}$ ein bezüglich τ' abgeschlossener Untermodul, so ist $\mathfrak{A}$ auch bezüglich τ abgeschlossen und folglich auch bezüglich τ^*. Ist $\boldsymbol{B}'$ ein τ'-Basisfilter, so gilt $\downarrow \boldsymbol{B}' = 0$, also $\lim \boldsymbol{B}' = 0$ in τ^*, d.h. aber $\tau' \leq \tau^*$, τ^* ist gröber als τ'.

Sei $\tau_1 \geq \tau$ irgendeine l.k. Topologie von $\mathfrak{M}$, in der jeder Filter $\boldsymbol{A}$ aus Untermoduln mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$ gegen 0 konvergiert. Wegen $\tau_1 \leq \tau^*$ sind die $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}^*$

[1]) Mit (x) bezeichnen wir den von $x \in \mathfrak{M}$ erzeugten abgeschlossenen Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$.

in τ_1 abgeschlossen, wegen $\downarrow \boldsymbol{B}^* = 0$ konvergiert $\boldsymbol{B}^*$ also in τ_1 gegen Null, d.h. es ist $\tau^* \leq \tau_1$. Daraus folgt $\tau_1 = \tau^*$.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, daß jeder τ-stetige Λ-Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}'$ auch τ^*-stetig ist. Wir zeigen zunächst:

Satz 3. *Ist $\mathfrak{N}$ abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so induziert die gröbste linear kompakte Topologie von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$ ebenfalls die gröbste Topologie.*

Sei $\boldsymbol{A}$ ein Filter abgeschlossener Untermoduln von $\mathfrak{N}$ mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$. In $\mathfrak{M}$ konvergiert $\boldsymbol{A}$ dann in der gröbsten Topologie gegen Null, folglich konvergiert $\boldsymbol{A}$ auch in $\mathfrak{N}$ in der von der gröbsten $\mathfrak{M}$-Topologie induzierten gegen Null. Daraus folgt nach Satz 2, daß diese Topologie ebenfalls eine gröbste ist.

Wegen Satz 3 und der Abgeschlossenheit von $\varphi(\mathfrak{M})$ in $\mathfrak{M}'$ können wir uns im Beweis der letzten Behauptung von Satz 2 auf den Fall $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}'$ beschränken. Sei $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{M}'$ offen und $\mathfrak{U} = \varphi^{-1}(\mathfrak{U}')$. $\mathfrak{U}$ ist in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und es gilt

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{U} \cong \mathfrak{M}'/\mathfrak{U}'.$$

Nun ist $\mathfrak{U}'$ Durchschnitt endlich vieler überdachter offener $\mathfrak{V}' < \mathfrak{M}'$. Wegen der obigen Isomorphie der Faktormoduln muß dann auch $\mathfrak{U}$ Durchschnitt endlich vieler überdachter und somit τ^*-offener $\mathfrak{V} < \mathfrak{M}$ sein. Folglich ist $\mathfrak{U}$ auch τ^*-offen, d.h. φ ist τ^*-stetig. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ l.k. Λ-Moduln und φ ein stetiger Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$, so ist φ in der gröbsten l.k. Topologie von $\mathfrak{M}$ eine offene Abbildung auf $\mathfrak{M}'$, d.h. jeder stetige Isomorphismus eines l.k. Moduls mit gröbster Topologie ist offen. Für stetige Homomorphismen ist diese Aussage allgemein nicht mehr richtig. Während jede stetige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum von selbst offen ist, gibt es l.k. Moduln mit gröbster Topologie und stetigen, aber nicht offenen Homomorphismen.

Wir nennen einen l.k. Λ-Modul $\mathfrak{M}$ *im engeren Sinne linear kompakt* (i.e.S. l.k.), wenn jeder stetige Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in einen linear topologischen Λ-Modul offen ist.

Linear kompakte Vektormoduln über Körpern, Prüfersche Gruppen und die im nächsten Abschnitt behandelten l.k. halbeinfachen Ringe sind i.e.S. l.k. Es entsteht die Aufgabe, Kriterien dafür anzugeben, daß ein Modul i.e.S. l.k. ist. Im folgenden Satz geben wir vier kennzeichnende Eigenschaften an.

Satz 4. *Die im engeren Sinne linear kompakten Λ-Moduln $\mathfrak{M}$ sind unter den vollständigen linear topologischen Λ-Moduln durch die folgenden vier äquivalenten Eigenschaften gekennzeichnet:*

a) *Jeder stetige Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ ist offen.*

b) *Jeder stetige Λ-Homomorphismus bildet $\mathfrak{M}$ auf einen Λ-Modul mit gröbster linearer Topologie ab.*

c) *In den Faktormoduln nach offenen Untermoduln von $\mathfrak{M}$ gilt die Minimalbedingung: Eine Kette $\mathfrak{U}_1 > \mathfrak{U}_2 > \cdots$ von Untermoduln $\mathfrak{U}_i < \mathfrak{M}$ mit offenem Durchschnitt $\bigcap_i \mathfrak{U}_i$ hat nur endlich viele verschiedene Glieder.*

d) $\mathfrak{M}$ *ist linear kompakt und jeder offene Untermodul von* $\mathfrak{M}$ *hat minimale Obermoduln.*

Wir beweisen den Satz nach dem Schema a)→b)→c)→d)→a).

Aus a) *folgt* b). φ sei ein stetiger Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ und ψ sei ein stetiger Λ-Isomorphismus von $\mathfrak{M}'$ auf einen Λ-Modul $\mathfrak{M}''$. $\psi\varphi$ ist dann ein Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}''$ und folglich offen. Daraus ergibt sich, daß auch ψ offen ist: Jeder stetige Λ-Isomorphismus von $\mathfrak{M}'$ ist offen, die Topologie von $\mathfrak{M}'$ muß also eine gröbste sein.

Aus b) *folgt* c). Sei $\mathfrak{U}_1 > \mathfrak{U}_2 > \cdots$ eine Kette von Untermoduln aus $\mathfrak{M}$ mit offenem Durchschnitt $\mathfrak{U} = \bigcap_i \mathfrak{U}_i$. Die Kette $\boldsymbol{U} = \{\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}\}_i$ liefert in $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ eine lineare Topologie. Da die kanonische Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ stetig und $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ diskret ist, muß wegen b) auch die durch $\boldsymbol{U}$ definierte Topologie diskret sein, d.h. es muß ein k mit $\mathfrak{U}_k/\mathfrak{U} = 0$, also $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}$ geben. Folglich sind alle Glieder mit $i \geq k$ gleich, d.h. es gilt c).

Aus c) *folgt* d). Ein Λ-Modul mit Minimalbedingung ist stets linear kompakt [9], die Faktormoduln von $\mathfrak{M}$ nach offene Untermoduln sind also alle linear kompakt. $\mathfrak{M}$ ist als vollständiger Modul projektiver (= inverser) Limes der diskreten Faktormoduln und folglich selbst l.k. (vgl. etwa [9]). Daß aus der Minimalbedingung auch die zweite Behauptung unter d) folgt, ist klar.

Aus d) *folgt* a). Dazu zwei Hilfssätze:

(5) *Das Erzeugnis der minimalen Untermoduln eines diskreten l.k.* Λ*-Moduls* $\mathfrak{L}$ *ist direkte Summe endlich vieler minimaler Untermoduln.*

Beweis. Wir nehmen an, wir hätten in $\mathfrak{L}$ bereits r minimale Untermoduln $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_r$ gefunden, so daß der von ihnen erzeugte Untermodul $\mathfrak{l}_r$ direkte Summe der $\mathfrak{m}_i$ ist:

$$\mathfrak{l}_r = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_r.$$

Enthält $\mathfrak{l}_r$ alle minimalen Untermoduln von $\mathfrak{L}$, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein minimales $\mathfrak{m}_{r+1}$ mit $\mathfrak{l}_r \cap \mathfrak{m}_{r+1} = 0$; das Erzeugnis $\mathfrak{l}_{r+1}$ von $\mathfrak{l}_r$ und $\mathfrak{m}_{r+1}$ ist also direkte Summe:

$$(*) \qquad \mathfrak{l}_{r+1} = \mathfrak{l}_r \oplus \mathfrak{m}_{r+1}.$$

Nun muß allgemein in einem diskreten l.k. Modul eine Folge der Art (*) nach endlich vielen Schritten abbrechen: Sei $\mathfrak{l}$ das Erzeugnis aller $\mathfrak{m}_i$. $\mathfrak{l}$ ist die algebraische direkte Summe der $\mathfrak{m}_i$ und linear kompakt. $\mathfrak{h}_n$ sei das Erzeugnis der $\mathfrak{m}_i$ mit $i > n$. In jedem $\mathfrak{m}_i \neq 0$ wählen wir ein Element $x_i \neq 0$. Die Restklassen $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \mathfrak{h}_n$ bilden ein Filter, es gibt also ein $y = \Sigma y_i \in \mathfrak{l}$ mit $y \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \pmod{\mathfrak{h}_n}$ für alle n. Da $\mathfrak{l}$ die algebraische direkte Summe der $\mathfrak{m}_i$ ist, folgt aus diesen Kongruenzen $x_i = y_i$. Nun sind nur endlich viele $y_i \neq 0$, folglich können auch nur endlich viele x_i und damit auch $\mathfrak{m}_i \neq 0$ sein. Hieraus folgt insbesondere Hilfssatz (5).

(6) *Hat jeder echte Untermodul des* Λ*-Moduls* $\mathfrak{N}$ *minimale Obermoduln in* $\mathfrak{N}$ *und ist* $\mathfrak{Q}$ *ein von* 0 *verschiedener Untermodul von* $\mathfrak{N}$, *so hat auch jeder echte Untermodul von* $\mathfrak{Q}$ *minimale Obermoduln in* $\mathfrak{Q}$.

Sei $\mathfrak{Q} \neq 0$ Untermodul von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}' \neq \mathfrak{Q}$ Untermodul von $\mathfrak{Q}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{Q}'$ minimale Obermoduln in $\mathfrak{Q}$ besitzt. Dazu rechnen wir modulo $\mathfrak{Q}'$, d.h. setzen $\mathfrak{Q}' = 0$. Sei $\mathfrak{R}$ ein maximaler Untermodul von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Q} = 0$ (Zornsches Lemma). Sicher ist $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}$, es gibt also einen minimalen Obermodul $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$, für den dann $\mathfrak{q} = \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q} \neq 0$ ist. Wegen

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q} = (\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q})/(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Q}) \cong (\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q} + \mathfrak{R})/\mathfrak{R} < \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$$

ist $\mathfrak{q} \cong \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$, also minimal in $\mathfrak{Q}$.

Wir wollen nun den letzten Teil von Satz 4 beweisen. Sei φ ein stetiger Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ sein Kern. Wir müssen zeigen, daß $\varphi(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}'$ in $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}'$ offen ist, falls nur $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$ offen ist. Wegen $\varphi(\mathfrak{U}) = \varphi(\mathfrak{U} + \mathfrak{K})$ können wir dabei $\mathfrak{K} < \mathfrak{U}$ annehmen. $\mathfrak{U}'$ ist in $\mathfrak{M}'$ abgeschlossen und φ induziert einen stetigen Isomorphismus des Faktormoduls $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ auf den Faktormodul $\mathfrak{F}' = \mathfrak{M}'/\mathfrak{U}'$. Hierbei führt φ das Erzeugnis $\mathfrak{A}$ der minimalen Untermoduln von $\mathfrak{F}$ über in das entsprechende Erzeugnis $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{F}'$. Nach (5) ist $\mathfrak{A}'$ endliche direkte Summe minimaler Untermoduln, so daß in $\mathfrak{A}'$ die Minimalbedingung gilt. Daraus folgt, daß $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{F}'$ diskret ist, es gibt in $\mathfrak{F}'$ also einen offenen Untermodul $\mathfrak{V}'$ mit $\mathfrak{V}' \cap \mathfrak{A}' = 0$. Wäre $\mathfrak{V}' \neq 0$, so enthielte es wegen (6) minimale Untermoduln $\neq 0$, was jedoch $\mathfrak{V}' \cap \mathfrak{A}' = 0$ widerspräche. Folglich ist $\mathfrak{V}' = 0$, d.h. $\mathfrak{F}'$ diskret, also $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{M}'$ offen: φ ist offen. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir aus Satz 4:

(7) *Ist $\mathfrak{M}$ linear kompakt und hat jeder offene Untermodul minimale Obermoduln, so ist die Topologie von $\mathfrak{M}$ eine gröbste.*

Man könnte vermuten, daß von (7) auch die Umkehrung gilt; das ist jedoch nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $\mathfrak{P}$ der Modul der ganzen p-adischen Zahlen und $\mathfrak{Q}$ die Prüfersche Gruppe vom Typ p^∞, definiert durch ein Erzeugendensystem $\{z_i\}$ mit den Relationen $pz_{i+1} = z_i$, $pz_1 = 0$. Die direkte Summe $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}$ ist ein in der diskreten Topologie l.k. Modul bezüglich des Ringes P der ganzen p-adischen Zahlen. Sei $e \in \mathfrak{P}$ ein bezüglich P erzeugendes Element aus $\mathfrak{P}$, d.h. sei $\mathfrak{P} = \mathsf{P}e$. Wir definieren mit P vertauschbare Endomorphismen τ_i von $\mathfrak{M}$ durch die Formeln

$$\tau_i(\varrho e) = \varrho z_i, \quad \tau_i(z_k) = 0 \qquad (\varrho \in \mathsf{P}).$$

Λ sei der von P und den τ_i erzeugte Endomorphismenring von $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ ist ein l.k. diskreter Λ-Modul. Wir behaupten, daß der Λ-Untermodul $\mathfrak{m} = (z_1)$ in allen von 0 verschiedenen Λ-Untermoduln $\mathfrak{U} < \mathfrak{M}$ enthalten ist. Das ist klar für die $\mathfrak{U} < \mathfrak{Q}$. Falls $\mathfrak{U} \not\subset \mathfrak{Q}$, enthält $\mathfrak{U}$ ein Element der Form $p^k e$. Dann ist $z_1 = \tau_{k-1}(p^k e) \in \mathfrak{U}$. Ist nun allgemein $\mathfrak{L}$ irgendein linear topologischer Λ-Modul mit einem minimalen, in allen von 0 verschiedenen Λ-Untermoduln enthaltenen Λ-Untermodul $\mathfrak{l}$, so ist $\mathfrak{L}$ notwendig diskret: Da $\mathfrak{l}$ minimal ist, muß es diskret sein, es gibt also einen offenen Untermodul $\mathfrak{U} < \mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{l} = 0$. Aus $\mathfrak{l} \not\subset \mathfrak{U}$ folgt aber $\mathfrak{U} = 0$, d.h. $\mathfrak{L}$ ist diskret. Wir sehen also, daß die diskrete Topologie unseres Moduls $\mathfrak{M}$ eine gröbste ist. Trotzdem hat $\mathfrak{Q}$ keinen minimalen Obermodul.

Das nächste Beispiel zeigt, daß ein linear topologischer Modul $\mathfrak{M}$ mit gröbster Topologie nicht einmal linear kompakt zu sein braucht. Wir nehmen unendlich viele zum Modul $\mathfrak{P}$ der ganzen p-adischen Zahlen isomorphe Moduln $\mathfrak{P}_\mu$ mit erzeugenden Elementen e_μ und die Prüfersche Gruppe $\mathfrak{Q}$ mit den Erzeugenden z_i und bilden die algebraische direkte Summe $\mathfrak{M} = \sum_\mu \mathfrak{P}_\mu \oplus \mathfrak{Q}$. Durch die Gleichungen

$$\tau_\mu^i(\varrho e_\nu) = \delta_{\mu\nu}\varrho z_i, \quad \tau_\mu^i(z_k) = 0, \quad \varrho \in \mathsf{P}, \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ wenn } \mu = \nu \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

sind Endomorphismen τ_μ^i von $\mathfrak{M}$ definiert. Λ sei der von P und den τ_μ^i erzeugte Endomorphismenring. Wie beim vorigen Beispiel sieht man, daß (z_1) in allen von 0 verschiedenen Λ-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Daraus folgt wieder, daß die diskrete Topologie von $\mathfrak{M}$ nicht vergröbert werden kann. Der Faktormodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}$ ist zur algebraischen direkten Summe der $\mathfrak{P}_\mu$ isomorph, also nicht l.k., folglich ist auch $\mathfrak{M}$ nicht l.k.

Satz 5. *Untermoduln, stetig homomorphe Bilder und direkte Summen im engeren Sinne linear kompakter Moduln sind im engeren Sinne linear kompakt.*

a) Sei $\mathfrak{A}$ abgeschlossener Untermodul des i.e.S. l.k. Moduls $\mathfrak{M}$. Zu einem offenen Untermodul $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ existiert ein offener Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}$. Aus $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cong (\mathfrak{A}+\mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ folgt nach Satz 4c), daß in $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}$ die Minimalbedingung gilt. Deshalb ist, ebenfalls nach Satz 4c), $\mathfrak{A}$ i.e.S. l.k.

b) Aus Satz 4b) z.B. folgt unmittelbar, daß ein stetig homomorphes Bild von $\mathfrak{M}$ auch i.e.S. l.k. ist.

c) $\mathfrak{U}$ sei ein offener Untermodul der direkten Summe $\mathfrak{M} = \sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ der i.e.S. l.k. Moduln $\mathfrak{M}_\mu$. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{U} = \sum_\mu \mathfrak{U}_\mu$ ist, wobei alle $\mathfrak{U}_\mu$ in $\mathfrak{M}_\mu$ offen und fast alle $\mathfrak{U}_\mu = \mathfrak{M}_\mu$ sind. Dann ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{U} = \sum_\mu (\mathfrak{M}_\mu/\mathfrak{U}_\mu)$ endliche direkte Summe von Moduln mit Minimalbedingung. Folglich gilt auch in $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ die Minimalbedingung. Aus Satz 4c) folgt, daß $\mathfrak{M}$ i.e.S. l.k. ist.

Wir wollen nun genauer den Zusammenhang zwischen dem Modul $\mathfrak{M}$ und dem Multiplikatorenbereich Λ untersuchen. Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{M}$ bezüglich Λ linear topologisch sei. Λ erzeugt algebraisch einen Endomorphismenring Λ^* von $\mathfrak{M}$. Es ist klar: Ist $\mathfrak{M}$ linear topologisch oder l.k. bezüglich Λ, so auch bezüglich Λ^* und umgekehrt. Wir wollen deshalb $\Lambda = \Lambda^*$ annehmen, also voraussetzen, daß Λ schon ein Ring ist. Wir können dann Λ in naheliegender Weise zum topologischen Ring machen (vgl. hierzu [3], 3. und 4.).

Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_r$ r Elemente aus $\mathfrak{M}$. Alle $\varrho \in \Lambda$ mit $\varrho x_i \in \mathfrak{U}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, bilden ein Linksideal $L(x_1, x_2, \ldots, x_r; \mathfrak{U})$. Wegen

$$L(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s; \mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}) \subset L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U}) \cap L(y_1, \ldots, y_s; \mathfrak{B})$$

bilden diese L ein Filter $\boldsymbol{L}$.

Wir wählen $\boldsymbol{L}$ als Basisfilter einer Topologie in Λ.

Liegt ξ in allen $L \in \boldsymbol{L}$, so folgt für $x \in \mathfrak{M}$ und jeden offenen Untermodul $\mathfrak{U}$: $\xi x \in \mathfrak{U}$, d.h. $\xi x = 0$, d.h. $\xi = 0$. Folglich ist Λ jedenfalls ein linear topologischer Λ-Modul. Ist $\sigma \in \Lambda$ und $L = L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{L}$, so gilt für $\xi \in L(\sigma x_1, \ldots, \sigma x_r; \mathfrak{U}) = L' \in \boldsymbol{L}$: $\xi \sigma x_i \in \mathfrak{U}$, d.h. $\xi \sigma \in L$, also $L'\sigma \subset L$, d.h. die Rechtsmultiplikation mit σ ist stetig. Folglich ist Λ ein topologischer Ring.

Die Endomorphismen aus Λ haben trivialerweise die Eigenschaft, daß sie jeden Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$ in sich abbilden. Wir wollen derartige Endomorphismen als *hyperstetig* bezeichnen. Ist Θ ein fester Bereich mit den Elementen aus Λ vertauschbarer stetiger Rechtsoperatoren von $\mathfrak{M}$, so bilden sämtliche hyperstetigen mit Θ vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ einen Ring $R = R(\mathfrak{M}, \Theta)$ mit Eins, der Λ als Unterring enthält. Natürlich ist auch R ein topologischer Ring. Die Λ-invarianten Untermoduln von $\mathfrak{M}$ sind nach Definition mit den R-invarianten identisch. Topologisieren wir R in der oben beschriebenen Weise, so ist Λ als Unterring von R auch topologisch. Es ist evident, daß die so induzierte Topologie von Λ mit der durch unser Verfahren, angewandt auf Λ, erhaltenen identisch ist.

Satz 6. *Der Ring $R(\Theta)$ der hyperstetigen mit Θ vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ ist topologisch vollständig.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{C} = \{\alpha_\mu + L_\mu\}$ Cauchyfilter von R und $x \in \mathfrak{M}$. Zu $\alpha + L(x; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{C}$ bilden wir in $\mathfrak{M}$ die Restklassen $\alpha x + \mathfrak{U}$. Sämtliche $\alpha x + \mathfrak{U}$ bilden in $\mathfrak{M}$ ein Cauchyfilter $\boldsymbol{C}^*$. Wir setzen $\lim \boldsymbol{C}^* = \gamma x$ und behaupten: γ ist ein hyperstetiger mit Θ vertauschbarer Endomorphismus von $\mathfrak{M}$.

a) Aus der Relation

$$L(x, y; \mathfrak{U}) \subset L(x; \mathfrak{U}) \cap L(y; \mathfrak{U}) \cap L(x - y; \mathfrak{U})$$

folgt für die entsprechenden Restklassen aus $\boldsymbol{C}$:

$$\alpha + L(x, y; \mathfrak{U}) \subset (\alpha_1 + L(x; \mathfrak{U})) \cap (\alpha_2 + L(y; \mathfrak{U})) \cap (\alpha_3 + L(x - y; \mathfrak{U}))$$

also

$$\alpha x + \mathfrak{U} = \alpha_1 x + \mathfrak{U}, \quad \alpha y + \mathfrak{U} = \alpha_2 y + \mathfrak{U}$$

$$\alpha_3(x - y) + \mathfrak{U} = \alpha(x - y) + \mathfrak{U} = (\alpha x + \mathfrak{U}) - (\alpha y + \mathfrak{U})$$

$$= (\alpha_1 x + \mathfrak{U}) - (\alpha_2 y + \mathfrak{U}).$$

Hieraus folgt $\gamma(x - y) = \gamma x - \gamma y$.

b) Sei $\mathfrak{U}$ offener R-Untermodul von $\mathfrak{M}$, $x \in \mathfrak{U}$ und $\alpha + L(x, \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{C}$. Es ist $\gamma x \equiv \alpha x \pmod{\mathfrak{U}}$, also wegen $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{U}$: $\gamma x \in \mathfrak{U}$, d.h. $\gamma(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}$. Folglich ist γ ein hyperstetiger Endomorphismus.

c) $\mathfrak{U}$ sei ein offener Untermodul und $\vartheta \in \Theta$. Da ϑ stetig ist, gibt es einen offenen Untermodul $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{V}\vartheta \subset \mathfrak{U}$ und ein $\alpha \in R(\Theta)$ mit

$$\alpha + L(x; \mathfrak{V}) \in \boldsymbol{C}, \quad \alpha + L(x\vartheta; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{C}$$

also

$$\gamma x \equiv \alpha x \pmod{\mathfrak{V}}, \quad \gamma(x\vartheta) \equiv \alpha(x\vartheta) \pmod{\mathfrak{U}}.$$

Aus diesen Kongruenzen und $\mathfrak{V}\vartheta \subset \mathfrak{U}$ folgt wegen $(\alpha x)\vartheta = \alpha(x\vartheta)$:

$$(\gamma x)\vartheta \equiv (\alpha x)\vartheta \equiv \alpha(x\vartheta) \pmod{\mathfrak{U}}, \quad \text{d.h.} \quad (\gamma x)\vartheta \equiv \gamma(x\vartheta) \pmod{\mathfrak{U}}.$$

Das gilt für jedes offene $\mathfrak{U}$, folglich ist $(\gamma x)\vartheta = \gamma(x\vartheta)$, γ liegt also in $R(\Theta)$. Offensichtlich ist $\gamma = \lim C$. Damit ist Satz 6 bewiesen.

(8) *Ist $\mathfrak{X}$ eine Teilmenge und $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist die Menge aller $\xi \in R$ mit $\xi\mathfrak{X} < \mathfrak{A}$ ein abgeschlossenes Linksideal in R. Ist $\mathfrak{B}$ R-Obermodul von $\mathfrak{A}$, so ist die Menge aller $\xi \in R$ mit $\xi\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal in R.*

Die Idealeigenschaft ist in beiden Fällen klar. Die Menge aller $\xi \in R$ mit $\xi\mathfrak{X} < \mathfrak{A}$ ist genau der Durchschnitt aller offenen Ideale $L(x; \mathfrak{U})$, wobei x alle Elemente aus $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ alle offenen Obermoduln von $\mathfrak{A}$ durchläuft. Dieser Durchschnitt ist abgeschlossen.

(9) *$\mathfrak{M}$ ist ein topologischer R-Modul, d.h. die Abbildung des Produktraumes $R \times \mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$ ist stetig.*

Ist $\mathfrak{U}$ ein offener R-Untermodul von $\mathfrak{M}$, $\xi \in R$ und $x \in \mathfrak{M}$, so enthält das Urbild von $\xi x + \mathfrak{U}$ in $R \times \mathfrak{M}$ die offene Menge $(\xi + L(x; \mathfrak{U})) \times (x + \mathfrak{U})$.

Im folgenden wollen wir nun wieder annehmen, daß $\mathfrak{M}$ linear kompakt sei. Ein topologischer Ring S heiße linear kompakt, wenn er als topologischer S-Linksmodul linear kompakt ist.

Satz 7. *Der Ring $R(\Theta)$ der hyperstetigen mit Θ vertauschbaren Endomorphismen eines linear kompakten Moduls $\mathfrak{M}$ ist linear kompakt. Ist $\mathfrak{M}$ im engeren Sinne linear kompakt, so auch $R(\Theta)$.*

Nach Satz 6 ist $R = R(\Theta)$ ein vollständiger linear topologischer Ring, wir brauchen also nur zu zeigen, daß die Faktormoduln von R nach offenen Linksidealen $L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U})$ als R-Moduln linear kompakt sind. Für $z \in \mathfrak{M}$ sei $\bar{z} = (z + \mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ das Bild von z im Restklassenmodul $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$. Durch $\xi \to \{\overline{\xi x_1}, \overline{\xi x_2}, \ldots, \overline{\xi x_r}\} = \varphi(\xi)$ ist ein R-Homomorphismus von R auf einen Untermodul $\mathfrak{R}$ der r-gliederigen l.k. diskreten direkten Summe $\overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathfrak{M}}$ definiert, $\varphi(\xi) = 0$ bedeutet $\xi x_i \in \mathfrak{U}$ für $i = 1, \ldots, r$, d.h. $\xi \in L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U}) = L$. Folglich ist L der Kern von φ und R/L mit $\mathfrak{R}$ operatorisomorph. Da R/L und $\mathfrak{R}$ beide diskret sind, folgt aus der linearen Kompaktheit von $\mathfrak{R}$ die von R/L.

Ist $\mathfrak{M}$ i.e.S. l.k., so auch $\overline{\mathfrak{M}}$, wegen Satz 5 also auch $\mathfrak{R}$ und folglich auch R/L. Da L offen ist, bedeutet das die Gültigkeit der Minimalbedingung in R/L. Wegen Satz 4 ist R dann i.e.S. l.k. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Aus (2) und (9) folgt:

(10) *Bezeichnungen wie in Satz 7. Ist A ein abgeschlossenes Linksideal aus R und $x \in \mathfrak{M}$, so ist Ax in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen.*

II. Linear kompakte Ringe.

Wir wollen nun genauer die Struktur linear kompakter Ringe untersuchen. Dabei fassen wir die Ringe stillschweigend stets gleichzeitig als Operatormoduln mit sich selbst als Linksoperatorenbereich auf. In den linear topologischen Ringen induzieren dann die Linksmultiplikationen hyperstetige und

die Rechtsmultiplikationen stetige Endomorphismen. Die Rechtsmultiplikationen sind überdies R-Endomorphismen des Ringes R. Aus Satz 2 folgt, daß ein l.k. Ring R ein topologischer Ring bleibt, wenn man die Topologie vergröbert. Wir bemerken, daß ein abgeschlossener Unterring S eines l.k. Ringes R als Ring nicht linear kompakt zu sein braucht! Ein S-invarianter Untermodul von S braucht nämlich nicht auch R-invariant zu sein. So enthält z.B. jede nicht halbeinfache Algebra endlichen Ranges über einem unendlichen Körper ein von 0 verschiedenes Ideal S mit verschwindendem Quadrat: $S^2=0$. S ist also ein Zeroring und jeder Untermodul von S ist S-zulässig, S kann deshalb nicht l.k. sein.

Wir benötigen für unsere Untersuchung einige von JACOBSON [1] stammende Begriffe und Resultate:

Sind x und y Elemente des Ringes R, so setzen wir

$$x \circ y = x + y + xy.$$

Enthält R eine 1, so ist

$$1 + x \circ y = (1 + x)(1 + y).$$

Aus dieser Formel folgt das Assoziativgesetz $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. $x \in R$ heißt *links-* (*rechts-*) *quasiregulär* (l.q.r., bzw. r.q.r.), wenn es ein $y \in R$ mit $y \circ x = 0$ ($x \circ y = 0$) gibt. y heißt in diesem Falle *Links-* (*Rechts-*) *Quasiinverses* von x. x heißt *quasiregulär* (q.r.), wenn es sowohl l.q.r. als auch r.q.r. ist. In diesem Fall existiert genau ein mit x vertauschbares Quasiinverses. Ein Links- (Rechts-)ideal heißt quasiregulär, wenn alle seine Elemente l.q.r. (r.q.r.) sind. Die Vereinigung aller q.r. Linksideale ist nach JACOBSON [1] ein zweiseitiges Ideal, dessen sämtliche Elemente q.r. sind. Dieses maximale q.r. Ideal ist das *Jacobsonsche Radikal* oder auch kurz das *Radikal* des Ringes. Der Ring heißt halbeinfach, wenn das Radikal verschwindet. Der Restklassenring nach dem Radikal ist stets halbeinfach.

Satz 8. *Das Jacobsonsche Radikal N eines linear kompakten Ringes R ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{N}$ von N in R q.r. ist, d.h. daß jeder Häufungspunkt von N l.q.r. ist. Sei $\boldsymbol{B} = \{L_\mu\}$ der Filter aller offenen Linksideale aus R und $h \in \overline{N}$ Häufungspunkt von N. Alle Elemente $x \in R$ mit $x + xh \in L_\mu$ für $L_\mu \in \boldsymbol{B}$ bilden ein abgeschlossenes Linksideal H_μ, nämlich den Kern des stetigen R-Homomorphismus $x \to x + xh$ modulo L_μ. Zu jedem $L_\mu \in \boldsymbol{B}$ existiert ein $p_\mu \in R$ mit $p_\mu \circ h \in L_\mu$. Ist p'_μ ein anderes Element mit $p'_\mu \circ h \in L_\mu$, so folgt

$$p_\mu - p'_\mu + (p_\mu - p'_\mu) h \in L_\mu,$$

d.h.

$$p_\mu \equiv p'_\mu \pmod{H_\mu}.$$

Die Restklassen $p_\mu + H_\mu$ sind also durch h eindeutig bestimmt und bilden insbesondere einen Filter $\boldsymbol{H}$. Sei $p \in \downarrow \boldsymbol{H}$. Es ist $p = p_\mu + q_\mu$ mit $q_\mu \in H_\mu$ also

$$p \circ h = p_\mu + q_\mu + h + p_\mu h + q_\mu h = p_\mu \circ h + q_\mu + q_\mu h \equiv 0 \pmod{L_\mu}.$$

Aus $p \circ h \in L_\mu$ für alle μ folgt $p \circ h = 0$, d.h. p ist Linksquasiinverses von h. Folglich ist $\overline{N}$ q.r., also in N enthalten, d.h. $N = \overline{N}$ ist abgeschlossen.

In Ringen mit Minimalbedingung ist das Radikal bekanntlich (vgl. [1], Theorem 9) nilpotent. Umgekehrt liegt allgemein jedes nilpotente Ideal im Radikal. Wir werden den Begriff des nilpotenten Ideals geeignet verallgemeinern und können dann zeigen, daß entsprechende Sätze auch für l.k. Ringe gelten. Wir werden im folgenden mit $\overline{M}$ stets die abgeschlossene Hülle einer Menge M des l.k. Ringes R bezeichnen.

Sei A ein abgeschlossenes ein- oder zweiseitiges Ideal aus R. Wir definieren drei absteigende Ketten von Unteridealen A_μ, ${}_\mu A$ und $\underset{\mu}{A}$ durch die Formeln

$$A_0 = A \qquad {}_0A = A \qquad \underset{0}{A} = A$$

$$A_{\mu+1} = \overline{A_\mu \cdot A} \qquad {}_{\mu+1}A = \overline{A \cdot {}_\mu A} \qquad \underset{\mu+1}{A} = \overline{\underset{\mu}{A}\,\underset{\mu}{A}}$$

$$A_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} A_\mu \qquad {}_\lambda A = \bigcap_{\mu<\lambda} {}_\mu A \qquad \underset{\lambda}{A} = \bigcap_{\mu<\lambda} \underset{\mu}{A},$$

falls λ Limeszahl ist.

Sei ζ eine feste Ordnungszahl, für welche die Menge aller $\mu < \zeta$ größere Mächtigkeit als R hat. Zu A existiert ein $\alpha < \zeta$ mit $A_\mu = A_\alpha$ für alle $\mu > \alpha$, also insbesondere $A_\mu = A_\zeta$ für alle $\mu > \zeta$. Entsprechend ist ${}_\mu A = {}_\zeta A$ und $\underset{\mu}{A} = \underset{\zeta}{A}$ für alle $\mu > \zeta$. Wir setzen

$$A_* = A_\zeta \qquad {}_*A = {}_\zeta A \qquad \underset{*}{A} = \underset{\zeta}{A}.$$

Die Ideale A_*, ${}_*A$ und $\underset{*}{A}$ sind abgeschlossene Unterideale von A und genügen den Gleichungen

$$\overline{A_* \cdot A} = A_* \qquad \overline{A \cdot {}_*A} = {}_*A \qquad \overline{\underset{*}{A}\,\underset{*}{A}} = \underset{*}{A}.$$

Das Ideal A heißt *transfinit r-nilpotent*, wenn $A_* = 0$ ist, *transfinit l-nilpotent*, falls ${}_*A = 0$ ist und *transfinit nilpotent*, falls $\underset{*}{A} = 0$ ist. Den Zusatz *transfinit* werden wir, sofern keine Mißverständnisse möglich sind, fortlassen. Da $\underset{*}{A}$ in A_* und ${}_*A$ enthalten ist, ist ein $r(l)$-nilpotentes Ideal stets nilpotent.

Wir setzen nun voraus, daß R i.e.S. l.k. sei. Ist $\mathfrak{M}$ ein irreduzibler R-Modul mit dem zweiseitigen annullierenden Ideal S, so ist der Faktorring R/S als irreduzibler Endomorphismenring von $\mathfrak{M}$ nach [2] halbeinfach. Folglich liegt das Radikal N von R in S, d.h. es ist $N\mathfrak{M} = 0$. Sei L ein beliebiges offenes Linksideal und L' das Oberideal aller $\xi \in R$ mit $N_* \xi \subset L$. Ist $L' \neq R$, so gibt es ein minimales Oberideal J von L'. Unsere eben angestellte Überlegung zeigt, daß $N(J/L') = 0$, d.h. $NJ \subset L'$ ist. Es folgt $N_* \cdot NJ \subset N_* \cdot L' \subset L$. Ähnlich wie zu (8) sieht man, daß das Ideal der $\xi \in R$ mit $\xi J \subset L$ abgeschlossen ist. Daraus folgt $N_* \cdot J = \overline{N_* \cdot N} J \subset L$, im Widerspruch zur Maximalität von L'. Wir sehen also, daß $N_* \cdot R$ in jedem offenen Linksideal L liegt. Daraus folgt $N_* = N_* \cdot R = 0$:

Satz 9. *Das Radikal eines im engeren Sinne linear kompakten Ringes ist transfinit r-nilpotent.*

Für das folgende brauchen wir ein

Lemma. *Ist T ein beliebiger topologischer Ring und sind A und B nicht notwendig abgeschlossene ein- oder zweiseitige Ideale aus T, so gilt für die abgeschlossenen Hüllen:*

$$\overline{\overline{A}B} = \overline{A\overline{B}} = \overline{AB}.$$

Beweis. Ist a Häufungspunkt von A, so ist für $b \in B$ wegen der Stetigkeit der Rechtsmultiplikation ab Häufungspunkt von Ab, d.h. es gilt

$$\overline{A}b \subset \overline{Ab} \subset \overline{AB}$$

also, da b in B beliebig gewählt war: $\overline{A}B \subset \overline{AB}$ und folglich $\overline{\overline{A}B} \subset \overline{AB}$. Da trivialerweise auch $\overline{AB}$ in $\overline{\overline{A}B}$ liegt, folgt $\overline{\overline{A}B} = \overline{AB}$. Entsprechend $\overline{A\overline{B}} = \overline{AB}$.

(11) *Jedes nilpotente (r-nilpotente) Linksideal liegt in einem nilpotenten (r-nilpotenten) zweiseitigen Ideal.*

Sei L ein nilpotentes (r-nilpotentes) Linksideal und $H = \overline{LR}$. Wir behaupten: Für jedes μ gilt

(*) $$\underset{*}{\overline{HL}} \subset \underset{\mu}{L} \qquad (\overline{H_* \cdot L} \subset L_\mu).$$

Das ist richtig für $\mu = 0$. Gilt (*) für μ, so folgt für $\mu+1$ (um die Querstriche brauchen wir uns wegen des Lemmas nicht zu kümmern):

$$\underset{*}{\overline{HL}} = \underset{* * *}{\overline{HHHL}} \subset \underset{* *}{\overline{HHHL}} = \underset{*}{\overline{HLR}}\underset{*}{\overline{HL}} \subset \underset{* *}{\overline{HLHL}} \subset \underset{\mu\ \mu}{\overline{LL}} = \underset{\mu+1}{L}$$

$$(\overline{H_* \cdot L} = \overline{H_* \cdot HL} = \overline{H_* \cdot LRL} \subset \overline{H_* LL} \subset \overline{L_\mu \cdot L} = L_{\mu+1}).$$

Folglich stimmt (*) auch für $\mu+1$. Ist λ Limeszahl und gilt (*) für alle $\mu < \lambda$, so folgt

$$\underset{*}{\overline{HL}} \subset \bigcap_{\mu<\lambda} \underset{\mu}{L} = \underset{\lambda}{L} \qquad (H_* \cdot L \subset \bigcap_{\mu<\lambda} L_\mu = L_\lambda).$$

Also stimmt (*) für alle μ und insbesondere für ζ, d.h. es ist $\underset{*}{HL} = H_* \cdot L = 0$. Hieraus folgt

$$\underset{*}{H} = \underset{* *}{\overline{HH}} \subset \underset{*}{\overline{HH}} = \underset{*}{\overline{HLR}} = 0 \qquad (H_* = \overline{H_* \cdot H} = \overline{H_* \cdot LR} = 0).$$

H ist also nilpotent (r-nilpotent). $J = L + H$ ist ein nach (2) abgeschlossenes zweiseitiges Oberideal von L. Aus

$$\underset{1}{J} = J_1 = \overline{JJ} = \overline{(L+H)(L+H)} \subset \overline{(L+H)R} \subset \overline{LR} + H = H$$

folgt, daß J nilpotent (r-nilpotent) ist, womit wir (11) bewiesen haben.

(12) *Sind die Linksideale A und B nilpotent, so auch ihre Summe $A+B$.*

Wegen (11) dürfen wir annehmen, daß A und B zweiseitig sind. Sei $A + B = C$. Wir behaupten: Für alle μ gilt

(**) $$\underset{*}{C} \subset \underset{\mu}{A} + B \qquad (C_* \subset A_\mu + B).$$

Das stimmt für $\mu=0$. Aus $(\overset{*}{*})$ folgt für $\mu+1$:

$$\underset{*}{C}=\overline{\underset{**}{CC}}<\overline{(\underset{\mu}{A}+B)(\underset{\mu}{A}+B)}<\overline{\underset{\mu}{A}^2}+B=\underset{\mu+1}{A}+B$$

$$(C_*=\overline{C_*\cdot C}<\overline{(A_\mu+B)(A+B)}<\overline{A_\mu\cdot A}+B=A_{\mu+1}+B).$$

Gilt $(\overset{*}{*})$ für alle $\mu<\lambda$, λ Limeszahl, so folgt nach Satz 1 auch

$$\underset{*}{C}<\bigcap_{\mu<\lambda}(\underset{\mu}{A}+B)=(\bigcap_{\mu}\underset{\mu}{A})+B=\underset{\lambda}{A}+B\quad(C_*<A_\lambda+B).$$

Folglich stimmt $(\overset{*}{*})$ für alle μ und insbesondere ist $\underset{*}{C}<\underset{*}{A}+B=B$ ($C_*<A_*+B=B$), also $\underset{*}{C}=\underset{**}{C}<\underset{*}{B}=0$. (Für C_* müssen wir etwas anders schließen: Aus $C_*<B$ folgt $C_*=\overline{C_*\cdot C}<\overline{B_\mu\cdot B}=B_{\mu+1}$ und aus $C_*<B_\mu$ für alle $\mu<\lambda=$ Limeszahl $C_*<\bigcap_\mu B_\mu=B_\lambda$, also insbesondere $C_*<B_\zeta=B_*=0$, d.h. $C_*=0$). Damit ist (12) bewiesen.

Satz 10. *Jedes transfinit nilpotente Linksideal eines linear kompakten Ringes ist quasiregulär.*

Sei $L<R$ ein nilpotentes Linksideal und $a\in L$. Wir definieren durch transfinite Induktion ein Filter $\boldsymbol{F}=\{b_\mu+\underset{\mu}{L}\}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$1.\quad b_\mu\in L\qquad 2.\quad a\circ b_\mu\in\underset{\mu}{L}.$$

Mit $b_1=a$ sind für $\mu=1$ beide Bedingungen erfüllt. Haben wir $b_\mu+\underset{\mu}{L}$ bereits so definiert, daß 1. und 2. erfüllt sind, so setzen wir $b_{\mu+1}=b_\mu\circ(-c)$ mit $c=a\circ b_\mu$. Das Element $b_{\mu+1}$ liegt in L und aus 2. folgt

$$b_{\mu+1}=b_\mu-c-b_\mu c\equiv b_\mu\ (\mathrm{mod}\,\underset{\mu}{L}).$$

Ferner ist

$$a\circ b_{\mu+1}=a\circ b_\mu\circ(-c)=c\circ(-c)=-c^2\in\underset{\mu}{L}\,\underset{\mu}{L}<\underset{\mu+1}{L}.$$

Damit ist auch $b_{\mu+1}+\underset{\mu+1}{L}$ so definiert, daß 1. und 2. erfüllt sind. Ist λ Limeszahl und $b_\mu+\underset{\mu}{L}$ für alle $\mu<\lambda$ definiert, so sei b_λ ein Element aus $\bigcap_{\mu<\lambda}(b_\mu+\underset{\mu}{L})$. Dann gilt für $b_\lambda+\underset{\lambda}{L}$ wieder 1. und 2. So können wir $b_\mu+\underset{\mu}{L}$ für alle μ erklären. Für $\mu=\zeta$ ist $\underset{\zeta}{L}=\underset{*}{L}=0$ und aus 2. folgt $a\circ b_\zeta=0$, a ist also r.q.r. Wegen 1. liegt $b=b_\zeta$ in L, ist also ebenfalls r.q.r. Wegen $a\circ b=0$ ist b aber auch l.q.r. mit dem Quasiinversen a. Folglich sind a und b q.r. Da $a\in L$ beliebig war, ist dann auch L q.r., was zu beweisen war.

Ist ω die erste transfinite Ordnungszahl, so ist für jedes Ideal A aus R offensichtlich ${}_\omega A=A_\omega=\underset{\omega}{A}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}^i$.

Satz 11. *Ist der Ring R im engeren Sinne linear kompakt, und A ein transfinit l-nilpotentes Linksideal, so ist ${}_\omega A\cdot R=0$.*

Ist L ein offenes Linksideal aus R, so ist $\mathfrak{M}=R/L$ ein i.e.S. l.k. diskreter R-Modul, in $\mathfrak{M}$ gilt also nach Satz 4 die Minimalbedingung. Zu $x\in\mathfrak{M}$ gibt es demnach ein n_0, so daß $A^{n_0}x=A^j x$ gilt für alle natürlichen Zahlen $j>n_0$. Ist nun ${}_\mu Ax=A^{n_0}x$ für eine Ordnungszahl μ, so folgt ${}_{\mu+1}Ax=A\cdot{}_\mu Ax=A^{n_0+1}x=A^{n_0}x$. Gilt ${}_\mu Ax=A^{n_0}x$ für alle $\mu<\lambda=$ Limeszahl, so folgt aus Satz 1 wieder ${}_\lambda Ax=A^{n_0}x$. Folglich ist auch ${}_*Ax=A^{n_0}x$. Aus der Voraussetzung des Satzes folgt dann $A^{n_0}x=0$ und somit erst recht ${}_\omega Ax=0$. $x\in\mathfrak{M}$ war beliebig, es ist also ${}_\omega A\,\mathfrak{M}=0$, d.h. ${}_\omega A\cdot R<L$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Zwei Folgerungen aus Satz 11:

(13) *Ist R i.e.S. l.k. mit Einselement, so folgt aus ${}_*A=0$ stets* $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}^i=0$.

(14) *Ist R i.e.S. l.k. und das Radikal N von R kommutativ, so ist* $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{N}^i\right)R=0$, *insbesondere also* $N_{\omega+1}=0$.

Da N kommutativ ist, gilt nämlich ${}_\mu N=N_\mu$ für jedes μ, also nach Satz 9 ${}_*N=N_*=0$. Für kommutative i.e.S. l.k. Ringe mit 1 folgt aus (14): $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{N}^i=0$.

Schließlich können wir noch zeigen:

(15) *Hat R ein Basisfilter aus zweiseitigen Idealen, so ist die Vereinigung aller transfinit nilpotenten (r-nilpotenten) Linksideale ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal.*

Wegen (11) und (12) ist nur die Abgeschlossenheit der Vereinigung Q der (r-)nilpotenten Linksideale zu zeigen. Wir müssen beweisen, daß ein Häufungspunkt h von Q ein (r-)nilpotentes Ideal H erzeugt. Ist Z ein offenes zweiseitiges Ideal, so gibt es ein (r-)nilpotentes Ideal A aus R mit $h\in A+Z$, also $H<A+Z$ und erst recht $\overset{*}{H}<A+Z$ ($H_*<A+Z$). Daraus folgt nach geläufigen Schlüssen $\overset{*}{H}<A+Z$ ($H_*<A_\mu+Z$) für alle μ, also $\overset{*}{H}<\overset{*}{A}+Z=Z$ ($H_*<Z$) und folglich $\overset{*}{H}=\overset{\mu}{(H_*=)}0$.

Wir wollen nun die Struktur halbeinfacher linear kompakter Ringe untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, daß die von uns benutzten Begriffe und Methoden geeignet sind, die von WEDDERBURN begonnene Theorie der halbeinfachen Ringe in gewisser Weise zum Abschluß zu bringen. Man kann die Wedderburnschen Struktursätze auffassen als eine vollständige Antwort auf die Frage, wie die endlichen direkten Summen voller Matrixringe endlichen Grades über Schiefkörpern axiomatisch gekennzeichnet sind. E. NOETHER ersetzte den Begriff *Matrixring endlichen Grades* durch den äquivalenten, aber invarianten Begriff *Ring aller linearen Transformationen eines Vektormoduls endlicher Dimension über einem Schiefkörper*. In der Noetherschen Fassung läßt sich die Beschränkung auf endliche Dimensionen leicht eliminieren. Wir wollen den Ring aller linearen Transformationen eines Vektormoduls beliebiger Dimension über einem Schiefkörper kurz als den *vollen Endomorphismenring* des Moduls bezeichnen. Wir können nun die oben gestellte Frage von ihren

beiden Einschränkungen (*endliche* direkte Summe voller Endomorphismenringe von Moduln *endlicher* Dimension) befreien und ganz allgemein fragen: *Wie sind die vollständigen direkten Summen voller Endomorphismenringe von Vektormoduln axiomatisch gekennzeichnet?* Die Antwort: *Es sind dies genau die (Jacobsonsch) halbeinfachen linear kompakten Ringe.* Insbesondere ist ein einfacher linear kompakter Ring, sofern er kein Radikalring ist, voller Endomorphismenring eines Vektormoduls über einem Schiefkörper. Schließlich zeigen wir noch, daß ein Ring genau dann halbeinfach ist, wenn er in einer direkten Summe voller Endomorphismenringe dicht liegt, d.h. wenn er dichter Unterring eines linear kompakten halbeinfachen Ringes ist.

Sei R_0 ein Ring linearer Transformationen des irreduziblen R_0-Moduls $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ ist in der diskreten Topologie bezüglich R_0 linear kompakt. Wie üblich zeigt man, daß der Ring Δ aller mit R_0 vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ ein Schiefkörper ist. $\mathfrak{M}$ ist Vektormodul über Δ und R_0 besteht aus linearen Transformationen von $\mathfrak{M}$. Der Ring R aller mit Δ vertauschbaren Endomorphismen, d.h. der Ring aller linearen Transformationen von $\mathfrak{M}$ ist nach Satz 7 ein linear kompakter topologischer Ring. Nach einem fundamentalen Satz von JACOBSON ist R_0 dichter Unterring von R ([2], Theorem 6). Algebraisch ausgedrückt bedeutet das folgendes: Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezüglich Δ linear unabhängige Elemente aus $\mathfrak{M}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ irgendwelche Elemente aus $\mathfrak{M}$, so gibt es stets ein $\sigma \in R_0$ mit $\sigma x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sei ξ ein von 0 verschiedenes Element aus R. Es gibt ein $z \in \mathfrak{M}$ mit $z' = \xi z \neq 0$. Zu $x \neq 0$, $y \in \mathfrak{M}$ gibt es Elemente $\sigma, \tau \in R$ mit $\tau x = z$ und $\sigma z' = y$, also $\sigma \xi \tau x = y$: Das zweiseitige Ideal $R\xi R$ wirkt transitiv auf $\mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist bezüglich $R\xi R$ irreduzibel. Folglich liegt $R\xi R$ nach JACOBSON in R dicht, d.h. das von ξ in R erzeugte zweiseitige Ideal ist gleich R. Damit ist gezeigt, daß R einfach ist, d.h. außer R und 0 keine abgeschlossenen zweiseitigen Ideale enthält.

Sei nun R ein einfacher l.k. Ring und kein Radikalring. R enthält ein nicht q.r. Element a. Die Abbildung $x \to x + xa$ ist ein stetiger R-Endomorphismus von R auf das Linksideal A aller $x + xa$. Wegen (2) ist A abgeschlossen. Da a nicht q.r. ist, liegt es nicht in A, es gibt also ein offenes Oberideal und somit auch ein maximales offenes Oberideal L von A mit $a \notin L$. Ist L' Oberideal von L, so folgt $a \in L'$, also wegen $A < L'$ für jedes $x \in R$: $x = (x + xa) - xa \in L'$, d.h. es ist $L' = R$. Folglich ist L maximales Unterideal von R (vgl. hierzu [1], 9). Der Faktormodul $\mathfrak{M} = R/L$ ist dann ein irreduzibler R-Modul. Der Anullator $H(\xi)$ eines Elementes $\xi = x + L$ aus $\mathfrak{M}$ besteht aus allen $y \in R$ mit $yx \in L$ und ist also ein offenes Ideal. Daraus folgt, daß der Annulator $N = \bigcap_{\xi} H(\xi)$ von $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal ist, es muß also $N = 0$ oder $N = R$ sein. $N = R$ bedeutet $R^2 < L$, also $\overline{R^2} < L$, und folglich wegen der Einfachheit $R^2 = 0$. Das ist aber nicht möglich, denn R sollte kein Radikalring sein. Folglich ist R ein Endomorphismenring von $\mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{M}$ ein Vektormodul über einem Schiefkörper und R dichter Ring linearer Transformationen. Wir können annehmen, daß die Topologie von

R eine gröbste ist. Da der von den Durchschnitten der in R offenen Ideale $H(\xi)$ gebildete Filter $\boldsymbol{B}$ eine l.k. Topologie erzeugt, muß diese mit der in R vorhandenen identisch sein. $\boldsymbol{B}$ erzeugt in R aber genau diejenige, die in R als Unterring des Ringes $\tilde{R}$ aller linearen Transformationen von $\mathfrak{M}$ von der oben definierten Topologie von $\tilde{R}$ induziert wird. R ist l.k., also in $\tilde{R}$ abgeschlossen. Da R in $\tilde{R}$ dicht liegt, folgt $R=\tilde{R}$. Somit ist bewiesen:

Satz 12. *Ein einfacher linear kompakter Ring ohne Radikal ist voller Endomorphismenring eines Vektormoduls und umgekehrt.*

Satz 12 ist die allgemeine Fassung des ersten Wedderburnschen Strukturssatzes. Dem zweiten Wedderburnschen Strukturssatz entspricht:

Satz 13. *Die halbeinfachen linear kompakten Ringe sind genau die vollständigen direkten Summen voller Endomorphismenringe von Vektormoduln über Schiefkörpern.*

Beweis. Sei $R=\sum_{\mu} R_\mu$ die direkte Summe der vollen Endomorphismenringe R_μ. Die R_μ sind einfache l.k. Ringe, mit der Tychonoffschen Topologie ist also auch R linear kompakt. Da der Durchschnitt der maximalen abgeschlossenen Linksideale aus R gleich 0 ist, ist auch R halbeinfach.

Sei nun R ein beliebiger halbeinfacher l.k. Ring und S ein abgeschlossenes von 0 verschiedenes zweiseitiges Ideal aus R. S enthält ein nicht l.q.r. Element s. Sei L ein maximales offenes Oberideal des abgeschlossenen Linksideals $\{x-xs\}_{x\in R}$. Der R-Modul $\mathfrak{M}=R/L$ ist irreduzibel und wegen $s^2\equiv s\not\equiv 0 \pmod{L}$ ist $S\mathfrak{M}\neq 0$. Wir haben also gezeigt:

(16) *Zu jedem abgeschlossenen zweiseitigen Ideal $S\subset R$ existiert ein von S nicht annullierter irreduzibler R-Modul.*

Ist $\mathfrak{M}$ ein irreduzibler R-Modul, so ist der Annulator T von $\mathfrak{M}$ ein maximales zweiseitiges abgeschlossenes Ideal mit einfachem Faktorring R/T. Sei Σ das System aller abgeschlossenen maximalen zweiseitigen Ideale aus R. Falls $Q=\bigcap_{S\in\Sigma} S\neq 0$ ist, gibt es nach (16) einen irreduziblen R-Modul $\mathfrak{M}$ mit $Q\mathfrak{M}\neq 0$. Der Annullator A von $\mathfrak{M}$ ist maximal, liegt also in Σ, folglich liegt Q in A. Das widerspricht jedoch $Q\mathfrak{M}\neq 0$. Deshalb muß $Q=0$ sein. Ist $\boldsymbol{S}$ der von Σ erzeugte Filter, also das System aller endlichen Durchschnitte maximaler zweiseitiger Ideale, so ist $\downarrow\boldsymbol{S}=0$. Da wir annehmen können, daß R mit gröbster l.k. Topologie versehen ist, gilt dann sogar $\lim \boldsymbol{S}=0$. Weil die Faktorringe R/S für $S\in\boldsymbol{S}$ i.e.S. l.k. sind, ist dann auch R i.e.S. l.k.

$S_1, S_2, \ldots, S_k\in\Sigma$ seien k verschiedene maximale zweiseitige Ideale aus R. Wir setzen

$$S=\bigcap_{i=1}^{k} S_i, \quad S^l=\bigcap_{i\neq l} S_i, \quad R/S_i=R_i', \quad R/S=R'.$$

(17) *Es ist $R'\cong R_1'\oplus R_2'\oplus\cdots\oplus R_k'$. Bei diesem Isomorphismus ist R_i' das Bild von S^i/S.*

Induktionsbeweis. Für $k=1$ stimmt (17). Wir nehmen an, unsere Behauptung stimmte für $k-1$. Dann ist $R/S^k \cong R_1' \oplus \cdots \oplus R_{k-1}'$, wobei R_i' das Bild von $\left(\bigcap_{j\neq i,\,k} S_j\right)\Big/S^k$ ist. Liegt S^k in S_k, so ist S_k/S^k ein maximales Ideal von R/S^k. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von R/S^k muß dann also $S_k = S_i$ für ein $i<k$ sein, was ausgeschlossen war. Folglich ist $Q' = S^k/S \cong R_k'$ ein minimales zweiseitiges Unterideal von R'. Sei e die Eins aus Q' und $A' < R'$ der Annullator von Q'. A' ist abgeschlossen und aus $(Q' \cap A')^2 = 0$ folgt $Q' \cap A' = 0$. Wegen $x' = x' - x'e + x'e \in A' + Q'$ ist, zunächst algebraisch, $R' = A' \oplus Q'$ direkte Summe. Die Abbildung $x' \to (x' - x'e, x'e)$ von R' auf die topologisch-algebraisch direkte Summe $A' \oplus Q'$ ist stetig und da R' i. e. S. l. k. ist also auch offen. Folglich ist R' auch topologisch die direkte Summe von A' und Q'. Aus $A' \cong R'/Q' \cong R/S^k$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $A' \cong R_1' \oplus R_2' \oplus \cdots \oplus R_{k-1}'$ und damit $R' \cong R_1' \oplus \cdots \oplus R_k'$. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung und der Maximalität von S_i/S in R' folgt, daß $\sum_{j\neq i} R_j'$ Bild von S_i, also R' Bild von $\bigcap_{i\neq l} S_i = S^l$ ist. Damit ist (17) bewiesen.

Sei nun $\Omega = \{R_\mu\}$ das System der einfachen Faktorringe der $S_\mu \in \Sigma$ und $x_\mu \in R_\mu$ das Bild von $x \in R$ modulo S_μ. Die Abbildung

$$x \to \varphi(x) = \sum_\mu x_\mu \in \tilde{R} = \sum_\mu R_\mu$$

von R auf die direkte Summe aller $R_\mu \in \Omega$ ist stetig, $\varphi(R)$ in $\tilde{R}$ also abgeschlossen. Ist für ein endliches Teilsystem $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ der Indizes μ der $R_\mu \in \Omega$ $\tilde{R}_\mu$ der Unterring aller $\sum_\mu x_\mu$ mit $x_\mu = 0$ für $\mu \in \mu$, so folgt aus (17): $\tilde{R} = \tilde{R}_\mu + \varphi(R)$. Daraus folgt $\tilde{R} = \varphi(R)$. $\varphi(x) = 0$ bedeutet $x \in S$ für alle $S \in \Sigma$, d. h. $x \in \downarrow \mathfrak{S} = 0$, also $x = 0$. Folglich ist φ ein stetiger Isomorphismus von R auf $\tilde{R}$. Da R i. e. S. l. k. war, ist φ sogar topologisch. Damit ist Satz 13 bewiesen. Eine interessante Folgerung ist

Satz 14. *Ist R ein linear kompakter Ring mit dem Radikal N und A ein zweiseitiges Ideal aus R, so ist $A \cap N$ das Radikal von A und $(N+A)/A$ das Radikal von R/A.*

Beweis. $R' = R/N$ ist halbeinfach, also nach Satz 13 direkte Summe einfacher Ringe: $R' = \sum_\mu R_\mu'$. $A' = (A+N)/N$ ist ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in R', muß also Teilsumme der R_μ' sein: $A' = \sum_\mu^* R_\mu'$. Ist $R' = \sum_\mu^* R_\mu' \oplus \sum_\nu^{**} R_\nu'$, so folgt $R'/A' = \sum_\nu^{**} R_\nu'$. Wegen

$$R'/A' \cong R/(A+N) \cong (R/A)/\big((A+N)/A\big)$$

ist dieser letzte Faktorring also halbeinfach, so daß $(A+N)/A$ das Radikal von R/A enthalten muß. Aber andererseits liegt natürlich $(A+N)/A$ im Radikal. Folglich ist $(A+N)/A$ genau das Radikal von R/A. Da $(A+N)/N$ und $A/(A \cap N)$ algebraisch isomorph sind, ist $A/(A \cap N)$ halbeinfach, d. h. $A \cap N$ enthält das Radikal von A. Weil $A \cap N$ auch im Radikal liegt, folgt Gleichheit.

Wir denken uns nun irgendeinen (nicht topologischen) halbeinfachen Ring R gegeben. Sei $\boldsymbol{B}$ der Filter aller endlichen Durchschnitte maximaler Linksideale. Nach JACOBSON [1] ist $\bigcap_{B \in \boldsymbol{B}} B = 0$. Ist $L = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n \in \boldsymbol{B}$ Durchschnitt der maximalen Linksideale L_i, so ist $R > L_1 > L_1 \cap L_2 > \cdots > L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n = L \pmod{L}$ eine Kompositionsreihe endlicher Länge des Faktormoduls R/L, für die Oberideale von L gilt also die Minimalbedingung. Sei $x \in R$, L und L_i wie bisher. Nach JACOBSON ist das Ideal H_i aller $z \in R$ mit $zx \in L_i$ in R maximal, liegt also in $\boldsymbol{B}$. Ist $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, so gilt $Hx < L_i$ für alle i, also $Hx < \bigcap_i L_i = L$. Somit existiert zu jedem $L \in \boldsymbol{B}$ und $x \in R$ ein $H \in \boldsymbol{B}$ mit $Hx \in L$, d.h. $\boldsymbol{B}$ induziert in R eine lineare Ringtopologie. Die vollständige Hülle $\tilde{R}$ von R ist ein linear kompakter R-Modul und ein linear topologischer Ring (vgl. BOURBAKI, Topologie generale ch. III, § 5).

Sei z.B. $\tilde{x} \in \tilde{R}$ und $\tilde{L} \in \tilde{\boldsymbol{B}}$ = Basisfilter von $\tilde{R}$. $\tilde{L}$ ist die abgeschlossene Hülle eines $L \in B$. Es existiert ein $x \in R$ mit $x \equiv \tilde{x} \pmod{\tilde{L}}$. Alle $z \in R$ mit $zx \in L < \tilde{L}$ bilden ein offenes Linksideal H. Aus $Hx \equiv H\tilde{x} \pmod{\tilde{L}}$ folgt für die abgeschlossene Hülle $\tilde{H} \in \tilde{\boldsymbol{B}}$ von H: $\tilde{H}\tilde{x} < \tilde{L}$. Daraus folgt die Stetigkeit der Rechtsmultiplikation.

Wir haben also R dicht eingebettet in einen l.k. Ring $\tilde{R}$. Die offenen Linksideale $\tilde{L} \in \tilde{\boldsymbol{B}}$ sind die in $\tilde{R}$ abgeschlossenen Hüllen der $L \in \boldsymbol{B}$. Ist L in R maximal und $\tilde{L}$ die Hülle von L in $\tilde{R}$, so sind R/L und $\tilde{R}/\tilde{L}$ isomorphe R-Moduln, also ist $\tilde{L}$ in $\tilde{R}$ ebenfalls maximal. Da in R der Durchschnitt der maximalen Linksideale verschwindet, muß auch in $\tilde{R}$ der Durchschnitt der abgeschlossenen maximalen Linksideale verschwinden, d.h. $\tilde{R}$ ist ebenfalls halbeinfach.

Nun sei umgekehrt R_0 ein dichter Unterring des halbeinfachen l.k. Ringes $R = \sum_{\mu} R_\mu$, R_μ voller Endomorphismenring eines Vektormoduls. Mit R^λ bezeichnen wir das maximale zweiseitige Ideal aller $\sum_{\mu} x_\mu \in R$ mit $x_\lambda = 0$. Es ist dann $R/R^\lambda \cong R_\lambda$ und

$$(R_0 + R^\lambda)/R^\lambda \cong R_0/(R_0 \cap R^\lambda).$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß $(R_0 + R^\lambda)/R^\lambda$ dichter Unterring von R/R^λ ist. Nach JACOBSON ist also $(R_0 + R^\lambda)/R^\lambda$ und damit auch $R_0/(R_0 \cap R^\lambda)$ ein primitiver, also halbeinfacher Ring. Wegen $\bigcap_\lambda (R_0 \cap R^\lambda) = 0$ ist dann R_0 ebenfalls halbeinfach. Wir haben also wegen Satz 13 gezeigt:

Satz 15. *Ein Ring ist dann und nur dann halbeinfach, wenn er dichter Unterring einer vollständigen Summe voller Endomorphismenringe von Vektormoduln ist.*

Dieser Satz ist eine Verschärfung des Jacobsonschen Satzes 28 in [1].

III. Hyperdirekte Zerlegungen.

Eine der Zerlegung eines l.k. halbeinfachen Ringes R in einfache Summanden R_μ entsprechende Zerlegung läßt sich in sehr allgemeiner Weise für

beliebige linear kompakte Operatormoduln durchführen. Die Zerlegung $R=\sum_{\mu} R_\mu$ hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Für jedes abgeschlossene Linksideal L aus R gilt nämlich $L=\sum_{\mu} L_\mu$ mit $L_\mu=L\cap R_\mu$. Es ist leicht zu sehen, daß die R_μ nicht mehr in ähnlicher Weise in Linksideale zerlegbar sind, d.h. ist $R_\mu=A\oplus B$ direkte Summe der von 0 verschiedenen abgeschlossenen Linksideale A und B, so existieren stets abgeschlossene Linksideale $C<R_\mu$, für welche $C\neq C\cap A\oplus C\cap B$ ist. Ähnlich liegen die Dinge bei den Prüferschen Gruppen. Eine Prüfersche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist direkte Summe ihrer primären Komponenten: $\mathfrak{G}=\sum_{p} \mathfrak{G}_p$. Für jede abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{A}<\mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{A}=\sum_{p}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_p)$. Die $\mathfrak{G}_p$ sind nicht mehr in entsprechender Weise weiter zerlegbar. Diese Beispiele führen uns zu der folgenden Definition.

Wir gehen aus von einem beliebigen vollständigen linear topologischen Modul $\mathfrak{M}$, zu dem eine Menge Λ hyperstetiger Endomorphismen als Linksoperatorenbereich und eine Menge Θ von beliebigen, nicht notwendig stetigen Rechtsmultiplikatoren gegeben seien. Wir bezeichnen die abgeschlossenen Λ- (Θ-) zulässigen Untermoduln als Λ- (Θ-) Untermoduln, die abgeschlossenen Λ- und Θ-zulässigen Untermoduln als (Λ,Θ)-Untermoduln. Von Λ und Θ setzen wir zunächst weiter nichts voraus, wir lassen z.B. auch zu, daß Λ oder Θ oder auch beide Bereiche leer sind. Eine algebraisch-topologische Zerlegung

$$\mathfrak{M}=\sum_{\mu}\mathfrak{M}_\mu \tag{18}$$

von $\mathfrak{M}$ in eine direkte Tychonoffsche Summe von (Λ,Θ)-Untermoduln $\mathfrak{M}_\mu$ heiße (Λ,Θ)-*hyperdirekt* oder, falls über Λ und Θ kein Zweifel herrscht, kurz *hyperdirekt*, wenn jeder Λ-Untermodul $\mathfrak{N}<\mathfrak{M}$ direkte Summe der Λ-Untermoduln $\mathfrak{N}_\mu=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}_\mu$ ist. $\mathfrak{M}$ heiße *massiv*, wenn es keine mehrgliedrige hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ gibt.

Wir beweisen zunächst einige sehr einfache Eigenschaften hyperdirekter Zerlegungen.

(19) *Sind die Zerlegungen*

$$\mathfrak{M}=\sum_{\mu}\mathfrak{A}_\mu \qquad \mathfrak{M}=\sum_{\nu}\mathfrak{B}_\nu$$

von $\mathfrak{M}$ hyperdirekt, so auch die Zerlegung

$$\mathfrak{M}=\sum_{\mu,\nu}\mathfrak{C}_{\mu\nu} \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{C}_{\mu\nu}=\mathfrak{A}_\mu\cap\mathfrak{B}_\nu.$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{A}_\mu=\sum\mathfrak{C}_{\mu\nu}$, also $\mathfrak{M}=\sum\mathfrak{C}_{\mu\nu}$. Ist $\mathfrak{L}$ ein Λ-Untermodul, so ist $\mathfrak{L}=\sum_{\mu}(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{A}_\mu)$ und $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{A}_\mu=\sum_{\nu}(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{A}_\mu\cap\mathfrak{B}_\nu)=\sum_{\nu}(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{C}_{\mu\nu})$, folglich $\mathfrak{L}=\sum_{\mu,\nu}(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{C}_{\mu\nu})$.

Aus (19) folgt unmittelbar:

(20) *Eine hyperdirekte Zerlegung in massive (Λ,Θ)-Untermoduln ist bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig.*

Wir bemerken, daß keineswegs jeder Modul $\mathfrak{M}$ hyperdirekt in massive Summanden zerlegbar zu sein braucht. Beispiel: $\mathfrak{M}$ sei diskreter Vektormodul unendlicher Dimension über einem Körper K und $\mathfrak{a} = \{a_\mu\}$ eine K-Basis von $\mathfrak{M}$. Für jede Teilmenge $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ haben wir eine Zerlegung

$$(*) \qquad \mathfrak{M} = \sum_{a_\nu \in \mathfrak{b}} a_\nu K \oplus \sum_{a_\mu \in \mathfrak{a}-\mathfrak{b}} a_\mu K$$

und eine Projektion $\pi_\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{M}$ auf $\sum_{a_\nu \in \mathfrak{b}} a_\nu K$. Λ sei die Menge dieser Projektionen und Θ sei gleich K. Die Zerlegung $(*)$ ist für jedes $\mathfrak{b}$ hyperdirekt. Es ist leicht zu sehen, daß die einzigen massiven Untermoduln die einrangigen Moduln $a_\mu K$ sind. Da $\mathfrak{M}$ unendliche Dimension haben sollte, kann es nicht zugleich algebraische und vollständige direkte Summe der $a_\mu K$ sein.

(21) *$\mathfrak{M} = \sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ und $\mathfrak{M}'$ seien (Λ, Θ)-Moduln, die Zerlegung von $\mathfrak{M}$ sei hyperdirekt. Ist φ ein stetiger, offener (Λ, Θ)-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}'_\mu = \varphi(\mathfrak{M}_\mu)$, so ist $\mathfrak{M}' = \sum_\mu \mathfrak{M}'_\mu$ hyperdirekte Summe der $\mathfrak{M}'_\mu$.*

Für den Kern $\mathfrak{K}$ von φ gilt: $\mathfrak{K} = \sum_\mu \mathfrak{K}_\mu$ mit $\mathfrak{K}_\mu = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}_\mu$, also $\mathfrak{M}/\mathfrak{K} \cong \sum_\mu (\mathfrak{M}_\mu/\mathfrak{K}_\mu)$. Diese Zerlegung ist hyperdirekt. Wegen $\mathfrak{M}' = \varphi(\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ ist dann auch $\mathfrak{M}'$ hyperdirekt zerlegt: $\mathfrak{M}' = \sum \mathfrak{M}'_\mu$. Hierbei ist offensichtlich $\mathfrak{M}'_\mu = \varphi(\mathfrak{M}_\mu) \cong \mathfrak{M}_\mu/\mathfrak{K}_\mu$.

Satz 16. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear topologischer (Λ, Θ)-Modul und $\boldsymbol{A}$ ein Filter abgeschlossener (Λ, Θ)-Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Hat $\boldsymbol{A}$ folgende Eigenschaften:*

1. $\lim \boldsymbol{A} = 0$.
2. *Jeder Filter aus Restklassen aller $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ konvergiert.*
3. *Jeder Faktormodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$, ist hyperdirekt in massive Summanden zerlegbar,*

so ist $\mathfrak{M}$ selbst hyperdirekt in massive Summanden zerlegbar.

Wir bemerken, daß 2. aus 1. folgt, falls $\mathfrak{M}$ vollständig ist. Zum *Beweis* von Satz 16 indizieren wir die $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ mit den Elementen einer gerichteten Menge I: Zu $\mu, \nu \in I$ sei $\mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{A}_\nu \in \boldsymbol{A}$ und $\mu < \nu$ sei mit $\mathfrak{A}_\mu < \mathfrak{A}_\nu$ gleichbedeutend. Ferner setzen wir $\mathfrak{M}_\mu = \mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu$. Ist $\mu < \nu$, so gibt es einen kanonischen stetigen und offenen (Λ, Θ)-Homomorphismus $h_{\nu\mu}$ von $\mathfrak{M}_\mu$ auf $\mathfrak{M}_\nu$. Ist

$$(*) \qquad \mathfrak{M}_\mu = \sum_\sigma \mathfrak{H}_{\mu\sigma}$$

die eindeutige hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}_\mu$ in massive Summanden, so ist

$$(**) \qquad \mathfrak{M}_\nu = h_{\nu\mu}(\mathfrak{M}_\mu) = \sum_\sigma h_{\nu\mu}(\mathfrak{H}_{\mu\sigma})$$

nach (21) eine hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}_\nu$. Die Zerlegung $(*)$ von $\mathfrak{M}_\nu$ in massive Summanden erhalten wir aus $(**)$, indem wir die $h_{\nu\mu}(\mathfrak{H}_{\mu\sigma})$ weiter in massive Summanden zerlegen. Wir teilen nun die $\mathfrak{H}_{\mu\sigma}$ der Zerlegung $(*)$ in Äquivalenzklassen ein: Es sei $\mathfrak{H}_{\mu\sigma} \sim \mathfrak{H}_{\mu\tau}$ dann und nur dann, wenn ein $\lambda < \mu$

existiert, für welches mit passendem ϱ gilt:

$$\mathfrak{H}_{\mu\sigma} + \mathfrak{H}_{\mu\tau} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\varrho}).$$

Reflexivität und Symmetrie der Beziehung liegt auf der Hand. Sie ist auch transitiv: Sei $\mathfrak{H}_{\mu\alpha} \sim \mathfrak{H}_{\mu\beta}$ und $\mathfrak{H}_{\mu\beta} \sim \mathfrak{H}_{\mu\gamma}$. Es gibt ein $\mathfrak{H}_{\lambda\varrho}$ und ein $\mathfrak{H}_{\varkappa\tau}$ mit $\mathfrak{H}_{\mu\alpha} + \mathfrak{H}_{\mu\beta} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\varrho})$ und $\mathfrak{H}_{\mu\beta} + \mathfrak{H}_{\mu\gamma} < h_{\mu\varkappa}(\mathfrak{H}_{\varkappa\tau})$. Sei $\iota \in I$ mit $\iota < \lambda, \varkappa$. Es existiert ein $\mathfrak{H}_{\iota\delta}$ und ein $\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon}$ der (*)-Zerlegung von $\mathfrak{M}_\iota$ mit $\mathfrak{H}_{\lambda\varrho} < h_{\lambda\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\delta})$ und $\mathfrak{H}_{\varkappa\tau} < h_{\varkappa\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon})$. Nun gilt allgemein $h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = h_{\alpha\gamma}$, also:

$$\mathfrak{H}_{\mu\beta} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\varrho}) < h_{\mu\lambda} h_{\lambda\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\delta}) = h_{\mu\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\delta})$$

und entsprechend $\mathfrak{H}_{\mu\beta} < h_{\mu\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon})$. Daraus folgt aber wegen (21): $\mathfrak{H}_{\iota\delta} = \mathfrak{H}_{\iota\varepsilon}$, also $\mathfrak{H}_{\mu\alpha} + \mathfrak{H}_{\mu\beta} + \mathfrak{H}_{\mu\gamma} < h_{\mu\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon})$. Wir fassen nun die äquivalenten Summanden der Zerlegung (*) zusammen zu Moduln $\mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$. Dann ist

$$\mathfrak{M}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$$

und jedes $\mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$ ist hyperdirekte Summe massiver Untermoduln einer Klasse äquivalenter.

Sei $\nu < \mu$. Es ist klar, daß entweder $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) = 0$ ist oder daß es genau ein α' mit $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) < \mathfrak{Q}_{\mu\alpha'}$ gibt. Sei umgekehrt $\mathfrak{H}_{\mu\varrho} < \mathfrak{Q}_{\mu\alpha'}$ und etwa $\mathfrak{H}_{\mu\sigma} < h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha})$. Es gibt ein $\lambda < \nu$ und ein $\mathfrak{H}_{\lambda\tau}$ mit

$$\mathfrak{H}_{\mu\varrho} + \mathfrak{H}_{\mu\sigma} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}) = h_{\mu\nu} h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}).$$

Wegen

$$\mathfrak{H}_{\mu\sigma} < h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) \cap h_{\mu\nu}\big(h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau})\big)$$

ist $\mathfrak{Q}_{\nu\alpha} \cap h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}) \neq 0$, also $h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}) < \mathfrak{Q}_{\nu\alpha}$ und folglich $\mathfrak{H}_{\mu\varrho} < h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha})$, d.h.: Entweder ist $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) = 0$ oder es gibt ein α' mit $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) = \mathfrak{Q}_{\mu\alpha'}$.

$\mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$ ist Faktorgruppe modulo $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$, es existiert also ein abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} < \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{Q}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_{\mu\alpha}/\mathfrak{A}_\mu$. Mit Hilfe dieser $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ können wir unsere Ergebnisse auch so formulieren:

(22) *Für jedes $\mu \in I$ ist hyperdirekt*

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{P}_{\mu\alpha}/\mathfrak{A}_\mu.$$

Ist $\nu < \mu$, so gibt es zu jedem $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ genau ein $\mathfrak{P}_{\nu\alpha}$ mit

$$\mathfrak{P}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_{\nu\alpha} + \mathfrak{A}_\mu.$$

Die restlichen $\mathfrak{P}_{\nu\beta}$ liegen alle in $\mathfrak{A}_\mu$.

Wir können nun auch die $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ in Äquivalenzklassen einteilen: $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \sim \mathfrak{P}_{\nu\beta}$ bedeute Existenz eines $\mathfrak{P}_{\lambda\gamma}$ mit $\lambda < \mu, \nu$ und $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_{\lambda\gamma} + \mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{P}_{\nu\beta} = \mathfrak{P}_{\lambda\gamma} + \mathfrak{A}_\nu$. Aus (22) folgt, daß hierdurch in der Tat eine Äquivalenzrelation definiert ist. Wir wollen alle $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ einer Äquivalenzklasse mit demselben zweiten Index bezeichnen. Für jedes α sei

$$\mathfrak{P}_\alpha = \bigcap_{\mu \in I} \mathfrak{P}_{\mu\alpha}.$$

Die $\mathfrak{P}_\alpha$ sind abgeschlossene (Λ, Θ)-Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Wir setzen

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \sum_\alpha \mathfrak{P}_\alpha$$

und behaupten:

1. $\mathfrak{M} \cong \widetilde{\mathfrak{M}}$ (algebraisch und topologisch).
2. Alle $\mathfrak{P}_\alpha$ sind massiv.
3. Die Zerlegung ist hyperdirekt.

Zu 1). Wir definieren einen Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ (vgl. [7], Satz (2.10)): Sei $x \in \mathfrak{M}$. Für $\mu \in I$ ist

$$x \equiv \sum_\alpha x_{\mu\alpha} \pmod{\mathfrak{A}_\mu}.$$

Die Restklassen $\mathfrak{x}_{\mu\alpha} = x_{\mu\alpha} + \mathfrak{A}_\mu$ sind durch x für jedes α eindeutig bestimmt, liegen in $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ und bilden ein Filter $\boldsymbol{C}_\alpha(x)$. Wegen Voraussetzung 2. aus Satz 16 existiert $x_\alpha = \lim \boldsymbol{C}_\alpha(x)$ und liegt in $\bigcap_\mu \mathfrak{P}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha$. Durch

$$x \to \varphi(x) = \sum_\alpha x_\alpha$$

ist also eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ definiert.

a) φ ist ein algebraischer (Λ, Θ)-Isomorphismus.

Aus $\varphi(x) = 0$ folgt $x_\alpha \in \mathfrak{A}_\mu$, also $x_{\mu\alpha} \in \mathfrak{A}_\mu$, also $x \in \mathfrak{A}_\mu$ für alle μ und wegen Satz 16,1. also $x = 0$. Die Homomorphieeigenschaft ist klar.

b) $\varphi(\mathfrak{M}) = \widetilde{\mathfrak{M}}$.

Sei $\tilde{x} = \sum_\alpha x_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{M}}$. Für $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$ verstehen wir unter $\tilde{x} + \mathfrak{A}_\mu$ die Restklasse $\sum_\alpha^* x_\alpha + \mathfrak{A}_\mu$ aus $\mathfrak{M}$, wobei in $\sum^*$ über alle α mit $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \neq \mathfrak{A}_\mu$ summiert wird. Die $\tilde{x} + \mathfrak{A}_\mu$ bilden ein Filter $\boldsymbol{X}$, wegen 2. existiert also $\lim \boldsymbol{X} = x$. Offenbar ist $\varphi(x) = \tilde{x}$.

c) φ ist topologisch.

Sei $\widetilde{\mathfrak{U}} = \sum_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$ eine Umgebung der 0 in $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Fast alle Moduln $\mathfrak{U}_\alpha$ sind gleich $\mathfrak{P}_\alpha$, es existiert also ein offener Λ-Untermodul $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{P}_\alpha \subset \mathfrak{U}_\alpha$ für alle α. Ist $x \in \mathfrak{M}$ und $\varphi(x) = \sum_\alpha x_\alpha$, so setzen wir $\varphi_\alpha(x) = x_\alpha$. Für alle μ und α gilt $\varphi_\alpha(\mathfrak{U}) + \mathfrak{A}_\mu \subset \mathfrak{U} + \mathfrak{A}_\mu$, also wegen $\lim \boldsymbol{A} = 0$ auch $\varphi_\alpha(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}$. Daraus folgt

$$\varphi(\mathfrak{U}) \subset \sum_\alpha \varphi_\alpha(\mathfrak{U}) \subset \sum_\alpha (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{P}_\alpha) \subset \sum_\alpha \mathfrak{U}_\alpha = \widetilde{\mathfrak{U}}.$$

Folglich ist φ stetig.

Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$. Aus $\lim \boldsymbol{A} = 0$ folgt, daß $\mathfrak{U}$ ein $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$ enthält. Da $\mathfrak{U}/\mathfrak{A}_\mu$ in $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{P}_{\mu\alpha}/\mathfrak{A}_\mu$ offen ist, liegen fast alle $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$, also erst recht fast alle $\mathfrak{P}_\alpha$ in $\mathfrak{U}$, so daß $\widetilde{\mathfrak{U}} = \sum_\alpha (\mathfrak{P}_\alpha \cap \mathfrak{U})$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ offen ist. Sei

$\tilde{x} = \sum_\alpha x_\alpha \in \tilde{\mathfrak{U}}$ und $\tilde{x} = \varphi(x)$ mit $x \in \mathfrak{M}$. Es folgt

$$x \equiv \sum x_\alpha \equiv 0 \pmod{\left(\sum_\alpha (\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \cap \mathfrak{U})\right) + \mathfrak{A}_\mu},$$

d.h.

$$x \in \sum_\alpha (\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \cap \mathfrak{U}) + \mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{U}, \quad \tilde{\mathfrak{U}} < \varphi(\mathfrak{U}).$$

Folglich ist φ auch offen. Damit ist die Isomorphie von $\mathfrak{M}$ und $\tilde{\mathfrak{M}}$ gezeigt.

Sei $\mathfrak{L}$ ein Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{P}_\alpha$. Für jedes $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ ist $\mathfrak{L} + \mathfrak{A} = \sum_\alpha \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{A}$, also ist $\mathfrak{L} = \sum_\alpha \mathfrak{L}_\alpha$. Damit ist gezeigt, daß die Zerlegung hyperdirekt ist. Es bleibt zu zeigen, daß alle $\mathfrak{P}_\alpha$ massiv sind. Hierbei können wir uns auf den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_\alpha$ beschränken, d.h. wir dürfen annehmen, daß für jedes $\mu \in I$ alle Summanden der Zerlegung $\mathfrak{M}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{H}_{\mu\alpha}$ äquivalent sind. Sei nun $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{M}''$ hyperdirekt. Für jedes $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$ ist dann $\mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{A}'_\mu \oplus \mathfrak{A}''_\mu$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{M}'/\mathfrak{A}'_\mu \oplus \mathfrak{M}''/\mathfrak{A}''_\mu = \mathfrak{M}'_\mu \oplus \mathfrak{M}''_\mu$. Falls $\mathfrak{M}'_\mu$ und $\mathfrak{M}''_\mu$ beide von Null verschieden wären, könnten wir ein $\nu < \mu$ und einen massiven Summanden $\mathfrak{H}_\nu$ von $\mathfrak{M}_\nu$ finden, mit $h_{\mu\nu}(\mathfrak{H}_\nu) \cap \mathfrak{M}'_\mu \neq 0$, $h_{\mu\nu}(\mathfrak{H}_\nu) \cap \mathfrak{M}''_\mu \neq 0$. Das ist aber nicht möglich, denn $\mathfrak{H}_\nu$ liegt entweder in $\mathfrak{M}'_\nu$ oder in $\mathfrak{M}''_\nu$. Folglich ist etwa $\mathfrak{M}''_\mu = 0$ für alle μ und somit auch $\mathfrak{M}'' = 0$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist massiv. Damit ist Satz 16 vollständig bewiesen.

Genügt $\boldsymbol{A}$ statt $\lim \boldsymbol{A} = 0$ nur der schwächeren Bedingung $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$, so können wir nicht auf die algebraisch-topologische Isomorphie von $\mathfrak{M}$ und $\tilde{\mathfrak{M}}$ schließen. Wir können jedoch die Topologie von $\mathfrak{M}$ vergröbern, indem wir als neuen Basisfilter den Filter aller Λ-Untermoduln $\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$, $\mathfrak{U}$ offener Λ-Untermodul, wählen. In dieser Topologie bleibt $\mathfrak{M}$ separiert und es gilt $\lim \boldsymbol{A} = 0$. Bezeichnen wir den gröber topologisierten Modul mit $\mathfrak{M}^*$, so ist $\mathfrak{M}^* \cong \tilde{\mathfrak{M}}^*$. Die kanonische Abbildung ψ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}^*$ ist stetig, die Abbildung $\varphi^* = \varphi\psi$ von $\mathfrak{M}$ auf $\tilde{\mathfrak{M}}^*$ ist also ein stetiger Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf eine hyperdirekte Summe massiver (Λ, Θ)-Moduln. Es ist aber zu beachten, daß im allgemeinen $\tilde{\mathfrak{M}}^* \neq \tilde{\mathfrak{M}}$ sein wird!

(23) *Ein diskreter l.k. (Λ, Θ)-Modul $\mathfrak{M}$ ist hyperdirekte Summe endlich vieler massiver Untermoduln.*

Ist $\mathfrak{M}$ massiv, so ist nichts zu beweisen. Andernfalls ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}'_1$ hyperdirekt. Falls beide Summanden die in (23) formulierte Eigenschaft haben, sind wir fertig. Sonst sei etwa $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}'_2$ usw. Wir erhalten eine Folge hyperdirekter Zerlegungen

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \mathfrak{M}_k \oplus \mathfrak{M}'_k, \qquad \mathfrak{M}_i \neq 0.$$

Diese Folge muß schließlich zu einer Zerlegung in endlich viele massive Summanden führen, denn sonst enthielte $\mathfrak{M}$ die algebraische direkte Summe aller $\mathfrak{M}_i$, welche wegen der Diskretheit von $\mathfrak{M}$ abgeschlossen wäre. Nach gewohntem Schluß führt man das aber zum Widerspruch mit der linearen Kompaktheit von $\mathfrak{M}$.

Aus (23) und Satz 16 folgt sofort:

Satz 17. *Jeder linear kompakte (Λ, Θ)-Modul mit einem Basisfilter aus (Λ, Θ)-Untermoduln ist hyperdirekt in massive Untermoduln zerlegbar.*

Wir brauchen für $\boldsymbol{A}$ in Satz 16 nur ein Basisfilter von $\mathfrak{M}$ zu nehmen.

Nun sei $\mathfrak{M}$ ein Λ-Modul, $\emptyset$ die leere Menge und Θ ein System mit Λ vertauschbarer Rechtsoperatoren. Eine (Λ, Θ)-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ ist natürlich stets auch $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekt, das umgekehrte braucht allgemein selbstverständlich nicht richtig zu sein. Sind jedoch alle Operatoren aus Θ stetig, so kann man auch die Umkehrung zeigen:

Satz 18. *$\mathfrak{M}$ sei ein (Λ, Θ)-Modul. Sind alle Operatoren aus Θ stetig, so ist jede $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ auch (Λ, Θ)-hyperdirekt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ eine $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ und π_i die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}_i$. Die π_i sind stetig. Wir können annehmen, daß Θ ein Ring ist und die π_i enthält. Zu beweisen ist $\mathfrak{M}_i\Theta < \mathfrak{M}_i$ für $i = 1, 2$. Sei $\varrho \in \Theta$, $\sigma = \pi_1 + \pi_1 \varrho\, \pi_2 \in \Theta$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\sigma$. Wegen $\sigma^2 = \sigma$ ist $\mathfrak{A}$ der Modul aller $z \in \mathfrak{M}$ mit $z = z\,\sigma$; da σ stetig ist, ist $\mathfrak{A}$ also abgeschlossen. Aus $\mathfrak{M}_2\sigma = \mathfrak{M}\,\pi_2\sigma = 0$ folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_2 = 0$. Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_2$ liegt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{M}_1$, aus der direkten Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ folgt also für jedes $x_1 \in \mathfrak{M}_1$: $x_1 \varrho\, \pi_2 = x_1 \pi_1 \varrho\, \pi_2 = 0$, d.h.

$$\mathfrak{M}_1 \varrho = \mathfrak{M}_1 \varrho\,(\pi_1 + \pi_2) < \mathfrak{M}_1 \varrho\, \pi_1 + \mathfrak{M}_1 \varrho\, \pi_2 = \mathfrak{M}_1 \varrho\, \pi_1 < \mathfrak{M}_1.$$

Folglich ist $\mathfrak{M}_1$ Θ-invariant.

Sei nun $\mathfrak{M} = \sum_{\mu} \mathfrak{M}_\mu$ eine beliebige $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$. Setzen wir $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_\lambda$, $\mathfrak{M}_2 = \sum_{\mu \neq \lambda} \mathfrak{M}_\mu$, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ eine $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$, nach dem eben bewiesenen ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_\lambda$ also Θ-invariant. Folglich sind alle Summanden $\mathfrak{M}_\mu$ (Λ, Θ)-Untermoduln, d.h. die Zerlegung ist (Λ, Θ)-hyperdirekt. Damit ist der Satz bewiesen.

Wenden wir Satz 17 und Satz 18 auf l.k. Ringe an, so erhalten wir:

Satz 19. *Ein linear kompakter Ring R ist in genau einer Weise vollständige hyperdirekte Summe massiver zweiseitiger Ideale R_μ:*

$$R = \sum_{\mu} R_\mu.$$

Enthält R eine Eins, so sind die Ideale R_μ zweiseitig unzerlegbar, d.h. in einer direkten Zerlegung $R_\mu = A \oplus B$ in abgeschlossene zweiseitige Ideale A und B muß ein Summand verschwinden.

Beweis. Nach Satz 17 ist R mit $\Lambda = R$ eine $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Summe massiver Summanden R_μ, d.h. R ist hyperdirekte Summe von Linksidealen R_μ. Die Rechtsmultiplikationen eines topologischen Ringes sind stetig, setzen wir also $\Theta = R$, so folgt aus Satz 18, daß die Zerlegung auch (Λ, Θ)-hyperdirekt ist, d.h. die R_μ sind zweiseitige Ideale. Enthält R ein Einselement e, so ist $e = \sum_{\mu} e_\mu$, wobei e_μ das Einselement des Summanden R ist. Aus einer direkten Zerlegung $R_\mu = A \oplus B$ in zweiseitige Ideale folgt $e_\mu = e'_\mu + e''_\mu$ mit

Zentrumsidempotenten e'_μ, e''_μ. Ist L ein Linksideal aus R_μ, so folgt $L = Le'_\mu \oplus Le''_\mu = L \cap A \oplus L \cap B$, d.h. die Zerlegung von R_μ ist hyperdirekt. Da R_μ massiv ist, muß dann A oder B verschwinden.

Literatur.

[1] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945). — [2] JACOBSON, N.: Structure theory of simple rings without finiteness assumptions. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 228—245 (1945). — [3] JACOBSON, N.: On the theory of primitive rings. Ann. of Math. **48**, 8—21 (1947). — [4] KAPLANSKY, I.: Topological rings. Amer. J. Math. **69**, 153—183 (1947). — [5] KRULL, W.: Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann. **100**, 687—698 (1928). — [6] LEFSCHETZ, S.: Algebraic Topology. New York 1942. — [7] LEPTIN, H.: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen I, II. Abh. Math. Sem. Hamb. **19**, 23—40 221—243 (1954). — [8] PRÜFER, H.: Theorie der abelschen Gruppen. Teil I: Math. Z. **20**, 165—187 (1924); Teil II: Math. Z. **22**, 222—249 (1925). — [9] ZELINSKY, D.: Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math. **75**, 79—90 (1953).

Hamburg 13, St. Benedictstr. 30.

(Eingegangen am 12. Dezember 1954.)

KARZEL, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 268—291 (1955).

Ordnungsfunktionen in nichtdesarguesschen projektiven Geometrien.

Von
HELMUT KARZEL.

Der Begriff der *Ordnungsfunktion* ist schon von E. SPERNER [5][1]) für beliebige Räume eingeführt worden, aber bisher in der Hauptsache nur in desarguesschen Geometrien gebraucht worden. Andererseits legt gerade die Allgemeinheit dieses Begriffes Formulierung und Untersuchung von Anordnungseigenschaften in allgemeineren Geometrien nahe. Dieser Aufgabe soll die vorliegende Note hinsichtlich einer ebenen projektiven Geometrie Π, für die nur die üblichen projektiven Existenz- und Verknüpfungsaxiome, aber keine Schnittpunktsätze (auch nicht der Satz von DESARGUES oder Spezialfälle davon) vorausgesetzt werden, dienen. Als Ordnungsfunktion einer solchen Ebene Π bezeichnen wir jede nur die Werte $0, +1, -1$ annehmende Funktion $h(\alpha)$ der zwei Veränderlichen h (= Gerade) und α (= Punkt), die den Wert 0 genau dann annimmt, wenn h und α inzidieren. Von all diesen Ordnungsfunktionen wollen wir aber nur diejenigen betrachten, die der *Geradenrelation* genügen, d.h. der Forderung: Sind α, β, γ drei beliebige voneinander verschiedene Punkte einer Geraden g und h, k zwei Geraden $\neq g$, die mit γ inzidieren, so soll stets $h(\alpha)\, h(\beta)\, k(\alpha)\, k(\beta) = +1$ gelten.

Zunächst werden in Anlehnung an die zitierte Arbeit von SPERNER [5] drei grundlegende Anordnungssätze bewiesen, deren Beweis bisher nur mit Hilfe von Schnittpunktsätzen erbracht worden war (vgl. § 1). Diese Sätze gestatten die in [5] entwickelte Theorie auf *nichtdesarguessche* Geometrien zu übertragen. Von Interesse dürften hierbei auch einige Anordnungsaussagen sein, die sich in desarguesschen Geometrien gar nicht formulieren lassen, da in diesen immer gewisse der beteiligten Elemente zusammenfallen.

In § 2 wird der nach M. HALL [1] zu jeder projektiven Ebene als Koordinatenbereich gehörige *ternäre Ring* — hier etwas anders als bei HALL definiert — herangezogen und die Frage nach den „*Anordnungen*" gestellt, die von den Ordnungsfunktionen der Geometrie im ternären Ring induziert werden.

Einige Eigenschaften dieser Anordnungen werden hergeleitet (§ 3) und umgekehrt wird gezeigt, wie man mit Hilfe gewisser Anordnungen Ordnungsfunktionen erzeugen kann, die jedoch nicht der Geradenrelation zu genügen

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Nummern des Literaturverzeichnisses auf S. 291.

brauchen. Die Hauptaufgabe dieser Note, nämlich die vollständige Kennzeichnung dieser Anordnungen, d.h. die Herleitung derjenigen ihrer Eigenschaften, welche genau der Geradenrelation entsprechen, erfolgt in § 4.

Im § 5 schließlich werden die sog. *einfachen* Ordnungsfunktionen[2]) betrachtet. Ihre Eigenschaften, die im Falle einer desarguesschen Geometrie bekannt sind, lassen sich auch an nichtdesarguesschen Geometrien bestätigen, wozu zum Teil allerdings andere Beweismethoden benötigt werden.

§ 1. Allgemeine Anordnungsaussagen.

Mit Hilfe der Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ mit Geradenrelation erklärt man für vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer Geraden j mit $\alpha, \beta \neq \gamma, \delta$ ein *Trennsymbol* $[\gamma, \delta|\alpha, \beta]$, auch *Ordnungsfunktion zweiter Stufe* genannt, indem man

$$[\gamma, \delta|\alpha, \beta] = [g, h|\alpha, \beta] = g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta)$$

setzt, wobei g, h mit $g(\gamma) = h(\delta) = 0$ zwei beliebige Geraden $\neq j$ sind[3]).

Für dieses Trennsymbol gilt der nachfolgende Vertauschungssatz, der bisher nur unter Benutzung des Vierseitsatzes bewiesen wurde[3]). Er ist aber unabhängig davon, wie jetzt gezeigt werden soll.

Satz 1. $[\gamma, \delta|\alpha, \beta] = [\alpha, \beta|\gamma, \delta]$ *d.h.* $[g, h|\alpha, \beta] = [k, l|\gamma, \delta]$ *mit* $g(\gamma) = h(\delta) = k(\alpha) = l(\beta) = 0$.

Zum Beweise wenden wir die Geradenrelation (s. Fig. 1) siebenmal an:

$$\begin{aligned}
&g(\alpha)\ g(\tau)\ h'(\alpha)\ h'(\tau) = 1\\
&g(\beta)\ g(\tau)\ h(\beta)\ h(\tau) = 1\\
&h(\alpha)\ h(\gamma)\ h'(\alpha)\ h'(\gamma) = 1\\
&h(\sigma)\ h(\tau)\ h'(\sigma)\ h'(\tau) = 1\\
&k(\gamma)\ k(\sigma)\ h'(\gamma)\ h'(\sigma) = 1\\
&k(\delta)\ k(\sigma)\ l(\delta)\ l(\sigma) = 1\\
&h(\gamma)\ h(\sigma)\ l(\gamma)\ l(\sigma) = 1\,.
\end{aligned}$$

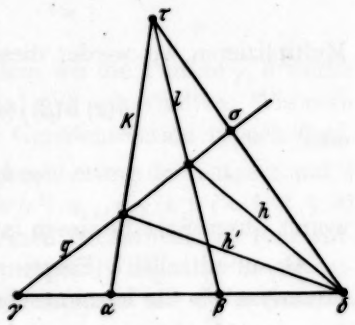


Fig. 1.

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich:

$$g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta) = k(\gamma)\, k(\delta)\, l(\gamma)\, l(\delta)\,, \text{ w. z. b. w.}$$

Von Bedeutung ist weiter ein Satz über *harmonische* Quadrupel, der in desarguesschen Geometrien eine Selbstverständlichkeit ist, hier aber eines eigenen Beweises bedarf.

Satz 2. *Für alle Quadrupel* $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ *in harmonischer Lage ist der Wert des Trennsymbols* $[\alpha, \beta|\gamma, \delta]$ *derselbe.*

---

[2]) Siehe [6] S. 35.

[3]) Vgl. [5] S. 115 und 120.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ zwei Punktequadrupel in harmonischer Lage sind, $[\alpha, \beta|\gamma, \delta] = [\alpha', \beta'|\gamma', \delta']$ gilt. Dabei können wir annehmen, daß die Punkte α, β, γ und α', β', γ' perspektiv liegen.

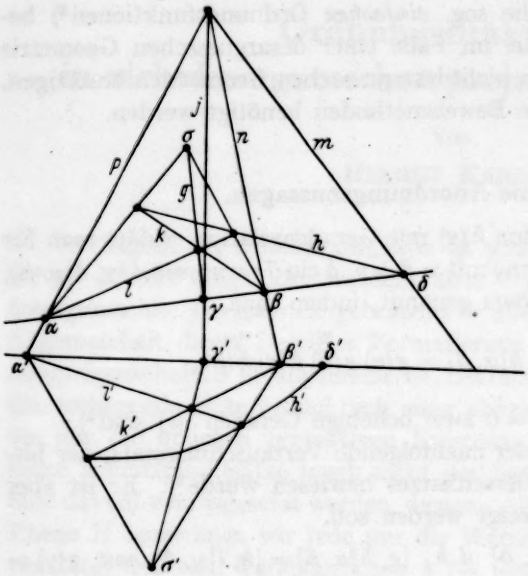


Fig. 2.

Auch hier ergibt sich der Beweis durch mehrmalige Anwendung der Geradenrelation (s. Fig. 2):

$$
\begin{array}{llll}
h(\alpha) & h(\sigma) & k(\alpha) & k(\sigma) = 1 \\
h(\beta) & h(\sigma) & l(\beta) & l(\sigma) = 1 \\
k(\sigma) & k(\gamma) & l(\sigma) & l(\gamma) = 1 \\
k(\alpha) & k(\gamma) & n(\alpha) & n(\gamma) = 1 \\
l(\beta) & l(\gamma) & p(\beta) & p(\gamma) = 1 \\
n(\gamma) & n(\gamma') & p(\gamma) & p(\gamma') = 1 \\
n(\alpha) & n(\alpha') & j(\alpha) & j(\alpha') = 1 \\
p(\beta) & p(\beta') & j(\beta) & j(\beta') = 1 \\
l'(\beta') & l'(\gamma') & p(\beta') & p(\gamma') = 1 \\
k'(\alpha') & k'(\gamma') & n(\alpha') & n(\gamma') = 1 \\
k'(\sigma') & k'(\gamma') & l'(\sigma') & l'(\gamma') = 1 \\
h'(\beta') & h'(\sigma') & l'(\beta') & l'(\sigma') = 1 \\
h'(\alpha') & h'(\sigma') & k'(\alpha') & k'(\sigma') = 1 .
\end{array}
$$

Multiplizieren wir wieder diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$h(\alpha)\, h(\beta)\, j(\alpha)\, j(\beta) = h'(\alpha')\, h'(\beta')\, j(\alpha')\, j(\beta')$$

oder:

$$[\gamma, \delta|\alpha, \beta] = [\gamma', \delta'|\alpha', \beta'],$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Als unmittelbare Folgerung aus der eben bewiesenen Eigenschaft des Trennsymbols für harmonische Punktequadrupel erhalten wir den folgenden

Satz 3[4]). *In jeder projektiven Ebene lassen sich die Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation in harmonische und anharmonische einteilen, je nachdem ob das Trennsymbol* $[\alpha, \beta|\gamma, \delta]$ *für harmonische Punktequadrupel* $+1$ *oder* -1 *ist.*

Wesentlich ist hier, daß der Satz 3 nunmehr auch ohne Voraussetzung des Satzes von DESARGUES bewiesen ist. Weiter folgt in derselben Allgemeinheit aus den Sätzen 2 und 3 auch die Gültigkeit der Sätze 14, 15 und 16 aus [5].

Jetzt wollen wir uns mit einer besonderen Art von Punktequadrupeln befassen, die wir *desarguessche* Quadrupel nennen. Darunter sollen vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer Geraden verstanden werden, von denen die ersten beiden α, β Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspektiv liegender

[4]) Vgl. [5] S. 128.

Dreiecke sein sollen und die beiden anderen γ, δ durch die einander zugeordneten dritten Seiten bestimmt sind (s. Fig. 3).

In desarguesschen Geometrien ist stets $\gamma = \delta$, so daß dort die hier angestellten Betrachtungen sinnlos werden. Für desarguessche Quadrupel gilt nun folgender

Satz 4. *Für Punktequadrupel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in desarguesscher Lage ist das Trennsymbol $[\gamma, \delta | \alpha, \beta]$ stets gleich $+1$.*

Beweis. Zum Beweis betrachten wir Fig. 3 und wenden fünfmal die Geradenrelation an:

$$h(\alpha)\ h(\mu)\ \ k_1(\alpha)\ k_1(\mu) = 1$$
$$h(\beta)\ h(\mu)\ \ k_3(\beta)\ k_3(\mu) = 1$$
$$g(\alpha)\ g(\mu')\ \ k_1(\alpha)\ k_1(\mu') = 1$$
$$g(\beta)\ g(\mu')\ \ k_3(\beta)\ k_3(\mu') = 1$$
$$k_1(\mu)\, k_1(\mu')\ \ k_3(\mu)\ k_3(\mu') = 1$$

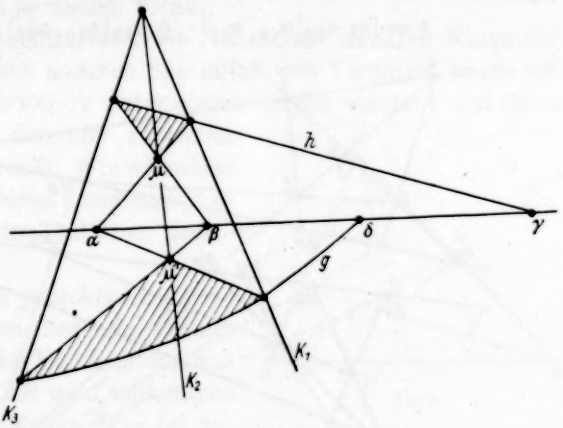


Fig. 3

Hieraus folgt:

$$h(\alpha)\ h(\beta)\ \ g(\alpha)\ g(\beta) = 1$$

oder

$$[h, g | \alpha, \beta] = [\gamma, \delta | \alpha, \beta] = 1.$$

Wir können auch die Aussage des Satzes 4 als eine verallgemeinerte Geradenrelation auffassen, indem wir die Punkte γ, δ durch die Geraden g, h ersetzen und dann $h(\alpha)\, h(\beta)\, g(\alpha)\, g(\beta) = 1$ erhalten. Wie man leicht einsieht, ist auch diese verallgemeinerte Geradenrelation in sich dual.

Nun wenden wir uns einer gewissen Verallgemeinerung der Sätze 2 und 4 zu. Hierzu betrachten wir zwei *Hessenbergwürfe*[5]) $\alpha_{ik}, \alpha'_{ik}$ $(k > i = 1, 2, 3, 4)$ in der Lage (s. Fig. 4), daß fünf Punkte des einen Sechstupels zu fünf entsprechenden Punkten des anderen Sechstupels perspektiv liegen (in desarguesschen Geometrien läßt sich auch das sechste Punktepaar mit einer Geraden verbinden, die durch das Zentrum geht). Sind $\alpha_{ik}\,(+\alpha_{34} = \omega)$ und $\alpha'_{ik}\,(+\alpha'_{34} = \varrho')$ die zueinander perspektiv liegenden Punkte der beiden Hessenbergwürfe, so lassen sich folgende Relationen für das Trennsymbol beweisen:

$$(1)\quad [\omega, \alpha_{12} | \alpha_{24}, \alpha_{13}] = [\omega, \alpha_{12} | \alpha_{14}, \alpha_{23}] = [\varrho', \alpha'_{12} | \alpha'_{14}, \alpha'_{23}] = [\varrho', \alpha'_{12} | \alpha'_{24}, \alpha'_{13}]$$

$$(2)\qquad [\omega, \varrho | \alpha_{ik}, \alpha_{jl}] = 1 \qquad (i, j = 1, 2;\ k, l = 3, 4),$$

wenn ϱ aus ϱ' durch die gegebene Perspektivität hervorgeht.

[5]) Dabei wollen wir als einen *Hessenbergwurf* jedes Sechstupel α_{ik} bezeichnen, das von einem vollständigen Viereck auf einer Geraden ausgeschnitten wird oder zu solch einem perspektiv ist (vgl. [2]). (In dem Lehrbuch von VEBLEN-YOUNG: „Projective geometry I" wird ein derartiges Sechstupel als *quadrangular set* bezeichnet.) Numerieren wir die beiden Vierecke mit 1, 2, 3, 4 und 1', 2', 3', 4', so nennen wir zwei Punkte entsprechend, wenn sie von den Verbindungsgeraden (i, k) und (i', k') ausgeschnitten werden.

Beweis. Nach [5] Satz 9 sowie Satz 1 dieser Arbeit ergibt sich:

$$[\omega, \alpha_{12}|\alpha_{24}, \alpha_{13}] = [\omega, \alpha_{12}|\alpha_{14}, \alpha_{23}] = [\alpha_{14}, \alpha_{23}|\alpha_{24}, \alpha_{13}]$$
$$[\varrho', \alpha'_{12}|\alpha'_{24}, \alpha'_{13}] = [\varrho', \alpha'_{12}|\alpha'_{14}, \alpha'_{23}] = [\alpha'_{14}, \alpha'_{23}|\alpha'_{24}, \alpha'_{13}].$$

Da die α_{ik} $(\neq \alpha_{34})$ und α'_{ik} $(\neq \alpha'_{34})$ perspektiv liegen, ist $[\alpha_{14}, \alpha_{23}|\alpha_{24}, \alpha_{13}] = [\alpha'_{14}, \alpha'_{23}|\alpha'_{24}, \alpha'_{13}]$[6]), womit (1) bewiesen ist. Da aber auch ϱ und ϱ' perspektiv liegen, gilt:

$$[\omega, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] = [\varrho, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] \qquad (k, l = 3, 4;\ k \neq l)$$

oder:

$$1 = [\omega, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] \cdot [\varrho, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] = [\omega, \varrho|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}]$$[7]).

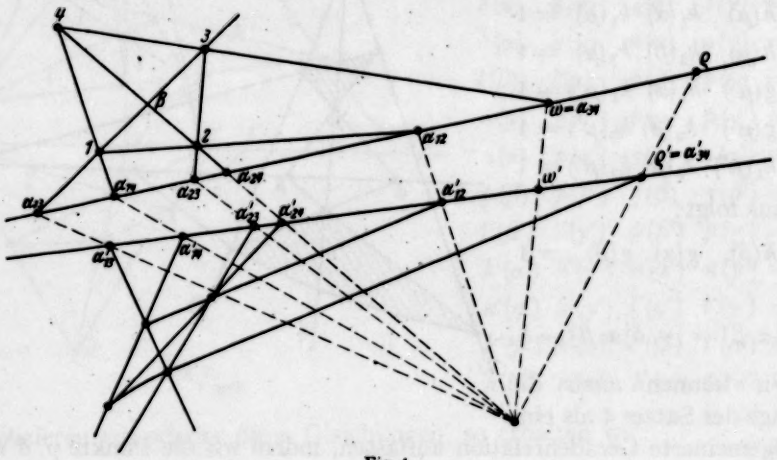


Fig. 4.

Wir beweisen noch: $[\omega, \varrho|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = 1$. Das Quadrupel $\omega, \alpha_{24}, \alpha_{14}, \alpha_{13}$ liegt zu $3, \beta, 1, \alpha_{13}$ dieses wiederum zu $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ perspektiv (s. Fig. 4). Es gilt also:

$$[\omega, \alpha_{24}|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = [\alpha_{23}, \alpha_{24}|\alpha_{12}, \alpha_{13}]$$

und entsprechend:

$$[\varrho', \alpha'_{24}|\alpha'_{14}, \alpha'_{13}] = [\alpha'_{23}, \alpha'_{24}|\alpha'_{12}, \alpha'_{13}].$$

Da aber ϱ, α_{ik} $(\neq \alpha_{34})$ und ϱ', α'_{ik} $(\neq \alpha'_{34})$ perspektiv liegen, ist:

$$[\omega, \alpha_{24}|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = [\varrho, \alpha_{24}|\alpha_{14}, \alpha_{13}]$$

oder:

$$[\omega, \varrho|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = 1.$$

Die übrigen unter (2) zusammengefaßten Relationen ergeben sich durch Multiplikationen der bereits bewiesenen.

Satz 4 ist, wie man leicht einsieht, ein Spezialfall einer der Relationen (2). Dagegen läßt sich der Satz 2 nicht als Spezialfall deuten und bedarf eines eigenen Beweises, da es sich hier um einen Ausartungsfall handelt.

[6]) Nach [5] S. 116 (15) haben Trennsymbole perspektiver Punktequadrupel denselben Wert.

[7]) Siehe [5] S. 111 (8).

§ 2. Einführung von Koordinaten.

Wie M. HALL [1] zuerst gezeigt hat, läßt sich jeder projektiven Ebene mindestens ein sog. *ternärer Ring* als Koordinatenbereich zuordnen, der bei desarguesschen Geometrien mit dem zugehörigen Körper übereinstimmt. Umgekehrt entspricht jedem ternären Ring *eindeutig* eine projektive Ebene. SKORNYAKOV [4] hat danach noch etwas allgemeinere Ringe, die er *Ternare* nennt, zu demselben Zwecke gebraucht. Allerdings ist bei desarguesschen Geometrien ein zugehöriger Ternar im allgemeinen kein Körper. Der zugehörige Körper ist hier nur ein spezieller Ternar.

Da ich bei meinen Untersuchungen keine HALLschen ternären Ringe zugrunde legen will, sondern einen anderen Spezialfall von Ternaren, werde ich zunächst angeben, was SKORNYAKOV unter einem Ternar versteht und dann die Spezialisierungen, die zu den hier zugrunde gelegten ternären Ringen führen[8]). Wie wir sehen werden, sind die hier betrachteten ternären Ringe genau so wie die HALLschen im Fall einer desarguesschen Geometrie Körper.

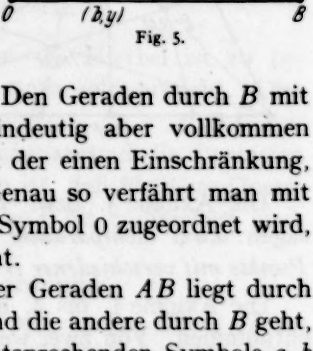


Fig. 5.

SKORNYAKOV wählt in der projektiven Ebene drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, O aus. Jeder Geraden des Büschels durch A mit Ausnahme der Geraden AB wird umkehrbar eindeutig ein Symbol a einer Menge $\mathfrak{M} = \{a\}$ zugeordnet, der Geraden AO speziell das Symbol 0. Den Geraden durch B mit Ausnahme der Geraden AB werden ebenfalls eindeutig aber vollkommen beliebig die Symbole der Menge $\mathfrak{M}$ zugeordnet mit der einen Einschränkung, daß der Geraden BO das Symbol 0 entspricht. Genau so verfährt man mit dem Büschel durch O, wobei der Geraden AO das Symbol 0 zugeordnet wird, während der Geraden BO kein Symbol entspricht.

Da jeder Punkt P der Ebene, der nicht auf der Geraden AB liegt durch genau zwei Geraden von denen die eine durch A und die andere durch B geht, festgelegt ist, erhält P die den beiden Geraden entsprechenden Symbole a, b als Koordinaten, geschrieben $P = (a, b)$. Nunmehr wird folgende *ternäre Operation* eingeführt: Drei gegebenen Elementen $m, y, b \in \mathfrak{M}$ wird ein Element $x \in \mathfrak{M}$ (s. Fig. 5) in der folgenden Weise zugeordnet:

Ist (m) der Schnittpunkt der m zugeordneten Geraden durch O mit der Geraden AB, dann ist x die erste Koordinate des Schnittpunktes der y zugeordneten Geraden durch B und der Verbindungsgeraden von (m) und (b, O). In Zeichen schreiben wir dafür: $x = (m, y, b)$.

Diese Operation hat nun die folgenden Eigenschaften:

1. $(0, a, c) = (m, 0, c) = c$.
2. $(m, a, z) = c$ *hat eine eindeutige Lösung in bezug auf* z.
3. $(m_1, x, b_1) = (m_2, x, b_2)$, $m_1 \neq m_2$ *hat eine eindeutig bestimmte Lösung* x.

[8]) Die hier zugrunde gelegten ternären Ringe sind von E. SPERNER eingeführt worden.

4. *Durch das Gleichungssystem* $(m, a_1, b) = c_1$, $(m, a_2, b) = c_2$, $a_1 \neq a_2$ *ist das Paar* m, b *eindeutig bestimmt.*

Jede Menge $\mathfrak{M}$ mit einer ternären Verknüpfung, die die Eigenschaften 1. bis 4. besitzt, nennt SKORNYAKOV einen *Ternar*. Von einem Ternar gelangt man umgekehrt zu einer projektiven Ebene mit den Punkten (a, c), (m), B und den Geraden $x = (m, y, b)$, $y = b$, l_∞, wobei $a, b, c, m \in \mathfrak{M}$ und B und l_∞ gewisse Hilfssymbole sind. Die *Inzidenz* ist wie folgt erklärt: (a, c) inzidiert mit $x = (m, y, b)$ genau dann, wenn $a = (m, c, b)$ ist; (a, c) inzidiert mit $y = c$ für alle a; (m) inzidiert mit $x = (m, y, b)$ für alle b; für alle m inzidieren (m) und l_∞; B inzidiert mit $y = c$ für alle c und mit l_∞.

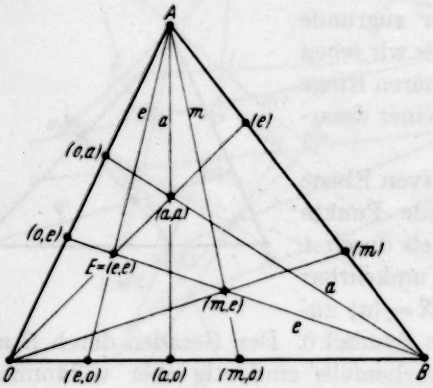


Fig. 6.

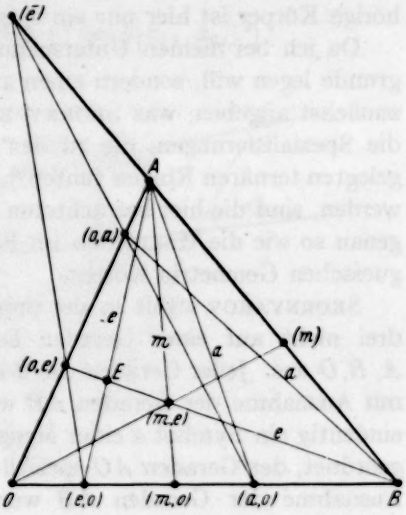


Fig. 7.

Die Axiome 3. bzw. 4. sind gewissermaßen gleichwertig mit den Aussagen: *Zwei nichtparallele Geraden haben genau einen Schnittpunkt bzw. zwei Punkte mit verschiedener erster Koordinate haben genau eine Verbindungsgerade.*

Die Axiome 1. bis 4. hat SKORNYAKOV dem HALLschen Axiomensystem entnommen. Von zwei weiteren Axiomen des HALLschen Systems, nämlich, daß $(m, x, b) = c$ bzw. $(z, a, b) = c$ eine eindeutige Lösung x bzw. z haben, hat SKORNYAKOV gezeigt, daß sie bereits aus 1. bis 4. folgen.

Zu den HALLschen wie den hier benutzten ternären Ringen gelangt man nun, indem man die bei einem SKORNYAKOVschen Ternar fast völlig beliebige Zuordnung zwischen den drei Büscheln A, B, O und den Symbolen der Menge $\mathfrak{M}$ spezialisiert. Hierzu wählen wir einen Punkt E aus, der auf keiner Seite des Dreiecks ABO liegt, und ordnen ihm die Koordinaten (e, e) zu.

Die Zuordnung zwischen den Elementen von $\mathfrak{M}$ und den Geraden des Büschels B erfolgt bei HALL in der Weise (s. Fig. 6), daß die Punkte der Geraden OE dieselbe erste und zweite Koordinate erhalten. Einer Geraden des Büschels O wird das Element m zugeordnet, wenn die Gerade mit dem Punkt (m, e) inzidiert.

Abweichend davon nehmen wir die Zuordnung zwischen den Elementen der Menge $\mathfrak{M}$ und den Geraden des Büschels B folgendermaßen vor: *Durch*

E sind die Punkte $(e, 0)$, $(0, e)$ *und* $(\bar{e})$ *wie in Fig. 7 erklärt; ausgehend von einer Geraden a des Büschels A welche OB im Punkte* $(a, 0)$ *schneidet, wird der Punkt* $(0, a)$ *als Schnittpunkt von OA mit der Geraden durch* $(\bar{e})$ *und* $(a, 0)$ *bestimmt; dann erhält die Gerade durch* $(0, a)$ *und B ebenfalls das Symbol a zugeordnet.* Die Zuordnung zwischen dem Büschel O und der Menge $\mathfrak{M}$ ist dieselbe wie bei HALL. Die Spezialisierungen in der Zuordnung führen zu folgenden zusätzlichen Eigenschaften des Ternars[9]):

5. *Es gibt ein Rechtseinselement e mit* $(m, e, 0) = m$.
6. *Es gibt ein Element* $\bar{e} \in \mathfrak{M}$ *mit* $(\bar{e}, a, a) = 0$ *für jedes* $a \in \mathfrak{M}$.

Daß umgekehrt diese zusätzlichen Eigenschaften in der zugehörigen projektiven Ebene die speziellen Zuordnungen zwischen den Büscheln bedingen, sieht man leicht ein. Desgleichen kann man für einen ternären Ring dieser Art ohne weiteres erkennen, daß er im Fall einer desarguesschen Geometrie ein Körper ist.

Für unsere ternären Ringe führen wir jetzt einige Abkürzungen ein. Wir setzen:

$$(a, b, 0) = ab$$

$$(a, e, b) = a + b$$

$-a$ ist definiert durch:

$$(a, e, -a) = a + (-a) = 0.$$

Statt $(a, e, -b) = a + (-b)$ schreiben wir kurz: $a - b$. Hierbei ist zu beachten, daß trotz $a - a = 0$ keineswegs $-a + a = 0$ zu sein braucht. Dies wäre sonst bereits ein Schließungssatz.

Die Operation $(a, b, 0) = ab$ wollen wir *Multiplikation* und die Operation $(a, e, b) = a + b$ *Addition* nennen, wobei zu beachten ist, daß für diese Operationen im nichtdesarguesschen Fall nur die Axiome 1 bis 6 gesichert sind.

§ 3. Ordnungsfunktion und Halbordnung.

In diesem Paragraphen wird zunächst ein der projektiven Ebene Π zugeordneter ternärer Ring $\mathfrak{M}$ durch eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation angeordnet und einige Eigenschaften der *induzierten Anordnung* hergeleitet. Umgekehrt wird gezeigt, wie man mit Hilfe einer *Halbordnung*[10]) des ternären Ringes $\mathfrak{M}$ eine Ordnungsfunktion in Π *erzeugen* kann. Die hier hergeleiteten Eigenschaften reichen jedoch keineswegs aus, um die induzierte Anordnung vollständig zu kennzeichnen. Vielmehr erfolgt eine vollständige Kennzeichnung erst im nächsten Paragraphen. So genügen auch die hier durch Halbordnungen des ternären Ringes erzeugten Ordnungsfunktionen im allgemeinen nicht der Geradenrelation. An die Halbordnung sind in nichtdesarguesschen Ebenen noch wesentlich stärkere Forderungen zu stellen.

[9]) Bei HALL ergibt sich statt dessen: Es gibt ein Einselement e mit $(e, a, 0) = a$ und $(m, e, 0) = m$.

[10]) Unter einer *Halbordnung* versteht man eine Anordnung, die dem folgenden *Monotoniegesetz der Multiplikation* genügt: *Ist* $a > 0$ *und* $b > 0$ *oder* $a < 0$ *und* $b < 0$, *so ist stets* $ab > 0$. *Ist* $a > 0$ *und* $b < 0$ *oder* $a < 0$ *und* $b > 0$, *so ist stets* $ab < 0$.

wenn mit ihrer Hilfe eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erzeugt werden soll.

Wir denken uns in unserer Ebene Π eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation gegeben und betrachten einen dieser Geometrie zugeordneten ternären Ring $\mathfrak{M}$ mit dem Grunddreieck ABO. Die Punkte der Geraden OB, die wir x-Achse nennen wollen, bezeichnen wir durch die Elemente von $\mathfrak{M}$, indem wir jedem dieser Punkte X das Element von $\mathfrak{M}$ zuordnen, das der Geraden AX entspricht. Mit den Punkten der Geraden OA (y-Achse) verfahren wir entsprechend, hängen ihnen aber zur Unterscheidung einen Strich an. Für die Punkte B und A führen wir die Symbole ∞ und ∞' ein.

Jetzt können wir unseren ternären Ring $\mathfrak{M}$ in der folgenden Weise anordnen:

Die von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{M}$ werden in zwei Klassen >0 und <0 eingeteilt durch die Vorschrift, daß

$$a>0 \text{ gleichbedeutend mit } [0, \infty | e, a] = +1$$
$$a<0 \text{ gleichbedeutend mit } [0, \infty | e, a] = -1$$

sein soll.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Eigenschaften hat diese induzierte Anordnung des ternären Ringes? Hier bleibt zunächst zu prüfen, ob das *Monotoniegesetz*[10]) der Multiplikation erfüllt ist.

Das Monotoniegesetz der Multiplikation ist gleichwertig mit der Aussage:

$$[0, \infty | e, a] \cdot [0, \infty | e, b] = [0, \infty | e, ab]^{11}),$$

deren Richtigkeit wir behaupten.

Beweis[12]). Der Beweis ergibt sich (s. Fig. 8) durch achtmalige Anwendung der Geradenrelation:

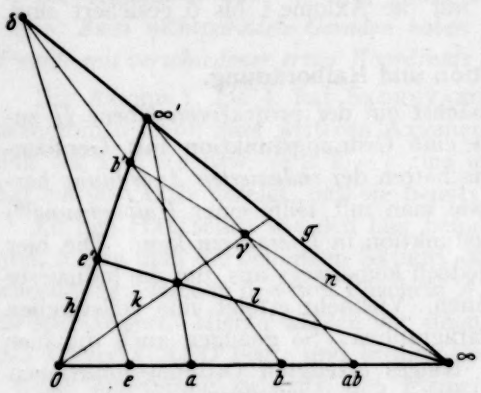


Fig. 8.

$$\begin{array}{llll} k(ab) & n(ab) & k(\infty') & n(\infty') = 1 \\ k(\infty') & l(\infty') & k(a) & l(a) = 1 \\ n(\infty') & l(\infty') & n(\delta) & l(\delta) = 1 \\ n(\delta) & h(\delta) & n(b) & h(b) = 1 \\ h(\delta) & l(\delta) & h(e) & l(e) = 1 \\ n(b) & g(b) & n(ab) & g(ab) = 1 \\ h(ab) & k(ab) & h(a) & k(a) = 1 \\ l(a) & g(a) & l(e) & g(e) = 1. \end{array}$$

Diese Gleichungen besagen, daß

$$h(a)\,h(b)\,g(a)\,g(b) = h(ab)\,g(ab)\,h(e)\,g(e)$$

oder umgeformt:

$$h(e)\,h(a)\,g(e)\,g(a)\,h(e)\,h(b)\,g(e)\,g(b) = h(e)\,h(ab)\,g(e)\,g(ab),$$

was mit der Behauptung gleichwertig ist.

[11]) Siehe [5] S. 123 unten.

[12]) Der Beweis ist erforderlich, da die Multiplikation hier anders definiert ist als in [5].

Wir nennen eine Anordnung eines ternären Ringes, die dem Monotoniegesetz der Multiplikation genügt, eine *Halbordnung*. Es gilt folglich der

Satz 5. *Eine Ordnungsfunktion induziert in jedem ternären Ring der Geometrie eine Halbordnung.*

Sehen wir uns die Sätze 2 und 3 an, so erkennen wir, daß man aus ihnen Folgerungen für die von einer Ordnungsfunktion induzierten Anordnung des ternären Ringes ziehen kann, nämlich

Satz 6. *Je nachdem, ob die Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ harmonisch oder anharmonisch ist, gilt für jedes von 0 verschiedene $a \in \mathfrak{M}$, daß a und $-a$ in entgegengesetzten Klassen oder in derselben Klasse der Anordnung liegen.*

Satz 7. *Je nachdem, ob die Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ harmonisch oder anharmonisch ist, gilt für jedes von 0 verschiedene $b \in \mathfrak{M}$ und die Lösung x der Gleichung $(e, b, x) = 0$, daß b und x in entgegengesetzten Klassen oder in derselben Klasse der Anordnung liegen.*

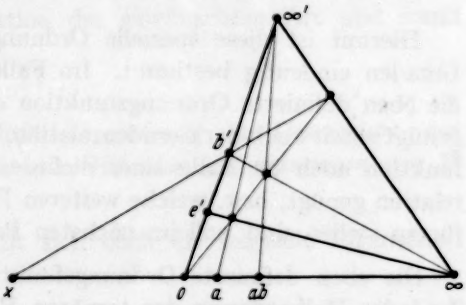


Fig. 9.

Zum Beweise der Sätze 6 und 7 betrachten wir Fig. 9[13]). Man sieht, daß die Punkte $0, \infty, ab, x$, wobei x durch $(a, b, x) = 0$ bestimmt ist, ein harmonisches Quadrupel bilden, d.h. es ist $[0, \infty \mid ab, x] = -1$, wenn $h(\alpha)$ harmonisch und $= +1$, wenn $h(\alpha)$ anharmonisch ist. Ist nun insbesondere $b = e$, so folgt $ab = ae = a$ und $x = -a$. Aus der Identität $[0, \infty \mid e, a] \cdot [0, \infty \mid e, -a] = [0, \infty \mid a, -a]$ ergibt sich also die Richtigkeit von Satz 6.

Ist $a = e$, so erhält man Satz 7 aus der Identität $[0, \infty \mid eb, x] = [0, \infty \mid e, eb] \cdot [0, \infty \mid e, x] = [0, \infty \mid e, b] \cdot [0, \infty \mid e, x]$, deren Gültigkeit aus dem Monotoniegesetz der Multiplikation resultiert.

Nun sei ein ternärer Ring $\mathfrak{M}$ der projektiven Ebene Π fest gegeben. Jede Halbordnung (das ist eine Anordnung, die dem Monotoniegesetz der Multiplikation genügt) des ternären Ringes $\mathfrak{M}$ stellen wir der Vereinfachung halber als Funktion dar, indem wir für jedes Element $a \in \mathfrak{M}$

$$o(a) = \begin{cases} +1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

setzen. Die Geradengleichungen wollen wir in Zukunft in der Form $(m, y, b) - xw = 0$ schreiben, wobei $w = e$ oder 0 sein kann. Die Geraden $y = b$ sind hierbei für $w = 0$ miterfaßt, da wir sie auch in der Form $(e, y, \underline{b}) = 0$ darstellen können. $\underline{b}$ ist dabei durch $(e, b, \underline{b}) = 0$ definiert.

[13]) Zum Beweis kann nicht das Monotoniegesetz der Multiplikation benutzt werden, da im allgemeinen $-a \neq a(-e)$ ist.

Ist nun o eine beliebige Halbordnung, so läßt sich eine spezielle Ordnungsfunktion wie folgt erklären:

Für alle Punkte $\alpha:(x, y)$ *und alle Geraden* $h \neq l_\infty$ *setzen wir:* $h(\alpha) = o\big((m, y, b) - xw\big)$.

Für alle Punkte α, *die nicht mit* l_∞ *inzidieren:* $l_\infty(\alpha) = +1$.

Für die Punkte $\alpha:(a)$, *die mit* l_∞ *inzidieren und alle Geraden* $h \neq l_\infty$: $h(\alpha) = o\big((m, e, 0) - aw\big) = o(m - aw)$.

Für den Punkt ∞ *und alle Geraden* h, *die nicht mit* ∞ *inzidieren* $h(\infty) = 1$.

In allen Fällen, in denen Punkt und Gerade inzidieren: $h(\alpha) = 0$.

Hiermit ist diese spezielle Ordnungsfunktion für alle Punkte und alle Geraden eindeutig bestimmt. Im Falle einer desarguesschen Geometrie ist die eben definierte Ordnungsfunktion eine *normale* Ordnungsfunktion[14]) und genügt somit auch der Geradenrelation. Wann die hier angegebene Ordnungsfunktion auch im Falle einer nichtdesarguesschen Geometrie der Geradenrelation genügt, bzw. welche weiteren Forderungen an die Halbordnung hierfür zu stellen sind, soll im nächsten Paragraphen untersucht werden.

Die eben definierte Ordnungsfunktion wollen wir mit $\overline{h(\alpha)}$ bezeichnen. Zu jeder Halbordnung des ternären Ringes läßt sich auf diese Weise eine spezielle Ordnungsfunktion definieren. Alle Ordnungsfunktionen $h(\alpha)$, deren abgeleitete Ordnungsfunktion zweiter Stufe $[h, k|\alpha, \beta]$ mit der abgeleiteten Ordnungsfunktion zweiter Stufe von $\overline{h(\alpha)}$ übereinstimmen, erhalten wir durch eine Art von Normierung, die im Falle eines Körpers mit der Vektornormierung zusammenfällt. Wir können nämlich jedem Punkt bzw. jeder Geraden einen Proportionalitätsfaktor r bzw. s zuordnen und dann $h(\alpha) = \overline{h(\alpha)} \cdot o(r) \cdot o(s) = \overline{h(\alpha)} \cdot o(rs)$ setzen oder direkter jedem Punkt bzw. jeder Geraden eine Ordnung $\{\alpha\} = +1$ oder -1 bzw. $\{h\} = +1$ oder -1 zuordnen und $h(\alpha) = \overline{h(\alpha)} \cdot \{\alpha\} \cdot \{h\}$ schreiben. *Jede Ordnungsfunktion* $h(\alpha)$, *die sich in dieser Weise erklären läßt, nennen wir erzeugbar.*

Hiermit ist bereits der Zusammenhang mit den Ordnungsfunktionen der *Einheitsklasse*[15]) aufgezeigt. Das Produkt zweier Ordnungsfunktionen, deren abgeleitete Ordnungsfunktionen zweiter Stufe übereinstimmen, liefert eine Ordnungsfunktion der Einheitsklasse. Wir können aber noch weitergehen und zeigen, daß alle Ordnungsfunktionen, die mit Hilfe einer beliebigen Halbordnung des ternären Ringes auf die hier beschriebene Weise erzeugt werden können, eine Untergruppe bilden. Da die Ordnungsfunktionen alle involutorisch sind, brauchen wir hierzu nur zu zeigen, daß die Abgeschlossenheit erfüllt ist. Es seien $\{h(\alpha)\}_1 = \{\overline{h(\alpha)}\}_1 \{\alpha\}_1 \cdot \{h\}_1$ und $\{h(\alpha)\}_2 = \{\overline{h(\alpha)}\}_2 \cdot \{\alpha\}_2 \cdot \{h\}_2$ zwei dieser Ordnungsfunktionen. Ihr Produkt ergibt: $\{h(\alpha)\}_3 = \{\overline{h(\alpha)}\}_1 \cdot$

[14]) Siehe [7] S. 142ff.

[15]) Vgl. [6] S. 28.

$\{\overline{h(\alpha)}\}_2\,\{\alpha\}_3 \cdot \{h\}_3$. Insbesondere ist für alle nichtinzidenten Paare h, α entweder:

$$\{\overline{h(\alpha)}\}_1\,\{\overline{h(\alpha)}\}_2 = o_1\big((m, y, b) - x\,w\big) \cdot o_2\big((m, y, b) - x\,w\big)$$

oder:

$$= \{\overline{l_\infty(\alpha)}\}_1\,\{\overline{l_\infty(\alpha)}\}_2 = +1$$

oder:

$$= o_1(m - a\,w) \cdot o_2(m - a\,w)$$

oder:

$$= \{\overline{h(\infty)}\}_1 \cdot \{\overline{h(\infty)}\}_2 = 1\,.$$

Da aber die Halbordnungen des ternären Ringes eine Gruppe bilden, ist auch $\overline{h_1(\alpha)}\;\overline{h_2(\alpha)} = \overline{h_3(\alpha)}$ eine Ordnungsfunktion der gewünschten Art und somit die Gruppeneigenschaft erwiesen.

Zusammenfassend kann man sagen:

Satz 8. *Jedem ternären Ring $\mathfrak{M}$ läßt sich eindeutig eine Untergruppe von Ordnungsfunktionen zuordnen, die alle mit Hilfe der Halbordnungen von $\mathfrak{M}$ erzeugbar sind.*

Für diese Ordnungsfunktionen läßt sich noch die folgende Eigenschaft beweisen:

Satz 9. *Jede erzeugbare Ordnungsfunktion erfüllt bezüglich aller Geradenpaare, die sich auf der x-Achse schneiden und aller Punktepaare, die mit der x-Achse inzidieren, die Geradenrelation.*

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus:

$$g(\alpha)\,g(\beta)\,h(\alpha)\,h(\beta) = \overline{g(\alpha)}\;\overline{g(\beta)}\;\overline{h(\alpha)}\;\overline{h(\beta)} \text{ und (da } w_1 = w_2 \text{) aus:}$$

$$\overline{g(\alpha)}\;\overline{h(\alpha)} = o\big((m_1, 0, b_1) - x_1 w_1\big) \cdot o\big((m_2, 0, b_1) - x_1 w_2\big) =$$

$$= o\,(b_1 - x_1 w_1)\,o\,(b_1 - x_1 w_2) = 1\,.$$

Im Falle, daß eine der Geraden etwa $h = l_\infty$ ist, hat die Gerade g eine Gleichung der Gestalt $(m_1, y, b_1) = 0$, d. h. $w_1 = 0$ und der Beweis ergibt sich aus $\overline{l_\infty(\alpha)} \cdot \overline{l_\infty(\beta)} = 1$ und aus $g(\alpha) \cdot g(\beta) = o(b_1) \cdot o(b_1) = 1$.

Auf Grund von Satz 9 gilt auch:

Satz 10. *Eine Ordnungsfunktion genügt dann und nur dann der Geradenrelation, wenn sie sich mit Hilfe geeigneter Halbordnungen in jedem ternären Ring, der der Geometrie zugeordnet ist, erzeugen läßt*[16].

Im folgenden Paragraphen soll, neben der Frage, welche Bedingungen die Halbordnung erfüllen muß, damit die hier definierten Ordnungsfunktionen der Geradenrelation genügen, untersucht werden, ob auf diese Weise alle Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation erzeugbar sind.

[16]) Im Gegensatz zu dieser Aussage erfolgt im nächsten Paragraphen die Charakterisierung der Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation durch Eigenschaften der Anordnung eines festen ternären Ringes.

§ 4. Kennzeichnung der Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation durch Eigenschaften der zugehörigen Halbordnung.

Bevor wir auf den wesentlichsten Kern dieser Untersuchungen eingehen können, müssen wir die folgenden Begriffe erklären: *Starkes Monotoniegesetz: Aus* $m, n, z, a, b, r \in \mathfrak{M}$ *und* $(m, z, a) = (n, z, b)$ *folgt* $o\big((m, r+z, a) - (n, r+z, b)\big) = o(m-n) \cdot o(r)$; *aus* $m, r, a, b \in \mathfrak{M}$ *folgt* $o\big((m, r, a) - (m, r, b)\big) = o(a-b)$.

Eine Halbordnung, die dem starken Monotoniegesetz genügt, heißt starke Halbordnung.

Man erkennt leicht, daß im Falle eines Körpers das starke Monotoniegesetz mit dem gewöhnlichen Monotoniegesetz der Multiplikation übereinstimmt.

Hauptsatz. *Eine Ordnungsfunktion genügt dann und nur dann der Geradenrelation, wenn sie mittels einer starken Halbordnung des ternären Ringes erzeugbar ist.*

Wir beweisen zunächst das „*dann*". Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen kann man sich hierbei auf Ordnungsfunktionen $\overline{h(\alpha)}$ beschränken. Es ist also zu zeigen: Sind α, β, γ drei beliebige Punkte einer Geraden j, so gilt für zwei beliebige Gerade g, h, die mit γ nicht aber mit α oder β inzidieren:

$$\overline{h(\alpha)}\,\overline{h(\beta)}\,\overline{g(\alpha)}\,\overline{g(\beta)} = 1.$$

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall. Folgende Zuordnungen mögen bestehen:

$$\begin{aligned} \alpha &\leftrightarrow (x, y_1) & g &\leftrightarrow (m_1, y, a_1) - x w_1 = 0 \\ \beta &\leftrightarrow (x_2, y_2) & h &\leftrightarrow (m_2, y, a_2) - x w_2 = 0 \\ \gamma &\leftrightarrow (x_0, y_0) & j &\leftrightarrow (n, y, b) \quad - x w = 0. \end{aligned}$$

Hier sind nun die folgenden zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1. $w = e$, d.h. $j \leftrightarrow (n, y, b) - x = 0$. Da α, β, γ mit j inzidieren, gilt:

I: $(n, y_1, b) - x_1 = 0$ II: $(n, y_2, b) - x_2 = 0$ III: $(n, y_0, b) - x_0 = 0$

und da γ mit g und h:

IV: $(m_1, y_0, a_1) - x_0 w_1 = 0$ V: $(m_2, y_0, a_2) - x_0 w_2 = 0$.

Für $\overline{g(\alpha)}$ erhalten wir dann:

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((m_1, y_1, a_1) - x_1 w_1\big) \quad \text{oder} \quad x_1 = (n, y_1, b)$$

gemäß I eingesetzt:

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((m_1, y_1, a_1) - (n, y_1, b) w_1\big).$$

Da die Gleichung $y_1 = r_1 + y_0$ eindeutig nach r_1 lösbar ist, können wir für y_1 folglich $r_1 + y_0$ einsetzen und da nach III und IV $(m_1, y_0, a_1) = (n, y_0, b) w_1$ ist, anschließend das starke Monotoniegesetz anwenden. Für $w_1 = e$ ergibt sich folglich:

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((m_1, r_1 + y_0, a_1) - (n, r_1 + y_0, b)\big) = o(m_1 - n) \cdot o(r_1).$$

Dagegen für $w_1 = 0$ (d.h. $g \leftrightarrow (e, y, \underline{y}_0) = 0$):

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((e, r_1 + y_0, \underline{y}_0)\big) = o(e) \cdot o(r_1) = o(r_1)\ ^{17}).$$

Entsprechend erhält man:

$$\overline{g(\beta)} = \begin{cases} o(m_1 - n) \cdot o(r_2) & \text{für } w_1 = e \\ o(r_2) & \text{für } w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\alpha)} = \begin{cases} o(m_2 - n) \cdot o(r_1) & \text{für } w_2 = e \\ o(r_1) & \text{für } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\beta)} = \begin{cases} o(m_2 - n) \cdot o(r_2) & \text{für } w_2 = e \\ o(r_2) & \text{für } w_2 = 0. \end{cases}$$

Hieraus erkennt man durch Ausmultiplizieren die Gültigkeit der Geradenrelation.

2. $w = 0$ d.h. $j \leftrightarrow (e, y, \underline{y}_0) = 0$. In diesem Fall ist wegen $g, h \neq j$ sicher $w_1 = w_2 = e$. Da α, β mit j inzidieren, gilt: $\alpha \leftrightarrow (x_1, y_0)$, $\beta \leftrightarrow (x_2, y_0)$. Nach IV erhält man folglich:

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((m_1, y_0, a_1) - x_1\big) = o(x_0 - x_1), \quad \overline{g(\beta)} = o\big((m_1, y_0, a_1) - x_2\big) = o(x_0 - x_2)$$

und nach V:

$$\overline{h(\alpha)} = o\big((m_2, y_0, a_2) - x_1\big) = o(x_0 - x_1), \quad \overline{h(\beta)} = o\big((m_2, y_0, a_2) - x_2\big) = o(x_0 - x_2).$$

Auch hier erkennt man jetzt durch Ausmultiplizieren die Richtigkeit der Geradenrelation.

Es bleiben noch die Fälle zu betrachten:

a) Eine der Geraden g, h ist gleich l_∞, bzw. γ liegt auf l_∞, ohne daß α und β auf l_∞ liegen.

b) Einer der Punkte α, β inzidiert mit l_∞.

c) Beide Punkte α, β inzidieren mit l_∞.

a) Es sei $g = l_\infty$. Dann ist nach Definition von $\overline{h(\alpha)}$: $\overline{l_\infty(\alpha)} = \overline{l_\infty(\beta)} = 1$. Die Geradenrelation ist also dann erfüllt, wenn $h(\alpha)\, h(\beta) = 1$ ist. Da sich g, h, j in einem Punkt schneiden und $g = l_\infty$ ist, ist entweder $(m_1) = (n)$, d.h. $m_1 = n$, oder h, j haben Gleichungen der Gestalt: $(e, y, a_2) = 0$ und $(e, y, \underline{y}_0) = 0$. Im ersten Fall erhalten wir also mit Hilfe des starken Monotoniegesetzes:

$$\overline{h(\alpha)} = o\big((n, y_1, a_2) - (n, y_1, b)\big) = o(a_2 - b)$$

$$\overline{h(\beta)} = o\big((n, y_2, a_2) - (n, y_2, b)\big) = o(a_2 - b)$$

d.h. $\overline{h(\alpha)}\ \overline{h(\beta)} = 1$. Im zweiten ist wegen $\alpha \leftrightarrow (x_1, y_0)$, $\beta \leftrightarrow (x_2, y_0)$: $\overline{h(\alpha)} = \overline{h(\beta)} = o(e, y_0, a_2)$. Hiermit ist, wie man ohne weiteres einsieht, auch der Fall, daß γ auf l_c liegt, mit bewiesen.

---

[17]) Diese Umformung ergibt sich aus dem starken Monotoniegesetz, wenn man $m = e$, $n = 0$, $z = y_0$, $a = \underline{y}_0$, $b = 0$ setzt. Dann ist $(e, y_0, \underline{y}_0) = (0, y_0, 0) = 0$ erfüllt und man kann daher das starke Monotoniegesetz anwenden.

b) Es möge $\beta \neq \infty$, $\beta \nleftrightarrow (n)$ auf l_∞ liegen. Dann gilt:

$$\overline{g(\beta)} = \begin{cases} o(m_1 - n) & \text{für } w_1 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_1 = 0 \end{cases} \qquad \overline{h(\beta)} = \begin{cases} o(m_2 - n) & \text{für } w_2 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{g(\alpha)} = \begin{cases} o(m_1 - n) \cdot o(r_1) & \text{für } w_1 = e \\ o(e, y_1, \underset{\sim}{y}_0) = o(r_1) & \text{für } w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\alpha)} = \begin{cases} o(m_2 - n) \cdot o(r_1) & \text{für } w_2 = e \\ o(e, y_1, \underset{\sim}{y}_0) = o(r_1) & \text{für } w_2 = 0. \end{cases}$$

Ist $\beta = \infty$ so hat j die Gleichung $(e, y, \underset{\sim}{y}_0) = 0$. Nun ist $g(\infty) = h(\infty) = 1$ und nach Hauptfall 2: $g(\alpha) = h(\alpha) = o(x_0 - x_1)$. Beide Male erkennt man wiederum unmittelbar die Gültigkeit der Geradenrelation.

c) In diesem Fall liegt auch γ auf l_∞, d.h. $m_1 = m_2 = m$ bzw. $w_1 = w_2$. Auch hier erhalten wir die Geradenrelation sofort aus:

$$\overline{g(\alpha)} = \begin{cases} o(m - x_1) & \text{für } w_1 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_1 = 0 \end{cases} \qquad \overline{g(\beta)} = \begin{cases} o(m - x_2) & \text{für } w_1 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\alpha)} = \begin{cases} o(m - x_1) & \text{für } w_2 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_2 = 0 \end{cases} \qquad \overline{h(\beta)} = \begin{cases} o(m - x_2) & \text{für } w_2 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_2 = 0. \end{cases}$$

Um das *„nur dann"* zu beweisen, muß zuerst gezeigt werden, daß die gemäß § 3 von einer Ordnungsfunktion mit Geradenrelation *induzierte Anordnung* des ternären Ringes dem *starken Monotoniegesetz* genügt. Der Beweis zerfällt in mehrere Schritte. Als erstes gehen wir von der folgenden Abschwächung des starken Monotoniegesetzes aus:

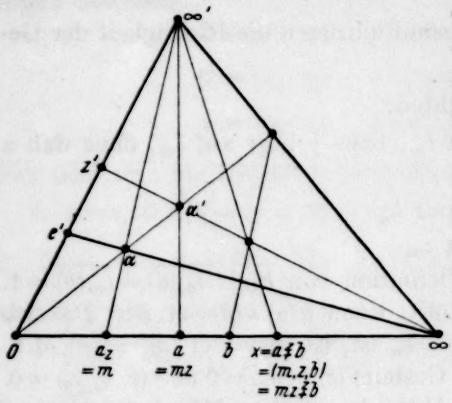


Fig. 10.

(1) $o\big((m,r,c) - (n,r,c)\big) = o(m-n) \cdot o(r)$.

Zu dieser gelangt man, wenn man beim starken Monotoniegesetz $z = 0$ setzt. Wegen der Beziehung $(m, z, a) = (n, z, b)$ muß $a = b\,(= c)$ sein.

Die Richtigkeit von (1) wird sich aus drei Hilfssätzen ergeben. Zunächst werden neue Verknüpfungen zwischen den Elementen des ternären Ringes $\mathfrak{M}$ eingeführt, und zwar wird jedem von 0 verschiedenen Element $z \in \mathfrak{M}$ eine Art *„Addition"* zugeordnet nach folgender Vorschrift:

Zwei gegebenen Elementen $a, b \in \mathfrak{M}$ wird das Element $x \in \mathfrak{M}$ (in Zeichen $x = a \overset{z}{+} b$) zugeordnet, das der Verbindungsgeraden des Punktes ∞' mit dem Schnittpunkt der Geraden durch b, (a_z) und z', ∞ entspricht, wobei a_z durch $a_z z = a$ erklärt ist (s. Fig. 10)[18]).

[18]) $\overset{z}{-} b$ ist entsprechend durch $b \overset{z}{+} (\overset{z}{-} b) = 0$ und $a \overset{z}{-} b$ durch $a \overset{z}{+} (\overset{z}{-} b)$ definiert.

Man wird gleich bemerken, daß man im Falle $z = e$ die gewöhnliche Addition erhält. Wie sofort ersichtlich, gilt nun (Fig. 10):

$$(m, z, b) = m\, z \overset{z}{+} b. \tag{2}$$

Außerdem betrachten wir neben der bereits definierten Subtraktion noch die folgende: *„$a \overset{z}{-} b$ sei erklärt durch $b + (a \overset{z}{-} b) = a$ und entsprechend $a \overset{z}{:} b$ durch $b \overset{z}{+} (a \overset{z}{:} b) = a$“.*

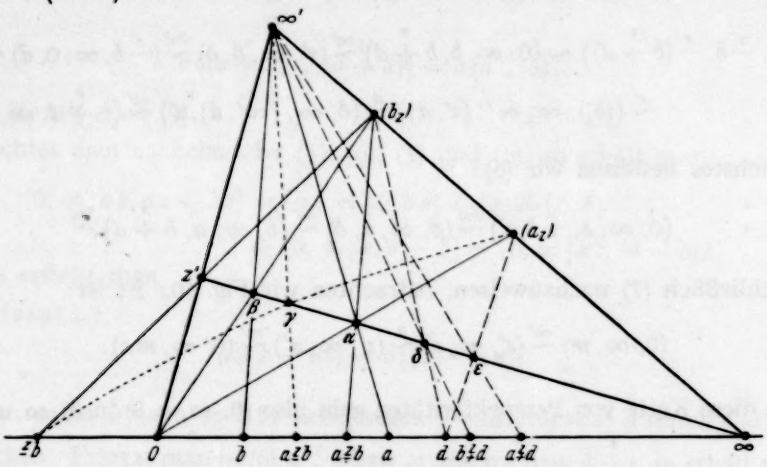


Fig. 11.

Wir beweisen jetzt, daß sich jeweils die folgenden Punktequadrupel durch Ketten von Perspektivitäten ineinander überführen lassen (wir gebrauchen hierfür das Zeichen $\sim$):

$$\begin{cases} (O, \infty, a, a \overset{z}{-} b) \sim (O, \infty, a, a \overset{z}{:} b) \sim ((a), \infty, \infty', (b)) \sim \\ \qquad \sim (a, \infty, O, b) \sim (\overset{z}{-} a, \infty, O, \overset{z}{-} b), \end{cases} \tag{3}$$

$$(O, \infty, \overset{z}{-} b, a \overset{z}{:} b) \sim (b, \infty, O, a) \sim (b \overset{z}{+} d, \infty, d, a \overset{z}{+} d), \tag{4}$$

$$(O, \infty, \overset{z}{-} b, \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)) \sim (b \overset{z}{+} d, \infty, d, O), \tag{5}$$

$$(O, \infty, a \overset{z}{:} b, d) \sim (b, \infty, a, b \overset{z}{+} d), \tag{6}$$

$$(O, \infty, a, b) \sim (O, \infty, az, bz). \tag{7}$$

Aus Fig. 11 ersieht man, daß folgende Quadrupel perspektiv liegen (das Perspektivitätszentrum schreibe ich über das $\sim$-Zeichen):

$$(O, \infty, a, a \overset{z}{-} b) \overset{\infty'}{\sim} (z', \infty, \alpha, \gamma) \overset{(a_z)}{\sim} (\overset{z}{-} a, \infty, O, \overset{z}{-} b) \overset{z'}{\sim} ((a_z), \infty, \infty', (b_z))$$

und:

$$(O, \infty, a, a \overset{z}{:} b) \overset{\alpha}{\sim} ((a_z), \infty, \infty', (b_z)) \overset{0}{\sim} (\alpha, \infty, z', \beta) \overset{\infty'}{\sim} (a, \infty, O, b).$$

Setzt man insbesondere $z = e$, so erkennt man, daß $((a), \infty, \infty', (b)) \sim (a, \infty, 0, b)$ ist. Damit ist (3) bewiesen.

Weiterhin ist:

$$(O, \infty, \overset{z}{-} b, a \overset{z}{\cdot} b) \overset{(b_z)}{\sim} (\beta, \infty, z', \alpha) \overset{\infty'}{\sim} (b, \infty, O, a) \sim$$

$$\sim ((b_z), \infty, \infty', (a_z)) \overset{d}{\sim} (\delta, \infty, \{\infty', d\}, \varepsilon) \overset{\infty'}{\sim} (b \overset{z}{+} d, \infty, d, a \overset{z}{+} d)\ ^{19}),$$

d.h. auch (4) ist richtig.

Beachtet man (3), so ergibt sich (5) wie folgt:

$$(0, \infty, \overset{z}{-} b, \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)) \sim (0, \infty, b, b \overset{z}{+} d) \overset{\infty'}{\sim} (z', \infty, \beta, \delta) \overset{(b_z)}{\sim} (\overset{z}{-} b, \infty, 0, d) \overset{z'}{\sim}$$

$$\overset{z'}{\sim} ((b_z), \infty, \infty', \{z', d\}) \overset{d}{\sim} (\delta, \infty, \{\infty', d\}, z') \overset{\infty'}{\sim} (b \overset{z}{+} d, \infty, d, 0).$$

Als nächstes beweisen wir (6):

$$(0, \infty, a, \overset{z}{-} b, d) \overset{(b_z)}{\sim} (\beta, \infty, \alpha, \delta) \overset{\infty'}{\sim} (b, \infty, a, b \overset{z}{+} d).$$

Um schließlich (7) nachzuweisen, betrachten wir Fig. 10. Es ist:

$$(0, \infty, m) \overset{\infty'}{\sim} (e', \infty, \alpha) \overset{0}{\sim} (z', \infty, \alpha') \overset{\infty'}{\sim} (0, \infty, mz).$$

Durch diese Kette von Perspektivitäten geht also $(0, \infty, a, b)$ in $(0, \infty, az, bz)$ über.

Da das Trennsymbol gegenüber Perspektivitäten invariant ist, lassen sich aus den Beziehungen (3) bis (7) nachstehende Folgerungen ziehen. (Hierbei beachte man, daß aus $[0, \infty | a, x] = [0, \infty | a, y]$ stets $o(x) = o(y)$ folgt; denn dann gilt: $1 = [0, \infty | a, x] \cdot [0, \infty | a, y] = [0, \infty | x, y] = [0, \infty | e, x] \cdot [0, \infty | e, y]$ und damit auch $[0, \infty | e, x] = [0, \infty | e, y]$).

Aus (3) folgt: $[0, \infty | a, a \overset{z}{-} b] = [0, \infty | a, a \overset{z}{\cdot} b] = [a, \infty | 0, b]$. Insbesondere für $z = e$: $[0, \infty | a, a - b] = [0, \infty | a, a \cdot b] = [a, \infty | 0, b]$. Es gilt also:

Hilfssatz 1.

$$o(a - b) = o(a \cdot b) = o(a \overset{z}{-} b) = o(a \overset{z}{\cdot} b). \tag{8}$$

Als nächstes zeigen wir:

Hilfssatz 2.

$$o((a \overset{z}{+} d) \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)) = o(a \overset{z}{-} b). \tag{9}$$

Nach (5) ist:

$$[0, \infty | \overset{z}{-} b, \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)] = [b \overset{z}{+} d, \infty | d, 0]$$

und nach (4):

$$[0, \infty | \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d), (a \overset{z}{+} d) \overset{z}{\cdot} (b \overset{z}{+} d)] = [(b \overset{z}{+} d), \infty | 0, a \overset{z}{+} d].$$

---

[19]) Die zwei Punkte in der geschweiften Klammer sollen den in der Figur nicht extra eingezeichneten Bildpunkt repräsentieren, der ja auf der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte liegt.

Daher gilt:

$$[0,\infty|\overset{z}{-}b,(a\overset{z}{+}d)\overset{z}{\cdot}(b\overset{z}{+}d)]$$
$$=[0,\infty|\overset{z}{-}b,\overset{z}{-}[b\overset{z}{+}d)]\cdot[0,\infty|\overset{z}{-}(b\overset{z}{+}d),(a\overset{z}{+}d)\overset{z}{\cdot}(b\overset{z}{+}d)]$$
$$=[b\overset{z}{+}d,\infty|d,0]\cdot[b\overset{z}{+}d,\infty|0,a\overset{z}{+}d]$$
$$=[b\overset{z}{+}d,\infty|d,a\overset{z}{+}d]=[0,\infty|\overset{z}{-}b,a\overset{z}{\cdot}b]\ ^{20}),$$

d.h.

$$o\big((a\overset{z}{+}d)\overset{z}{\cdot}(b\overset{z}{+}d)\big)=o\big(a\overset{z}{\cdot}b\big).$$

Wegen (8) gilt auch (9).

Beachtet man nacheinander (3), (6), (3) und (6), so erhält man:

$$[0,\infty|az,az-bz]=[az,\infty|0,bz]=[a,\infty|0,b]$$
$$=[0,\infty|a,a-b]=[0,\infty|az,(a-b)z].$$

Hieraus ersieht man

Hilfssatz 3.

$$o(az-bz)=o\big((a-b)z\big). \tag{10}$$

Setzt man $a\overset{z}{\cdot}b=c$, so läßt sich (wegen $b\overset{z}{+}(a\overset{z}{\cdot}b)=a$) a durch $a=b\overset{z}{+}c$ ausdrücken. Ersetzt man in (6) $a\overset{z}{\cdot}b$ bzw. a durch c bzw. $b\overset{z}{-}c$, so erhält man:

$$(0,\infty,c,d)\sim\big(b,\infty,b\overset{z}{+}c,b\overset{z}{+}d\big). \tag{6'}$$

Mit Hilfe von (6') beweisen wir jetzt:

Hilfssatz 4.

$$o\big((b\overset{z}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{z}{+}d)\big)=o\big(c\overset{z}{-}d\big). \tag{11}$$

Nach (3) ist:

$$[0,\infty|b\overset{z}{+}c,(b\overset{z}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{z}{+}d)]=[b\overset{z}{+}c,\infty|0,b\overset{z}{+}d].$$

Wendet man zuerst (5) und dann (3) an, so erhält man:

$$[0,\infty|c,b\overset{z}{+}c]=[\overset{z}{-}(b\overset{z}{+}c),\infty|\overset{z}{-}b,0]=[b\overset{z}{+}c,\infty|b,0].$$

Jetzt kann man folgende Umformung vornehmen:

$$[0,\infty|c,(b\overset{z}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{z}{+}d)]=[0,\infty|c,b\overset{z}{+}c]\cdot[0,\infty|b\overset{z}{+}c,(b\overset{z}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{z}{+}d)]$$
$$=[b\overset{z}{+}c,\infty|b,0]\cdot[b\overset{z}{+}c,\infty|0,b\overset{z}{+}d]=[b\overset{z}{+}c,\infty|b,b\overset{z}{+}d].$$

Auf Grund von (6') und (3) gilt:

$$[b\overset{z}{+}c,\infty|b,b\overset{z}{+}d]=[c,\infty|0,d]=[0,\infty|c,c\overset{z}{-}d].$$

Hiermit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

[20]) Die beiden letzten Trennsymbole haben wegen (4) den gleichen Wert.

Betrachtet man jetzt die linke Seite von (1), so kann man sie, indem man nacheinander Hilfssatz 1, Beziehung (2), Hilfssatz 2, 1, 3 und das Monotoniegesetz der Multiplikation anwendet, so umformen, daß man die rechte Seite erhält:

$$o\big((m,r,c)-(n,r,c)\big)=o\big((m,r,c)\overset{r}{-}(n,r,c)\big)=o\big((mr\overset{r}{+}c)\overset{r}{-}(nr\overset{r}{+}c)\big)$$
$$=o(mr\overset{r}{-}nr)=o(mr-nr)=o\big((m-n)r\big)=o(m-n)\cdot o(r).$$

Für den Beweis des starken Monotoniegesetzes werden noch drei weitere Hilfssätze benötigt. — Geht man von einem anderen Grunddreieck aus, so gelangt man im allgemeinen zu einem anderen ternären Ring $\mathfrak{M}^*$. Läßt sich zwischen den beiden x-Achsen eine Perspektivität π angeben mit $\pi(0)=0^*$, $\pi(e)=e^*$ und $\pi(\infty)=\infty^*$, so kann man mit Hilfe von π die Anordnung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}^*$ übertragen, indem man $o(a^*)=o\big(\pi(a)\big)=o(a)$ setzt. Man erhält dieselbe Anordnung, wenn man $o(a^*)=[0^*,\infty^*|e^*,a^*]$ setzt; denn $[0^*,\infty^*|e^*,a^*]$ hat wegen $\pi(0)=0^*$, $\pi(e)=e^*$, $\pi(\infty)=\infty^*$ und $\pi(a)=a^*$ denselben Wert wie $[0,\infty|e,a]=o(a)$. Zwischen diesen Anordnungen besteht die folgende Beziehung:

Hilfssatz 5.

(12) $$o(a^*-b^*)=o\big(\pi(a)-\pi(b)\big)=o(a-b)=o\big((a-b)^*\big)^{21}).$$

Beweis. Nach (3) ist: $[0,\infty|a,a-b]=[a,\infty|0,b]$ und:

$$[0^*,\infty^*|a^*,a^*-b^*]=[a^*,\infty^*|0^*,b^*].$$

Da $(0,\infty,a,b,a-b)\sim\big(0^*,\infty^*,a^*,b^*,(a-b)^*\big)$ gilt, erhält man:

$[0^*,\infty^*|a^*,a^*-b^*]=[0,\infty|a,a-b]=[0^*,\infty^*|a^*,(a-b)^*]$, w. z. b. w.

Überdies möge jetzt für das folgende noch $\infty^*=\infty$, $\infty^{*\prime}=\infty'$ und $(\bar{e})=(\bar{e}^*)$ sein. Bezeichnen wir mit $\tilde{x}^*$ die Elemente aus $\mathfrak{M}^*$, für die $(\tilde{x}^*)=(x)$ gilt, so können wir folgende Aussage machen:

Hilfssatz 6.

(13) $$o(\tilde{a}^*-\tilde{b}^*)=o(a-b)=o\big((a-b)^*\big).$$

Beweis. Mit Hilfe von (3) kann man den folgenden Ausdruck umformen: $[0^*,\infty|e^*,\tilde{a}^*]=[0^*,\infty|e^*,\bar{e}^*]\cdot[0^*,\infty|\bar{e}^*,\tilde{a}^*]=[0,\infty|e,\bar{e}]\cdot[\infty',\infty|(\bar{e}),(a)]$
$=[0,\infty|e,\bar{e}]\cdot[0,\infty|\bar{e},a]=[0,\infty|e,a]=[0^*,\infty|e^*,a^*]$.
Deshalb gilt: $[0^*,\infty|a^*,\tilde{a}^*]=1$. Weiterhin ist wegen (3) und dieser letzten Beziehung:

$$[0^*,\infty|a^*,(a-b)^*]=[0,\infty|a,a-b]=[(a),\infty|\infty',(b)]=$$
$$=\big[(\tilde{a}^*),\infty|\infty',(b^*)\big]=[0,\infty|\tilde{a}^*,\tilde{a}^*-\tilde{b}^*]=[0,\infty|a^*,\tilde{a}^*-\tilde{b}^*].$$

Daher gilt:

$$o(\tilde{a}^*-\tilde{b}^*)=o\big((a-b)^*\big)=o(a-b),\quad\text{w. z. b. w.}$$

---

21) Für die Verknüpfungsoperationen in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ werden dieselben Symbole verwandt. (a^*,b^*,c^*) bedeutet: Die ternäre Operation ist in $\mathfrak{M}^*$ auszuführen, entsprechend $a^*\pm b^*$ oder $a^*\cdot b^*$.

Hilfssatz 7. *Ist* $z'=0^*$ *und* $(r+z)'=\hat{r}^{*\prime}$, *so gilt:* $o(r)=o(\hat{r})=o(\hat{r}^*)$.

Beweis. An Hand von Fig. 12 erkennt man:

$$(0,\infty,r,r+z)\overset{\delta}{\sim}(\{0,\delta\},\beta,\infty',r+z)\overset{(r)}{\sim}(0,z,\infty,r+z)\overset{z'}{\sim}$$
$$\overset{z'}{\sim}((r+z)',(\bar{e}),\hat{r}^*,r+z)\overset{\infty'}{\sim}(0,\infty,\hat{r},r+z).$$

Folglich ist $[0,\infty|r+z,r]=[0,\infty|r+z,\hat{r}]$ und damit $o(r)=o(\hat{r})=o(\hat{r}^*)$.

Der erste Teil des starken Monotoniegesetzes ergibt sich jetzt aus den bewiesenen Teilergebnissen wie folgt: Wir betrachten neben dem gegebenen ternären Ring $\mathfrak{M}$ den ternären Ring $\mathfrak{M}^*$, der durch $0^*=z'$, $\infty^*=\infty$, $\infty^{*\prime}=\infty'$, $(\bar{e}^*)=(\bar{e})$ und $\pi(e)=e^*$, wobei π eine Perspektivität mit dem Zentrum ∞' ist, eindeutig festgelegt ist. Nach Hilfssatz 5 gilt dann:

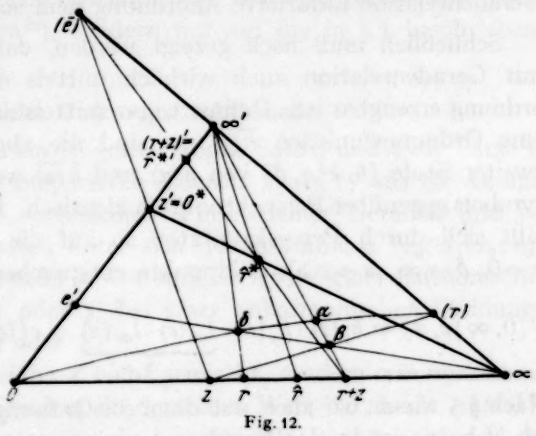


Fig. 12.

$$o\big((m,r+z,a)-(n,r+z,b)\big)=o\big((m,r+z,a)^*-(n,r+z,b)^*\big).$$

Da $(m,z,a)=(n,z,b)=d$ ist, haben die Geraden: $g: x=(m,y,a)$ und $h: x=(n,y,b)$ in $\mathfrak{M}^*$ die Gleichungen $g: x^*=(\tilde{m}^*,y^*,d^*)$ und $h: x^*=(\tilde{n}^*,y^*,d^*)$ (s. Fig. 13). Es ist daher: $(m,r+z,a)^*=(\tilde{m}^*,\hat{r}^*,d^*)$ und $(n,r+z,b)^*=(\tilde{n}^*,\hat{r}^*,d^*)$, wobei $\hat{r}^{*\prime}=(r+z)'$ ist. Die bewiesene Abschwächung des starken Monotoniegesetzes (1) gilt ja für die induzierte Anordnung jedes ternären Ringes. Man erhält daher:

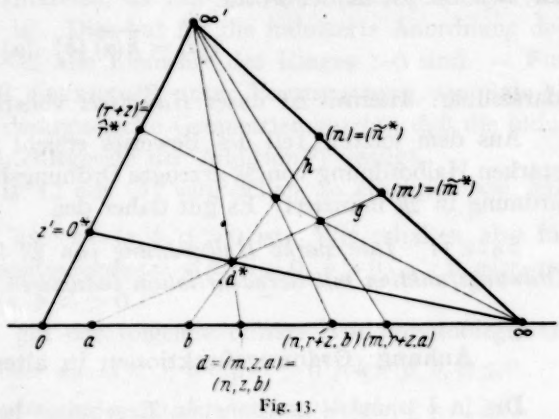


Fig. 13.

$$o\big((m,r+z,a)^*-(n,r+z,b)^*\big)=o\big((\tilde{m}^*,\hat{r}^*,d^*)-(\tilde{n}^*,\hat{r}^*,d^*)\big)$$
$$=o(\tilde{m}^*-\tilde{n}^*)\cdot o(\hat{r}^*).$$

Nach Hilfssatz 6 und 7 ist nunmehr:

$$o(\tilde{m}^*-\tilde{n}^*)\cdot o(\hat{r}^*)=o(m-n)\cdot o(r).$$

Das Endresultat lautet somit:

$$o\big((m,r+z,a)-(n,r+z,b)\big)=o(m-n)\cdot o(r)\quad\text{für}\quad(m,z,a)=(n,z,b).$$

Als zweiter Teil bleibt noch $o\big((m, r, a) - (m, r, b)\big) = o(a-b)$ zu beweisen. Dieser folgt unter Zuhilfenahme von Beziehung (2), Hilfssatz 4 und 1 unmittelbar aus:

$$o\big((m, r, a) - (m, r, b)\big) = o\big((mr \overset{r}{+} a) \overset{r}{-} (mr \overset{r}{+} b)\big) = o(a \overset{r}{-} b) = o(a-b).$$

Hiermit ist vollständig bewiesen, daß die von einer Ordnungsfunktion mit Geradenrelation induzierte Anordnung dem starken Monotoniegesetz genügt.

Schließlich muß noch gezeigt werden, daß jede Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ mit Geradenrelation auch wirklich mittels der induzierten starken Halbordnung erzeugbar ist. Definiert man mittels der starken Halbordnung (s. § 3) eine Ordnungsfunktion $\overline{h(\alpha)}$, so sind die abgeleiteten Ordnungsfunktionen zweiter Stufe $[h, k|\alpha, \beta]$ von $h(\alpha)$ und $\overline{h(\alpha)}$ wegen der Invarianz des Trennsymbols gegenüber Perspektivitäten identisch. Denn $[h, k|\alpha, \beta] = [\gamma, \delta|\alpha, \beta]$[22]) läßt sich durch Perspektivitäten so auf die x-Achse abbilden, daß dabei $\gamma \to 0$, $\delta \to \infty$, $\alpha \to e$ als Bildpunkte entsprechen. Für $[0, \infty|e, x]$ gilt:

$$[0, \infty|e, x] = h_y(e) \cdot h_y(x) \cdot \underbrace{l_\infty(e) \cdot l_\infty(x)}_{1} = o\big((e, e, 0)\big) \cdot o\big((e, x, 0)\big) = o(x)\text{[23])}.$$

Nach § 3 wissen wir aber, daß dann die Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ auch erzeugbar ist, d.h. sie ist in der Form:

$$h(\alpha) = \overline{h(\alpha)}\,\{h\} \cdot \{\alpha\}$$

darstellbar. Hiermit ist unser *Hauptsatz* vollständig bewiesen.

Aus dem letzten Teil des Beweises ersieht man, daß eine mittels einer starken Halbordnung von $\mathfrak{M}$ erzeugte Ordnungsfunktion dieselbe starke Halbordnung in $\mathfrak{M}$ induziert. Es gilt daher der

Satz 11. *Jede starke Halbordnung von $\mathfrak{M}$ läßt sich durch eine passende Ordnungsfunktion mit Geradenrelation induzieren.*

Anhang: Ordnungsfunktionen in alternativen Ebenen[24]).

Die in § 3 und 4 gewonnenen Ergebnisse lassen sich in einfacher Weise auf Ordnungsfunktionen in *alternativen* Ebenen übertragen. In jeder alternativen Ebene ist der ihr entsprechende ternäre Ring bekanntlich ein *Alternativkörper*. In einem Alternativkörper läßt sich die ternäre Operation in Multiplikation und Addition aufspalten. Es ist also $(a, b, c) = ab + c$. Außerdem genügt ein Alternativkörper bis auf das Assoziativgesetz der Multiplikation allen Körpergesetzen. Auf Grund dieser Tatsachen schrumpft für die

[22]) γ bzw. δ sollen die Schnittpunkte von h bzw. k mit der Verbindungsgeraden von α, β repräsentieren.

[23]) 0 und ∞ sind hier durch die Geraden h_y: $(e, y, 0) = 0$ und l_∞ ersetzt worden. Es ist $o\big((e, e, 0)\big) = o(e) = 1$ und $o\big((e, x, 0)\big) = o(ex) = o(e) \cdot o(x) = o(x)$.

[24]) Zur Definition der alternativen Ebene s. R. MOUFANG [3].

Anordnungen eines Alternativkörpers das starke Monotoniegesetz auf das gewöhnliche Monotoniegesetz der Multiplikation zusammen. Es gilt also

Satz 11a. *In einer alternativen-Ebene wird jede Halbordnung des Koordinatenbereiches von einer geeigneten Ordnungsfunktion mit Geradenrelation induziert.*

In einer alternativen Ebene lassen sich jedoch die Ordnungsfunktionen nicht wie in einer desarguesschen Ebene mit Hilfe von Skalarprodukten normierter Koordinatenvektoren definieren[25]), sondern nur auf die in § 3 beschriebene Weise.

§ 5. Einfache Ordnungsfunktionen.

Wie in § 1 bereits erwähnt wurde, gelten wegen Satz 2 und 3 die Sätze 14 und 15 aus [5] auch in allen projektiven Ebenen. Satz 15 aus [5] besagt: Sind $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ irgend vier verschiedene Punkte einer Geraden und bezeichnet Z die Anzahl derjenigen unter den Trennsymbolen $[\alpha_0, \alpha_1|\alpha_2, \alpha_3]$, $[\alpha_0, \alpha_2|\alpha_1, \alpha_3]$, $[\alpha_0, \alpha_3|\alpha_1, \alpha_2]$ welche $=-1$ sind, so ist bei einer harmonischen Ordnungsfunktion stets $Z=1$ oder 3, bei einer anharmonischen Ordnungsfunktion hingegen stets $Z=0$ oder 2.

Eine Ordnungsfunktion, bei der Z nicht gemischt, sondern rein vorkommt, d.h. wo Z bei allen linearen Quadrupeln denselben Wert hat, heißt *einfach*[2]).

Der Fall $Z=0$ ist ohne Interesse, da hier für alle Punktequadrupel der Wert des Trennsymbols $+1$ ist. Dies hat für die induzierte Anordnung des ternären Ringes zur Folge, daß alle Elemente des Ringes >0 sind. — Für den Fall $Z=1$ hat bereits E. Sperner[26]) unter Voraussetzung von Satz 15 aus [5] für nicht notwendig desarguessche Geometrien gezeigt, daß die induzierte Anordnung dem Monotoniegesetz der Addition[27]) genügt.

Wenn wir Fig. 10 mit Fig. 12 aus [5] vergleichen, so erkennen wir, daß für $ab>0$ und $c>0$ stets $ab\overset{b}{+}c=(a,b,c)>0$ ist. Wir erhalten also für $Z=1$ folgendes ternäres Monotoniegesetz: *Aus* $a>0$, $b>0$, $c\gtrless 0$ *oder aus* $a<0$, $b<0$, $c\gtrless 0$ *folgt stets* $(a,b,c)>0$.

Im Fall $Z=2$ hingegen, gilt das folgende ternäre Antimonotoniegesetz:

Aus $a>0$, $b>0$, $c>0$ *oder aus* $a<0$, $b<0$, $c>0$ *folgt* $(a,b,c)\lesseqgtr 0$.

Aus $a>0$, $b<0$, $c<0$ *oder aus* $a<0$, $b>0$, $c<0$ *folgt* $(a,b,c)\gtrless 0$.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß aus $o(ab)=o(c)$ und $(a,b,c)\neq 0$ stets $o\big((a,b,c)\big)=-o(ab)=-o(c)$ folgt. — Die Punkte $0, \infty, ab, \overset{b}{-}ab$ bilden ein harmonisches Quadrupel (vgl. Fig. 9), d.h. wegen $Z=2$ gilt $[0,\infty|ab, \overset{b}{-}ab]=+1$. Da nach Voraussetzung $o(ab)=o(c)$ ist, gilt $[0,\infty|ab,c]=+1$. Multiplikation der beiden Trennsymbole ergibt: $[0,\infty|c,\overset{b}{-}ab]=1$. Auf Grund von (6') aus § 4 gilt:

$$\big(0,\infty,c,\overset{b}{-}ab\big)\sim\big(ab,\infty,ab\overset{b}{+}c,ab\overset{b}{+}(\overset{b}{-}ab)\big)=\big(ab,\infty,(a,b,c),0\big),$$

[25]) Vgl. [6] S. 7 Vorschrift I.

[26]) Siehe [5] S. 130.

[27]) Das *Monotoniegesetz der Addition* besagt: *Ist* $a>0$ *und* $b>0$, *so folgt* $a+b>0$.

d.h. es ist auch $[ab, \infty | (a, b, c), 0] = +1$. Folglich gilt (wegen $Z=2$) $[0, \infty | ab, (a, b, c)] = -1$ und damit $o(c) = o(ab) = -o(a, b, c)$ w. z. b. w.

Satz 12. *Läßt sich in einer projektiven Ebene eine einfache nichttriviale anharmonische Ordnungsfunktion ($Z=2$) angeben, so hat die Geometrie den Primkörper der Charakteristik 5 als Koordinatenbereich und ist somit desarguessch.*

Der *Beweis* wird erbracht durch den Nachweis, daß nur die Elemente e und $-e>0$ sein können und daß es genau so viele Elemente >0 wie <0 gibt.

Wir nehmen an, der ternäre Ring enthalte ein Element $a \neq e, -e$ mit $a>0$. Es gilt also:

(1) $$[0, \infty | e, a] = +1$$

und wegen Satz 6 auch

(2) $$[0, \infty | e, -a] = +1.$$

Wegen $Z=2$ hat (1) zur Folge:

(3) $[0, e | \infty, a] = -1$ und (4) $[0, a | \infty, e] = -1$.

(1) und (2) multipliziert, ergibt:

(5) $$[0, \infty | a, -a] = +1$$

und damit auch ($Z=2$!):

(6) $$[0, a | \infty, -a] = -1.$$

(6) und (4) multipliziert, ergibt:

(7) $$[0, a | e, -a] = +1$$

und damit auch:

(8) $$[0, e | a, -a] = -1.$$

Multiplizieren wir schließlich noch (8) und (3), so folgt:

$$[0, e | \infty, -a] = +1 \quad \text{und damit auch:} \quad [0, \infty | e, -a] = -1.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (2). Es kann also außer e und $-e$ keine Elemente >0 geben.

Nun zeigen wir, daß in jedem ternären Ring mit einer nichttrivialen Halbordnung die Anzahl N der Elemente >0 gleich der Anzahl M der Elemente <0 ist. $\{a_\nu\}$ sei die Menge der Elemente >0 und $\{b_\nu\}$ die Menge der Elemente <0. Die Elemente $b_1 b_\nu$ sind wegen der Eindeutigkeit der Multiplikation alle verschieden. Wegen dem Monotoniegesetz der Multiplikation sind sie in der Menge $\{a_\nu\}$ enthalten. Also gilt: $M \leq N$. Andererseits sind ebenfalls die Elemente $b_1 a_\nu$ alle verschieden und wegen dem Monotoniegesetz der Multiplikation in der Menge $\{b_\nu\}$ enthalten. Folglich ist $N \leq M$ und aus beiden Ungleichungen folgt: $N = M$.

Unser ternärer Ring kann also nur fünf Elemente enthalten, d.h. jede Gerade der zugehörigen projektiven Ebene enthält genau sechs Punkte. Wie

C. R. MAC INNES und H. B. MANN[28]) bewiesen haben, gibt es nur eine projektive Geometrie, in der jede Gerade mit genau sechs Punkten inzidiert, nämlich die desarguessche Geometrie mit dem Primkörper der Charakteristik 5 als Koordinatenbereich.

Im Fall $Z=3$ schließlich kommt wieder nur der Primkörper der Charakteristik 3 als Koordinatenbereich in Frage; hier bleibt mit geringfügigen Änderungen der Beweis des desarguesschen Falles in Geltung[29]).

Literatur.

[1] HALL, M.: Projective Planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [2] HESSENBERG, G.: Über einen geometrischen Kalkül. Acta Math. **29**, 1—23 (1905). — [3] MOUFANG, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D^9), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9**, 207—222 (1933). — [4] SKORNYAKOW, L. A.: Natural Domains of Veblen-Wedderburn Projective Planes. Amer. Math. Soc., Translation Nr. **58** (1951). — [5] SPERNER, E.: Die Ordnungsfunktion einer Geometrie. Math. Ann. **121**, 107—130 (1949). — [6] SPERNER, E.: Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. **1949**, 10. Abh. — [7] SPERNER, E.: Konvexität bei Ordnungsfunktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **16**, 140—154 (1949).

[28]) MACINNES, C. R.: Finite planes with less than eight points on a line. Amer. Math. Monthly **14**, 171—174 (1907) und MANN, H. B.: On orthogonal Latin squares. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 249—257 (1944).

[29]) Siehe [6] S. 37.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 15. Januar 1955.)

MÜLLER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 292—309 (1955)

Über Interpolation mittels ganzer rationaler Funktionen.

Von
MAX MÜLLER.

Herr U. WEGNER[1]) hat als erster, und zwar auf drei verschiedenen Wegen, die Aufgabe gelöst, das Fehlerglied der Lagrangeschen Interpolationsformel durch eine Ableitung der interpolierten Funktion $f(x)$ auszudrücken, deren Ordnung zwischen 1 und der Anzahl der Interpolationsstellen (je einschließlich) beliebig vorgeschrieben werden darf. Wenn die untereinander verschiedenen Interpolationsstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und auch die Stelle x dem Intervall $[0, 1]$ angehören, $P_n(x)$ das Polynom höchstens n-ten Grades ist, das den Bedingungen

$$P_n(x_\nu) = f(x_\nu) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

genügt und r eine beliebig ausgewählte der Zahlen $1, 2, \ldots, n+1$ bedeutet, ergibt sich eine Formel der Gestalt

$$(*) \qquad R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \int_0^1 f^{(r)}(t)\, K_r(t, x)\, dt.$$

Auf dem ersten Wege stellt Herr WEGNER nach dem Vorgange von W. WIRTINGER[2]), [3]) den Kern $K_r(t, x)$ mittels der Funktionen $\mathfrak{B}_r(u) = B_r(u - [u])$ dar, die mit den Bernoullischen Polynomen $B_r(t)$ gebildet sind, und benutzt dabei die Fourierentwicklungen von $\mathfrak{B}_r(u)$ und $f^{(r)}(t - [t])$. Auf dem zweiten Wege wird $K_r(t, x)$ durch die Greensche Funktion der Randwertaufgabe

$$y^{(n+1)} = 0, \qquad y(x_\nu) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ausgedrückt. Auf dem dritten Wege wird (*) aus der Eulerschen Summenformel gewonnen. Da man diese herleiten kann, indem man lediglich die definierenden Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{B}_r(u)$, nicht aber — wie es noch WIRTINGER[2]) tat — deren Fourierentwicklungen benutzt[4]), wird damit die Formel (*) mittels ganz einfacher Sätze der Analysis zugänglich[5]).

---

[1]) WEGNER, U.: Zur Theorie der Interpolation. Dtsch. Math. **1**, 103—107, 352—358 (1935).

[2]) WIRTINGER, W.: Einige Anwendungen der Euler-Maclaurinschen Summenformel insbesondere auf eine Aufgabe von Abel. Acta math. **26**, 255—271, bes. 256—259 (1902).

[3]) WIRTINGER, W.: Über das Fehlerglied bei numerischer Integration. Z. angew. Math. Mech. **13**, 166—168 (1933).

[4]) Vgl. etwa NÖRLUND, N. E.: Vorlesungen über Differenzenrechnung, S. 17—30. Berlin: Springer 1924.

[5]) Entsprechend hat Herr TOLLMIEN die Wirtingersche Herleitung des Fehlergliedes bei numerischer Quadratur [vgl. [3])] vereinfacht. Vgl. TOLLMIEN, W.: Über das Restglied der Mittelwertformeln für angenäherte Quadratur. Z. angew. Math. Mech. **29**, 193—198 (1949).

Man kann aber auch die Einführung der Funktionen $\mathfrak{B}_r(u)$ vermeiden. So entsteht eine besonders einfache und elementare Herleitung der Formel (*) und eine Darstellung des Kernes $K_r(t, x)$ mittels ganz einfacher, explizit angebbarer Funktionen, die sich im Sonderfall $r = n+1$ auch bei G. KOWALEWSKI[6]) findet und aus der die Wegnerschen Darstellungen für den Kern und auch eine weitere Kowalewskische Formel für das Fehlerglied leicht hergeleitet werden können.

Dies möchte ich in der vorliegenden Arbeit auseinandersetzen. Ich betrachte aber sogleich die allgemeinere Interpolationsaufgabe, bei der an den Interpolationsstellen das Interpolationspolynom mit der interpolierten Funktion außer in den Funktionswerten auch in den Werten der Ableitungen bis zu einer gewissen (von Interpolationsstelle zu Interpolationsstelle auch verschieden wählbaren) Ordnung hin übereinstimmen soll. Mit der Berechnung des Interpolationspolynomes in diesem allgemeineren Fall hat sich schon C. G. J. JACOBI[7]) beschäftigt; wir zeigen in § 1 einen einfacheren Weg zur Berechnung. Eine Formel für das Fehlerglied hat unter speziellen Voraussetzungen CH. HERMITE[8]) angegeben. Wir übertragen in § 2 die Cauchysche Fehlergliedformel für das Lagrangesche Interpolationspolynom[9]) auf den allgemeineren Fall und geben in § 3 in Verallgemeinerung der Wegnerschen Untersuchung eine Fehlergliedformel, in die eine Ableitung der interpolierten Funktion eingeht, deren Ordnung die Ordnungen der an den Interpolationsstellen vorgeschriebenen Ableitungen übertreffen muß, im übrigen aber bis zur Zahl der Interpolationsbedingungen beliebig vorgeschrieben werden darf. In § 4 werden einige Umformungen des Ergebnisses angegeben, und in § 5 wird als Anwendung in wenigen Zeilen die allgemeine Quadraturformel gewonnen, die Herr A. KNESCHKE[10]) im Rahmen einer von der Interpolationstheorie losgelösten Theorie der genäherten Quadratur aufgestellt hat.

§ 1. Aufstellung der Interpolationsformel.

1. Es seien $x_0, x_1, \ldots, x_s$ verschiedene Stellen, deren jeder eine natürliche Zahl α_σ zugeordnet ist; für jedes σ aus der Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, s$ seien außerdem α_σ Werte $y_\sigma^{(0)}, y_\sigma^{(1)}, \ldots, y_\sigma^{(\alpha_\sigma - 1)}$ gegeben, etwa die Werte, die eine

[6]) KOWALEWSKI, G.: Entwicklung einer Funktion nach Lagrangeschen Polynomen und ihren Integralen. Dtsch. Math. **3**, 275—280 (1938). Spezialfall $p = 0$ der dortigen Formel (3).

[7]) JACOBI, C. G. J.: Inaugural-Dissertation Berlin 1825. [= Gesammelte Werke **3**, 1—13.]

[8]) HERMITE, CH.: Sur la formule d'interpolation de Lagrange (Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt). J. reine u. angew. Math. **84**, 70—79 (1878) [= Oeuvres de Charles Hermite **3**, 432—443 (1912)]. HERMITE stellt das Fehlerglied durch ein $(n+1)$-fach iteriertes Integral dar, in dessen Integrand $f^{(n+1)}(x)$ auftritt. HERMITE behandelt auch den Fall, daß $f(x)$ eine analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen x ist.

[9]) CAUCHY, A. L.: Sur les fonctions interpolatoires. C. R. Acad. Sci. Paris **11**, 775—789 (1840) [= Oeuvres (1) **5**, 409—424 (1895)]. Vgl. etwa auch N. E. NÖRLUND[4]), S. 14.

[10]) KNESCHKE, A.: Theorie der genäherten Quadratur. J. reine u. angew. Math. **187**, 115—128, bes. S. 120 (1949).

Funktion und ihre Ableitungen an diesen Stellen annehmen:

$$y_\sigma^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x_\sigma) \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1).$$

Es sei

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n + 1, \qquad \operatorname{Max}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = k.$$

Wir suchen ein Polynom $P_n(x)$ höchstens n-ten Grades, das die Bedingungen

$$(2) \qquad P_n^{(\beta)}(x_\tau) = y_\tau^{(\beta)} \qquad (\tau = 0, 1, \ldots, s;\ \beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1)$$

erfüllt und sich in der Form

$$(3) \qquad P_n(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}(x)$$

darstellen läßt, wo die Koeffizienten $L_{\sigma\alpha}(x)$ Polynome sind, die nur von den Interpolationsstellen $x_0, x_1, \ldots, x_s$ und den für diese vorgeschriebenen Ordnungen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, nicht aber von den Werten $y_\sigma^{(\alpha)}$ abhängen.

Im Spezialfall $s = n$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ wird diese Aufgabe durch das Lagrangesche Interpolationspolynom gelöst.

2. Wir zeigen zunächst, daß die gestellte Aufgabe genau dann lösbar ist, wenn man die Polynome $L_{\sigma\alpha}(x)$ so bestimmen kann, daß

$$(4) \quad L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\tau) = \delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta} \quad (\sigma, \tau = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1;\ \beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1)^{11}).$$

In der Tat: Sind die Bedingungen (4) erfüllt, so ist nach (3)

$$P_n^{(\beta)}(x_\tau) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\tau) = y_\tau^{(\beta)}$$

für $\tau = 0, 1, \ldots, s$; $\beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1$, also (2) erfüllt. Die Bedingungen sind also hinreichend.

Daß sie auch notwendig sind, erkennt man folgendermaßen: Wählt man die Zahlen $y_\sigma^{(\alpha)}$ insbesondere so, daß bei fester Wahl des τ aus den Zahlen $0, 1, \ldots, s$ und bei fester Wahl des β aus den Zahlen $0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1$

$$(5) \qquad y_\sigma^{(\alpha)} = \delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta} \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1),$$

so folgt aus (2), (3) und (5), daß

$$1 = y_\tau^{(\beta)} = P_n^{(\beta)}(x_\tau) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\tau) = L_{\tau\beta}^{(\beta)}(x_\tau)$$

sein muß; wählt man ferner τ' aus den Zahlen $0, 1, \ldots, s$ und β' aus den Zahlen $0, 1, \ldots, \alpha_{\tau'} - 1$ so, daß $|\tau' - \tau| + |\beta' - \beta| > 0$, so folgt aus (2), (3) und (5), daß

$$0 = y_{\tau'}^{(\beta')} = P_n^{(\beta')}(x_{\tau'}) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}^{(\beta')}(x_{\tau'}) = L_{\tau\beta}^{(\beta')}(x_{\tau'})$$

sein muß. Also müssen die $L_{\sigma\alpha}(x)$ die Bedingungen (4) erfüllen; dieselben sind auch notwendige Bedingungen.

[11]) Es bedeutet $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$.

3. Wir wollen hier gleich die Frage klären, ob man die Bedingungen (5) auch erfüllen kann, wenn die $y_\sigma^{(\alpha)}$ die Werte sind, die eine r-mal ($r \geq k-1$) stetig differentiierbare Funktion $f_*(x)$ und ihre Ableitungen an den Interpolationsstellen annehmen. Dazu verstehen wir unter $x_\tau = \xi$ irgendeine der Interpolationsstellen und betrachten eine beiderseitige Umgebung $\xi' \leq x \leq \xi''$ derselben, in der keine weitere Interpolationsstelle liegt. Wir setzen

$$f_*(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \leq \xi' \quad \text{und für} \quad x \geq \xi''. \tag{6}$$

In jedem der beiden Intervalle $\xi' \leq x \leq \xi$ und $\xi \leq x \leq \xi''$ setzen wir $f_*(x)$ in der Form

$$f_*(x) = \frac{1}{\beta!}(x-\xi)^\beta + c_0(x-\xi)^{r+1} + \cdots + c_r(x-\xi)^{2r+1} \tag{7}$$

an. Dann ist jedenfalls in jedem dieser beiden Intervalle $f_*(x)$ beliebig oft differentiierbar und, ob nun ξ als rechter Endpunkt des linken oder linker Endpunkt des rechten Teilintervalles betrachtet wird,

$$f_*^{(\alpha)}(\xi) = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, r), \tag{8}$$

also $f_*(x)$ im Intervall $\xi' \leq x \leq \xi''$ r-mal stetig differentiierbar. Können wir noch die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_r$ für jedes Teilintervall so bestimmen, daß

$$f_*^{(\alpha)}(\xi') = 0, \quad \text{bzw.} \quad f_*^{(\alpha)}(\xi'') = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r,$$

so ist $f_*(x)$ für $-\infty < x < +\infty$ r-mal stetig differentiierbar, und die Werte $f_*^{(\alpha)}(x_\sigma) = y_\sigma^{(\alpha)}$ erfüllen nach (6) und (8) die Bedingungen (5).

Solche Bestimmung der Koeffizienten $c_0, \ldots, c_r$ ist aber möglich; sie führt nämlich, wenn wir $\xi' - \xi = t$, bzw. $\xi'' - \xi = t$ setzen, jeweils auf ein System von $r+1$ inhomogenen linearen Gleichungen für diese $r+1$ Koeffizienten, dessen Determinante

$$D = t^{(r+1)^2} D_{r+1}$$

ist, wenn allgemein

$$\begin{array}{lll} 1 & 1 & \ldots\ 1 \\ r+1 & r+2 & \ldots\ r+\varrho \\ (r+1)r & (r+2)(r+1) & \ldots (r+\varrho)(r+\varrho-1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (r+1)r \ldots (r+1-\varrho+2) & (r+2)(r+1) \ldots (r+2-\varrho+2) & \ldots (r+\varrho)(r+\varrho-1) \ldots (r+2) \end{array}$$

gesetzt wird. Subtrahiert man in D_ϱ in jeder Spalte die Elemente der vorhergehenden, von rechts beginnend, und entwickelt man die so umgeformte Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so ergibt sich die Rekursionsformel

$$D_\varrho = (\varrho - 1)!\, D_{\varrho-1}.$$

Da $D_2 = 1$ ist, wird damit

$$D = t^{(r+1)^2} r!\,(r-1)! \ldots 2!\,1!.$$

Hiernach ist $D \neq 0$, die Bestimmung der Koeffizienten $c_0, \ldots, c_r$ also eindeutig möglich. Die Existenz einer Funktion $f_*(x)$ mit den gewünschten Eigenschaften steht also fest.

4. Für das Interpolationspolynom der soeben konstruierten Funktion $f_*(x)$ ergibt sich

$$P_{n*}(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} f_*^{(\alpha)}(x_\sigma) L_{\sigma\alpha}(x) = L_{\tau\beta}(x).$$

Da $P_n(x)$ höchstens den Grad n haben soll, hat also auch $L_{\tau\beta}(x)$ höchstens den Grad n. Wegen der Freiheit, die wir bei der Konstruktion der Funktion $f_*(x)$ in der Wahl von τ und β hatten, ist also der Grad jedes der Polynome $L_{\tau\beta}(x)$ $(\tau = 0, 1, \ldots, s;\ \beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1)$ höchstens gleich n.

5. Die Bedingungen (4) besagen zunächst, daß das Polynom höchstens n-ten Grades $L_{\sigma\alpha}(x)$ an der Stelle x_τ mit $\tau \neq \sigma$ mitsamt den $a_\tau - 1$ ersten Ableitungen verschwindet, daß also die Stelle x_τ mindestens a_τ-fache Nullstelle von $L_{\sigma\alpha}(x)$ ist. Daher muß $L_{\sigma\alpha}(x)$ die Form

$$L_{\sigma\alpha}(x) = p_\sigma(x) \Lambda_{\sigma\alpha}(x) \tag{9}$$

haben, wo zur Abkürzung

$$p_\sigma(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} \ldots (x - x_{\sigma-1})^{\alpha_{\sigma-1}} (x - x_{\sigma+1})^{\alpha_{\sigma+1}} \ldots (x - x_s)^{\alpha_s} \tag{10}$$

gesetzt, also $p_\sigma(x)$ ein Polynom vom Grade $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s - \alpha_\sigma = n + 1 - \alpha_\sigma$ ist und $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ ein weiteres Polynom bedeutet. Da der Grad von $L_{\sigma\alpha}(x)$ nicht größer als n sein kann und $p_\sigma(x)$ den Grad $n + 1 - \alpha_\sigma$ hat, ist der Grad von $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ höchstens gleich $\alpha_\sigma - 1$.

Die Bestimmung von $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ gelingt nun folgendermaßen: Nach (4) und (9) muß

$$L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\sigma) = \sum_{\gamma=0}^{\beta} \binom{\beta}{\gamma} p_\sigma^{(\beta-\gamma)}(x_\sigma) \Lambda_{\sigma\alpha}^{(\gamma)}(x_\sigma) = \delta_{\alpha\beta}$$

sein. Dies verlangt für $\beta = 0$, weil $p_\sigma(x_\sigma) \neq 0$ ist, daß

$$\Lambda_{\sigma\alpha}(x_\sigma) = \frac{\delta_{\alpha 0}}{p_\sigma(x_\sigma)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1), \tag{11}$$

und für $\beta \geq 1$, daß

$$\Lambda_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\sigma) = \frac{1}{p_\sigma(x_\sigma)} \left[\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} \binom{\beta}{\gamma} p_\sigma^{(\beta-\gamma)}(x_\sigma) \Lambda_{\sigma\alpha}^{(\gamma)}(x_\sigma) \right]. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) können schrittweise die Werte der Ableitungen von $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ an der Stelle x_σ berechnet werden. $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ ergibt sich dann aus der Formel

$$\begin{cases} \Lambda_{\sigma\alpha}(x) = \Lambda_{\sigma\alpha}(x_\sigma) + \frac{1}{1!} \Lambda'_{\sigma\alpha}(x_\sigma)(x - x_\sigma) + \cdots \\ \qquad + \frac{1}{(\alpha_\sigma - 1)!} \Lambda_{\sigma\alpha}^{(\alpha_\sigma - 1)}(x_\sigma)(x - x_\sigma)^{\alpha_\sigma - 1}. \end{cases} \tag{13}$$

Aus (9), (10) und (13) ergibt sich dann in eindeutiger Weise $L_{\sigma\alpha}(x)$.

6. Beispiele. Im Falle $s=0$, $\alpha_0=n+1$ ist nach (4)

$$L_{0\alpha}(x)=\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!},$$

also

$$P_n(x)=\sum_{\alpha=0}^{n} f^{(\alpha)}(x_0)\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!},$$

d.h. $P_n(x)$ das Taylorsche Polynom n-ten Grades für $f(x)$ an der Stelle x_0.

Im Spezialfall $s=n$; $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$ wird

$$p_\sigma(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{\sigma-1})(x-x_{\sigma+1})\dots(x-x_n);$$

für α kommt nur der Wert 0 in Betracht, $A_{\sigma 0}(x)$ ist vom Grad 0, nämlich nach (11)

$$A_{\sigma 0}(x)=A_{\sigma 0}(x_\sigma)=\frac{1}{p_\sigma(x_\sigma)};$$

es wird

$$P_n(x)=\sum_{\sigma=0}^{n} f(x_\sigma)\frac{p_\sigma(x)}{p_\sigma(x_\sigma)},$$

d.h. das Lagrangesche Interpolationspolynom.

Schließlich erhält man im Spezialfall $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_s=2$ die folgenden Ausdrücke:

$$L_{\sigma 0}(x)=\frac{p_\sigma(x)}{p_\sigma(x_\sigma)}\left(1-\frac{p'_\sigma(x_\sigma)}{p_\sigma(x_\sigma)}(x-x_\sigma)\right),\qquad L_{\sigma 1}(x)=\frac{p_\sigma(x)}{p_\sigma(x_\sigma)}(x-x_\sigma)$$
$$(\sigma=0,1,\dots,s).$$

Von diesem Spezialfall hat Herr L. Fejér Gebrauch gemacht, um den Weierstraßschen Approximationssatz zu beweisen[12]).

§ 2. Übertragung der Cauchyschen Fehlergliedformel.

$f(t)$ sei im Intervall $a\leq t\leq b$ $(k-1)$-mal differentiierbar und in seinem Innern r-mal differentiierbar, wo $k-1\leq r\leq n+1$. Dem Intervall $a\leq t\leq b$ sollen die Stellen $x, x_0, \dots, x_s$ angehören. Die Stelle x falle zunächst mit keiner der Interpolationsstellen $x_0, \dots, x_s$ zusammen. Wir setzen

$$P_n(x)=\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} f^{(\alpha)}(x_\sigma)\,L_{\sigma\alpha}(x)$$

und bilden die Funktion

$$(14)\qquad \Phi(t)=f(t)-P_n(t)-\frac{(t-x_0)^{\alpha_0}\cdots(t-x_s)^{\alpha_s}}{(x-x_0)^{\alpha_0}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}}\,[f(x)-P_n(x)],$$

die ebenfalls im Intervall $a\leq t\leq b$ $(k-1)$-mal und in $a<t<b$ r-mal differentiierbar ist. Es ist

$$(15)\qquad \Phi^{(\alpha)}(x_\sigma)=0\quad\text{für}\quad \sigma=0,1,\dots,s;\quad \alpha=0,1,\dots,\alpha_\sigma-1$$

[12]) Fejér, L.: Über Weierstraßsche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation. Math. Annalen **102**, 707—725 (1930). Den Hinweis auf diese Fejérschen Untersuchungen verdanke ich Herrn H. Kneser.

und auch $\Phi(x)=0$. Nach (15) hat $\Phi(t)$ an der Stelle x_σ eine Nullstelle mindestens der Ordnung α_σ.

Die Anzahl der Stellen x_σ, an denen $\alpha_\sigma=\varkappa$ ist, sei $\lambda_\varkappa$ $(\varkappa=1, 2, \ldots, k)$. Dann ist

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+k\lambda_k=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n+1 \tag{16}$$

und

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=s+1. \tag{17}$$

Die Menge der Interpolationsstellen x_σ, für welche $\alpha_\sigma\geq\varkappa$, bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_\varkappa$. $\mathfrak{N}_{\varkappa+1}$ ist (echte oder unechte) Untermenge von $\mathfrak{N}_\varkappa$.

$\Phi(t)$ hat die $s+2$ verschiedenen Nullstellen $x, x_0, \ldots, x_s$; zwischen je zwei benachbarten dieser Stellen liegt nach dem Rolleschen Satz mindestens eine Nullstelle von Φ'; das sind mindestens $s+1$ verschiedene Nullstellen von Φ', die nicht zu $\mathfrak{N}_1$ gehören; außerdem verschwindet Φ' an den Stellen von $\mathfrak{N}_2$; das sind $\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ von den vorigen und untereinander verschiedene Stellen; insgesamt hat also Φ' mindestens

$$s+1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=s_1$$

verschiedene Nullstellen. Zwischen je zwei benachbarten dieser s_1 Stellen hat nach dem Rolleschen Satz Φ'' mindestens eine Nullstelle; das sind mindestens s_1-1 verschiedene Nullstellen; keine dieser Stellen gehört (auch wenn sie Interpolationsstelle sein sollte) zu $\mathfrak{N}_2$; keine dieser s_1-1 Stellen gehört also zu $\mathfrak{N}_3$; außerdem hat Φ'' die Stellen von $\mathfrak{N}_3$ zu Nullstellen; das sind $\lambda_3+\cdots+\lambda_k$ weitere, von den vorigen und untereinander verschiedene Nullstellen; insgesamt hat also Φ'' mindestens

$$s_1-1+\lambda_3+\cdots+\lambda_k=s_2$$

verschiedene Nullstellen. Analog ergibt sich, daß Φ''' mindestens

$$s_2-1+\lambda_4+\cdots+\lambda_k=s_3$$

verschiedene Nullstellen hat, usw.; $\Phi^{k-1}(t)$ hat mindestens

$$s_{k-2}-1+\lambda_k=s_{k-1}$$

und $\Phi^{(k)}(t)$ mindestens $s_{k-1}-1=s_k$ verschiedene Nullstellen.

Mit Rücksicht auf (16) und (17) ist

$$\begin{aligned}
s_1&=\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\cdots+2\lambda_k,\\
s_2&=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+3\lambda_k-1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_{k-1}&=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+k\lambda_k-k+2=n-k+3,\\
s_k&=n-k+2.
\end{aligned}$$

Zwischen diesen $n-k+2$ verschiedenen Nullstellen von $\Phi^{(k)}(t)$ liegen nach dem Rolleschen Satz $n-k+1$ verschiedene Nullstellen von $\Phi^{(k+1)}(t)$, usw. Ist $k-1\leq r\leq n+1$, so hat $\Phi^{(r)}(t)$ mindestens $n-r+2$ verschiedene Null-

stellen. Für $r=k-1$ liegen diese Nullstellen nicht außerhalb des Intervalles $\mathrm{Min}(x, x_0, \ldots, x_s) \leq t \leq \mathrm{Max}(x, x_0, \ldots, x_s)$; für $r \geq k$ liegen sie im Innern dieses Intervalles.

Da die r-te Ableitung

$$(18)\quad \frac{\partial^r}{\partial t^r}(t-x_0)^{\alpha_0}(t-x_1)^{\alpha_1}\ldots(t-x_s)^{\alpha_s} = (n+1)\ldots(n+1-r+1)\,t^{n+1-r}+\cdots$$

ein Polynom vom Grade $n+1-r$ ist, das nicht identisch verschwindet, hat sie höchstens $n+1-r$ verschiedene Nullstellen. Also hat $\Phi^{(r)}(t)$ mindestens eine Nullstelle $\xi=\xi_r$, an der die Ableitung (18) nicht verschwindet. Aus der r-mal differentiierten Formel (14) folgt nun, wenn wir $t=\xi$ setzen und nach $f(x)-P_n(x)$ auflösen:

Zu jeder natürlichen Zahl r mit $k-1 \leq r \leq n+1$ gibt es eine Zahl $\xi=\xi_r$, für die die Ableitung (18) nicht verschwindet und

$$(19)\quad f(x)-P_n(x) = \left[\frac{f^{(r)}(t)-P_n^{(r)}(t)}{\frac{\partial^r}{\partial t^r}(t-x_0)^{\alpha_0}\ldots(t-x_s)^{\alpha_s}}\right]_{t=\xi}(x-x_0)^{\alpha_0}\ldots(x-x_s)^{\alpha_s},$$

$$(20)\quad \mathrm{Min}(x, x_0, \ldots, x_s) \leq \xi \leq \mathrm{Max}(x, x_0, \ldots, x_s)$$

ist; für $k \leq r \leq n+1$ gilt die letzte Ungleichung sogar ohne die Gleichheitszeichen.

Speziell für $r=n+1$ wird

$$P_n^{(r)}(t) \equiv 0, \qquad \frac{\partial^r}{\partial t^r}(t-x_0)^{\alpha_0}\ldots(t-x_s)^{\alpha_s} = (n+1)!,$$

also

$$(21)\quad f(x)-P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{\alpha_0}\ldots(x-x_s)^{\alpha_s}.$$

Da nach (1)

$$\alpha_\sigma \leq n+1-s \quad \text{für} \quad \sigma=0, 1, \ldots, s, \quad \text{also} \quad k \leq n+1-s,$$

ist in diesem Fall $k-1 \leq n-s \leq n < n+1=r$; $\xi=\xi_{n+1}$ genügt also der Ungleichung (20) mit Ausschluß der Gleichheitszeichen.

Wenn x mit einer der Interpolationsstellen zusammenfällt, gilt (19) auch noch, wofern man unter ξ nur irgendeine Stelle des Intervalles (20) versteht, die nicht Nullstelle der Ableitung (18) ist.

Im Spezialfall $s=n$, $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$ ist (21) die Cauchysche Formel für den Fehler der Lagrangeschen Interpolationsformel[9], [13], [13a].

[13] Herr E. Weinel [Bemerkungen über das Restglied der Lagrangeschen Interpolationsformel und der Formeln zur numerischen Differentiation. Z. angew. Math. Mech. **29**, 32—33 (1949)] hat den Lagrangeschen Spezialfall von (21) hergeleitet auf dem Wege über eine etwas allgemeinere Fehlergliedformel, die dem Schlömilchschen Restglied in der Taylorschen Formel entspricht.

[13a] Die Formel (21) findet sich auch bei W. Maak, Differential- und Integralrechnung, S. 77. Wolfenbüttel u. Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt G.m.b.H. 1949. Hierauf bin ich nach Abschluß dieser Arbeit in einem Gespräch mit Herrn Kollegen Maak aufmerksam geworden.

§ 3. Herleitung einer weiteren Fehlergliedformel.

1. Wir setzen für $\varrho \geq 1$ und für $t \neq x$

$$k_\varrho(t, x) = \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2(\varrho-1)!}(t-x)^{\varrho-1}. \tag{22}$$

Diese Funktionen sind für $\varrho \geq 2$ durchweg stetig, wenn wir für $\varrho \geq 2$

$$k_\varrho(x, x) = 0 \tag{23}$$

setzen. Die Funktion $k_1(t, x)$ ist für $t \neq x$ stetig und hat an der Stelle $t = x$ einen Sprung von der Länge 1. Es ist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k_2(t,x)}{\partial t} = k_1(t,x) & \text{für} \quad t \gtrless x, \\ \dfrac{\partial k_{\varrho+1}(t,x)}{\partial t} = k_\varrho(t,x) & \text{für} \quad t \gtrless x \quad \text{und} \quad \varrho \geq 2. \end{cases} \tag{24}$$

2. Ist $f'(t)$ über das Intervall $a \leq t \leq b$ absolut R-integrierbar und zunächst $a < x < b$, so ist

$$\int_a^b f'(t)\, k_1(t,x)\, dt = \tfrac{1}{2}\int_a^x f'(t)\, dt - \tfrac{1}{2}\int_x^b f'(t)\, dt = f(x) - \tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)]$$

oder

$$f(x) = f(a)\, k_1(a,x) - f(b)\, k_1(b,x) + \int_a^b f'(t)\, k_1(t,x)\, dt. \tag{25}$$

Dies gilt, wie man leicht nachprüft, nachträglich auch für $x = a$ und für $x = b$, sofern man

$$k_1(a,a) = \lim_{x \to a+0} k_1(a,x), \qquad k_1(b,b) = \lim_{x \to b-0} k_1(b,x) \tag{26}$$

setzt.

Ist $f''(t)$ über das Intervall $a \leq t \leq b$ absolut R-integrierbar, so ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)\, k_1(t,x)\, dt &= \int_a^x f'(t)\, \frac{\partial k_2(t,x)}{\partial t}\, dt + \int_x^b f'(t)\, \frac{\partial k_2(t,x)}{\partial t}\, dt \\ &= -[f'(a)\, k_2(a,x) - f'(b)\, k_2(b,x)] - \int_a^b f''(t)\, k_2(t,x)\, dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Ist $f^{(r)}(t)$ für ein $r \geq 3$ über das Intervall $a \leq t \leq b$ absolut R-integrierbar, so ist für $\varrho = 2, 3, \ldots, r-1$

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(\varrho)}(t)\, k_\varrho(t,x)\, dt &= \int_a^b f^{(\varrho)}(t)\, \frac{\partial k_{\varrho+1}(t,x)}{\partial t}\, dt \\ &= -[f^{(\varrho)}(a)\, k_{\varrho+1}(a,x) - f^{(\varrho)}(b)\, k_{\varrho+1}(b,x)] - \int_a^b f^{(\varrho+1)}(t)\, k_{\varrho+1}(t,x)\, dt. \end{aligned} \tag{28}$$

Nach (27) gilt (28) auch für $\varrho = 1$.

Aus (25) und (28) folgt, daß im Intervall $a \leq x \leq b$

$$f(x) = g_{r-1}(x) - (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t,x)\, dt, \tag{29}$$

wobei nach (22)

$$(30)\qquad \begin{cases} g_{r-1}(x) = \sum_{\varrho=0}^{r-1} (-1)^\varrho \left[f^{(\varrho)}(a)\, k_{\varrho+1}(a, x) - f^{(\varrho)}(b)\, k_{\varrho+1}(b, x) \right] \\ \qquad = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \frac{(-1)^\varrho}{2\varrho!} \left[f^{(\varrho)}(a)\,(a-x)^\varrho + f^{(\varrho)}(b)\,(b-x)^\varrho \right] \end{cases}$$

ein Polynom höchstens $(r-1)$-ten Grades ist.

3. Nach (22) ist für $\alpha = 1, 2, \ldots, r-2$

$$(31)\qquad \frac{\partial^\alpha k_r(t, x)}{\partial x^\alpha} = (-1)^\alpha \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2(r-1-\alpha)!}(t-x)^{r-1-\alpha} = (-1)^\alpha k_{r-\alpha}(t, x).$$

Diese Ableitungen sind für alle t und x stetig.

Nach (29) wird damit[14]) für $\alpha = 1, 2, \ldots, r-2$

$$(32)\qquad f^{(\alpha)}(x) = g_{r-1}^{(\alpha)}(x) - (-1)^{r+\alpha} \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t, x)\, dt.$$

---

[14]) Daß man die Differentiationen des Integrales unter dem Integralzeichen durchführen darf, obgleich der Integrand und seine Ableitungen nicht stetig zu sein brauchen, ergibt sich durch α-malige Anwendung des folgenden Hilfssatzes:

Ist $\lambda(t)$ über das Intervall $a \leq t \leq b$ absolut R-integrierbar, $\mu(t, x)$ und seine Ableitung $\mu_x(t, x)$ im Quadrat $a \leq t \leq b$, $a \leq x \leq b$ stetig, so ist

$$F(x) = \int_a^b \lambda(t)\, \mu(t, x)\, dt$$

im Intervall $a \leq x \leq b$ differentiierbar und

$$F'(x) = \int_a^b \lambda(t)\, \mu_x(t, x)\, dt.$$

Beweis: Ist auch $a \leq x + h \leq b$, so ist mit geeignet zwischen 0 und 1 gewähltem $\vartheta = \vartheta(t, x, h)$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^b \lambda(t) \left[\mu(t, x+h) - \mu(t, x) \right] dt$$

$$= \int_a^b \lambda(t)\, \mu_x(t, x)\, dt + \int_a^b \lambda(t) \left[\mu_x(t, x + \vartheta h) - \mu_x(t, x) \right] dt;$$

ist $\omega(\delta)$ das Stetigkeitsmaß von $\mu_x(t, x)$ im Quadrat, also für je zwei Stellen (t_1, x_1) und (t_2, x_2) desselben, deren Abstand höchstens gleich δ ist,

$$|\mu_x(t_1, x_1) - \mu_x(t_2, x_2)| \leq \omega(\delta),$$

so ist also

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b \lambda(t)\, \mu_x(t, x)\, dt \right| \leq \omega(|h|) \int_a^b |\lambda(t)|\, dt.$$

Hieraus folgt die Behauptung, da bei unseren Voraussetzungen $\omega(|h|) \to 0$ für $h \to 0$.

Für $\alpha = r-2$ besagt dies, daß

$$f^{(r-2)}(x) = g_{r-1}^{(r-2)}(x) - \int_a^b f^{(r)}(t)\,\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2}\,(t-x)\,dt$$

$$= g_{r-1}^{(r-2)}(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f^{(r)}(t)\,(t-x)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^b f^{(r)}(t)\,(t-x)\,dt.$$

Hier können wir nochmals nach x differentiieren[15]) und finden

$$f^{(r-1)}(x) = g_{r-1}^{(r-1)}(x) + \tfrac{1}{2}\int_a^x f^{(r)}(t)\,dt - \tfrac{1}{2}\int_x^b f^{(r)}(t)\,dt = g_{r-1}^{(r-1)}(x) + \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_1(t,x)\,dt;$$

die Formel (32) gilt also auch für $\alpha = r-1$.

4. Um die in das Interpolationspolynom

$$P_n(x) = \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} f^{(\alpha)}(x_\sigma)\,L_{\sigma\alpha}(x)$$

eingehenden Ableitungswerte gemäß (32) ausdrücken zu können, setzen wir nunmehr voraus, daß $k-1 \leq r-1$, d.h. $r \geq k$. Dann folgt aus (29) und (32) die angekündigte Restgliedformel

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \gamma_r(x) + \int_a^b f^{(r)}(t)\,K_r(t,x)\,dt, \tag{33}$$

wo

$$\gamma_r(x) = g_{r-1}(x) - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_\sigma-1} g_{r-1}^{(\alpha)}(x_\sigma)\,L_{\sigma\alpha}(x) \tag{34}$$

---

[15]) Man wende auf die beiden letzten Integrale folgenden Hilfssatz an: Ist $\lambda(t)$ über das Intervall $u \leq t \leq v$ absolut R-integrierbar, so ist

$$G(x) = \int_u^x \lambda(t)\,(t-x)\,dt$$

für $u \leq x \leq v$ differentiierbar und

$$G'(x) = -\int_u^x \lambda(t)\,dt.$$

Beweis: Es ist

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \lambda(t)\,(t-x)\,dt - \int_u^{x+h} \lambda(t)\,dt,$$

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} + \int_u^x \lambda(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \lambda(t)\,(t-x)\,dt - \int_x^{x+h} \lambda(t)\,dt,$$

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} + \int_u^x \lambda(t)\,dt\right| \leq \left|\int_x^{x+h} |\lambda(t)|\,dt\right| + \left|\int_x^{x+h} |\lambda(t)|\,dt\right|;$$

für $h \to 0$ folgt hieraus die Behauptung.

und mit Rücksicht auf (22) für den Kern $K_r(t, x)$ die folgenden Darstellungen gel'en:

$$(35)\quad \begin{cases} K_r(t,x) = (-1)^{r+1}\left[k_r(t,x) - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} \frac{\partial^\alpha k_r(t,x)}{\partial x^\alpha}\Big|_{x=x_\sigma} L_{\sigma\alpha}(x)\right] \\ = (-1)^{r+1}\left[k_r(t,x) - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}(-1)^\alpha k_{r-\alpha}(t,x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\right] \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{(r-1)!}(x-t)^{r-1} - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{\operatorname{sign}(x_\sigma-t)}{(r-1-\alpha)!}(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha} L_{\sigma\alpha}(x)\right]. \end{cases}$$

Der Grad des Polynomes $\gamma_r(x)$ ist nicht größer als die größere der Zahlen $r-1$ und n. $\gamma_r(x)$ gibt an, wie gut sich die vorliegende, d.h. durch die Interpolationsstellen $x_0, \ldots, x_s$ und die ihnen zugeschriebenen Ordnungen $\alpha_0, \ldots, \alpha_s$ bestimmte Interpolationsaufgabe für die spezielle Funktion $g_{r-1}(x)$ lösen läßt. Es ist daher $\gamma_r(x) \equiv 0$ für $r \leq n+1$.

Entsprechend gibt, wie aus der ersten der Darstellungen (35) zu entnehmen ist, der Kern $K_r(t, x)$ an, wie gut sich die vorliegende Interpolationsaufgabe für die spezielle, vom Parameter t abhängende Funktion

$$(-1)^{r+1} k_r(t,x) = \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2(r-1)!}(x-t)^{r-1}$$

lösen läßt.

Für den Spezialfall $s=n$, $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 1$ und $r = n+1$ ist (33) mit der dritten der Kerndarstellungen (35) in einer Formel von G. KOWALEWSKI[6]) enthalten.

§ 4. Umformungen der Restgliedformel (33) und des Kernes.

1. Setzen wir insbesondere $f(x) = (x-t)^\varrho$ für $\varrho = 0, 1, \ldots, n$, so ist $R_n(x) = 0$, und (33) liefert die Relationen

$$(36)\quad \begin{cases} (x-t)^\varrho = \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} \frac{\partial^\alpha (x-t)^\varrho}{\partial x^\alpha}\Big|_{x=x_\sigma} L_{\sigma\alpha}(x) \\ \qquad = \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\alpha+1)(x_\sigma-t)^{\varrho-\alpha}\cdot L_{\sigma\alpha}(x). \end{cases}$$

Aus (36), angewandt mit $\varrho = r-1$, und (35) folgt, daß

$$(37)\quad K_r(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}[\operatorname{sign}(x-t) - \operatorname{sign}(x_\sigma-t)]\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!} L_{\sigma\alpha}(x).$$

Außerhalb des Intervalles

$$X = \operatorname{Min}(x, x_0, \ldots, x_n) \leq t \leq \operatorname{Max}(x, x_0, \ldots, x_n) = X'$$

ist also $K_r(t, x) = 0$. Man kann daher in (33) die Integrationsgrenzen a und b durch X und X' ersetzen.

Ferner ist nach (37)

$$K_r(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}[\pm 1-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)]\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}L_{\sigma\alpha}(x)\quad\text{für}\quad x\gtrless t;$$

also

$$K_r(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{x_\sigma<t}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}L_{\sigma\alpha}(x) & \text{für}\quad x>t\\ \displaystyle-\sum_{x_\sigma>t}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}L_{\sigma\alpha}(x) & \text{für}\quad x<t;\end{cases}$$

dies ist die Darstellung des Kernes, die Herr WEGNER[1]) im Lagrangeschen Fall auf dem Wege über die Greensche Funktion gewonnen hat.

Schließlich ist nach (33) und (37) für $k\leq r\leq n+1$

$$R_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}L_{\sigma\alpha}(x)\int_a^b f^{(r)}(t)\,[\operatorname{sign}(x-t)-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)]\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}\,dt.$$

Wenn aber die Ungleichung $a\leq x\leq x_\sigma\leq b$ gilt, so ist

$$\operatorname{sign}(x-t)-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad a\leq t<x\quad\text{und für}\quad x_\sigma<t\leq b\\ -2 & \text{für}\quad x<t<x_\sigma,\end{cases}$$

und wenn die Ungleichung $a\leq x_\sigma\leq x\leq b$ gilt, ist

$$\operatorname{sign}(x-t)-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad a\leq t<x_\sigma\quad\text{und für}\quad x<t\leq b\\ 2 & \text{für}\quad x_\sigma<t<x.\end{cases}$$

Damit folgt, daß

$$R_n(x)=\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}L_{\sigma\alpha}(x)\int_{x_\sigma}^{x}f^{(r)}(t)\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}\,dt\qquad(k\leq r\leq n+1).$$

Für den Lagrangeschen Fall und $r=n+1$ hat diese Formel G. KOWALEWSKI angegeben und seinen Untersuchungen über Interpolation zugrunde gelegt[16]).

2. Aus der Lehre von den Bernoullischen Polynomen[17]) benötigen wir bei der folgenden Umformung des Kernes

a) ihre rekurrente Erzeugung

$$B_0(x)=1,\qquad B_{\varrho+1}(x)=B_{\varrho+1}+(\varrho+1)\int_0^x B_\varrho(t)\,dt\qquad(\varrho=0,1,\ldots),$$

wobei

$$B_0=1,\quad B_1=-\tfrac{1}{2},\quad B_2=\tfrac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\tfrac{1}{30},\ldots$$

---

[16]) KOWALEWSKI, G.: Interpolation und genäherte Quadratur, S. 24. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. — KOWALEWSKI, G.: Zur Analysis des Endlichen und Unendlichen, S. 107f. München: R. Oldenbourg 1950.

[17]) Vgl. dazu etwa N. E. NÖRLUND[4]), S. 17ff.

die Bernoullischen Zahlen sind, und insbesondere, daß hiernach

$$B_1(x) = B_1 + x, \quad B_2(x) = B_2 + 2B_1 x + x^2 = B_2 - x + x^2;$$

b) die Beziehung

$$B_\varrho(0) = B_\varrho(1) = B_\varrho \quad (\varrho = 0, 2, 3, \ldots);$$

c) die Tatsache, daß alle Bernoullischen Zahlen mit ungerader Nummer oberhalb 1 gleich 0 sind.

Aus a) und b) folgt, daß

$$\int_0^1 B_\varrho(t)\,dt = \frac{1}{\varrho+1}\,[B_{\varrho+1}(1) - B_{\varrho+1}(0)] = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \geq 1.$$

Wir benutzen im folgenden die Funktionen

$$\mathfrak{B}_\varrho(x) = B_\varrho(x - [x]) \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots). \tag{38}$$

Dieselben haben alle die Periode 1. Es ist daher $\mathfrak{B}_0(x) \equiv 1$ und für $\varrho \geq 1$ nach der letzten Feststellung und nach a)

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^x \mathfrak{B}_\varrho(t)\,dt &= \int_0^{[x]} \mathfrak{B}_\varrho(t)\,dt + \int_{[x]}^x \mathfrak{B}_\varrho(t)\,dt \\ &= [x]\cdot\int_0^1 B_\varrho(t)\,dt + \int_0^{x-[x]} \mathfrak{B}_\varrho(\tau + [x])\,d\tau = \int_0^{x-[x]} B_\varrho(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\varrho+1}\,[B_{\varrho+1}(x-[x]) - B_{\varrho+1}] = \frac{1}{\varrho+1}\,[\mathfrak{B}_{\varrho+1}(x) - B_{\varrho+1}]. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$\mathfrak{B}_0(x) \equiv 1$ ist eine gerade Funktion, $\mathfrak{B}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ eine ungerade Funktion. Nehmen wir an, es stünde schon fest, daß $\mathfrak{B}_{2\varrho-1}(x)$ ungerade ist; dann ist nach (39)

$$\mathfrak{B}_{2\varrho}(x) - \mathfrak{B}_{2\varrho}(-x) = 2\varrho\left[\int_0^x \mathfrak{B}_{2\varrho-1}(t)\,dt - \int_0^{-x} \mathfrak{B}_{2\varrho-1}(t)\,dt\right] = 0,$$

also $\mathfrak{B}_{2\varrho}(x)$ eine gerade Funktion; daher ist mit Rücksicht auf c) für $\varrho \geq 1$

$$\mathfrak{B}_{2\varrho+1}(x) + \mathfrak{B}_{2\varrho+1}(-x) = (2\varrho+1)\left[\int_0^x \mathfrak{B}_{2\varrho}(t)\,dt + \int_0^{-x} \mathfrak{B}_{2\varrho}(t)\,dt\right] = 0,$$

d.h. $\mathfrak{B}_{2\varrho+1}(x)$ eine ungerade Funktion.

Also sind die Funktionen $\mathfrak{B}_\varrho(x)$ mit gerader Nummer gerade Funktionen, die mit ungerader Nummer ungerade Funktionen.

3. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{x-t}{b-a} = u = u(x-t). \tag{40}$$

Es ist

$$\mathfrak{B}_1(u) = -\tfrac{1}{2} + u - [u] = \mp\tfrac{1}{2} + u \quad \text{für} \quad \begin{cases} a \leq t < x \leq b \\ a \leq x < t \leq b, \end{cases}$$

also nach (22) für $a \leq t \leq b$, $a \leq x \leq b$, $t \neq x$

$$k_1(t, x) = u - \mathfrak{B}_1(u) = -\,[\mathfrak{B}_1(u) - B_1(u) - \tfrac{1}{2}].$$

Wir behaupten, daß allgemein für $r \geq 1$

$$k_r(t,x) = (-1)^r \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\left[\mathfrak{B}_r(u) - B_r(u) - \frac{r}{2}u^{r-1}\right]. \tag{41}$$

Für $r=1$ trifft dies zu. Gilt es aber für irgendein $r \geq 1$, so ist nach (23) und (24), sowie (39) und a)

$$\begin{aligned} k_{r+1}(t,x) &= \int_x^t k_r(\tau,x)\,d\tau \\ &= (-1)^{r+1}\frac{(b-a)^r}{r!}\left[\int_0^u \mathfrak{B}_r(v)\,dv - \int_0^u B_r(v)\,dv - \frac{r}{2}\int_0^u v^{r-1}\,dv\right], \\ &= (-1)^{r+1}\frac{(b-a)^r}{r!}\left[\frac{1}{r+1}\mathfrak{B}_{r+1}(u) - \frac{1}{r+1}B_{r+1} - \frac{1}{r+1}B_{r+1}(u) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{r+1}B_{r+1} - \frac{1}{2}u^r\right] \\ &= (-1)^{r+1}\frac{(b-a)^r}{(r+1)!}\left[\mathfrak{B}_{r+1}(u) - B_{r+1}(u) - \frac{r+1}{2}u^r\right]; \end{aligned}$$

die Formel (41) gilt also auch für $r+1$ statt r und damit allgemein.

4. Trägt man (41) und (40) in die zweite der Kerndarstellungen (35) ein, so ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} K_r(t,x) &= Q_r(t,x) - \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\mathfrak{B}_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \\ &\quad + \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!}\mathfrak{B}_{r-\alpha}\left(\frac{x_\sigma-t}{b-a}\right)L_{\sigma\alpha}(x), \end{aligned}\right. \tag{42}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} Q_r(t,x) &= \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\left[B_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{x-t}{b-a}\right)^{r-1}\right] - \\ &\quad - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!}\left[B_{r-\alpha}\left(\frac{x_\sigma-t}{b-a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r-\alpha}{2}\left(\frac{x_\sigma-t}{b-a}\right)^{r-1-\alpha}\right]L_{\sigma\alpha}(x) \\ &= \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\left\{B_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{x-t}{b-a}\right)^{r-1} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left[B_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{x-t}{b-a}\right)^{r-1}\right]_{x=x_\sigma}L_{\sigma\alpha}(x)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Nun ist nach a) $B_r(u)$ ein Polynom vom Grade r, worin u^r den Koeffizienten 1 hat. $Q_r(t,x)$ ist daher nach (43) ein Polynom in x, das den $n+1$ Bedingungen

$$\left.\frac{\partial^\beta Q_r(t,x)}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_\tau} = 0 \qquad (\tau = 0,\ldots,s;\ \beta = 0,\ldots,\alpha_\tau - 1)$$

genügt und dessen Grad für $r \leq n$ höchstens gleich n und für $r = n+1$ genau gleich $n+1$ ist. Es ist also

$$(44)\quad \begin{cases} Q_r(t,x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad r \leq n \\ Q_{n+1}(t,x) = \dfrac{1}{(n+1)!\,(b-a)}\, x^{n+1} + \cdots = \dfrac{(x-x_0)^{\alpha_0} \ldots (x-x_s)^{\alpha_s}}{(n+1)!\,(b-a)}. \end{cases}$$

Die Zusammenfassung von (42) und (44) ergibt eine Darstellung des Kernes, die im Lagrangeschen Fall und für $a = 0$ und $b = 1$, von einer etwas abweichenden Normierung der Bernoullischen Polynome und der Funktionen $\mathfrak{B}_\varrho(t)$ abgesehen, mit der ersten von Herrn WEGNER[1]) aufgestellten Formel übereinstimmt.

§ 5. Eine allgemeine Quadraturformel.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(45)\quad \int_a^b L_{\sigma\alpha}(x)\,dx = L_{\sigma\alpha} \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1),$$

so ergibt für $k \leq r \leq n+1$ Integration der Formel (33)

$$(46)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} f^{(\alpha)}(x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha} + R_n.$$

In dieser Quadraturformel ist das Restglied nach (35)

$$(47)\quad \begin{cases} R_n = \int_a^b R_n(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, K_r(t,x)\,dt\,dx = (-1)^{r+1} \times \\ \times \left[\int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t,x)\,dt\,dx - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} (-1)^\alpha \int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t,x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\,dt\,dx \right]. \end{cases}$$

Unter den Summenzeichen können wir die Integrationsreihenfolge ohne weiteres vertauschen:

$$\int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t,x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\,dt\,dx = \int_a^b L_{\sigma\alpha}(x) \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t,x_\sigma)\,dt\,dx$$
$$= \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b k_{r-\alpha}(t,x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\,dx\,dt.$$

Die Vertauschung

$$(48)\quad \int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t,x)\,dt\,dx = \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b k_r(t,x)\,dx\,dt$$

bedarf aber bei den geringen Voraussetzungen, die wir machten, einer besonderen Begründung. Wir behandeln zunächst den Fall $r = 1$, wo $k_r(t,x)$ für $t = x$ unstetig ist.

Es ist einerseits

$$\int_a^b f'(t)\, k_1(t,x)\,dt = \tfrac{1}{2} \int_a^x f'(t)\,dt - \tfrac{1}{2} \int_x^b f'(t)\,dt = f(x) - \tfrac{1}{2}\,[f(a) + f(b)]$$

und damit

$$\int_a^b\int_a^b f'(t)\,k_1(t,x)\,dt\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

andererseits

$$\int_a^b f'(t)\,k_1(t,x)\,dx = f'(t)\int_a^b k_1(t,x)\,dx = \frac{1}{2}f'(t)\left[-\int_a^t dx + \int_t^b dx\right]$$

$$= \frac{a+b}{2}f'(t) - t\,f'(t)$$

und damit

$$\int_a^b\int_a^b f'(t)\,k_1(t,x)\,dx\,dt = \frac{a+b}{2}[f(b)-f(a)] - \int_a^b t\,f'(t)\,dt$$

$$= \frac{a+b}{2}[f(b)-f(a)] - b\,f(b) + a\,f(a) + \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)];$$

für $r=1$ ist also (48) richtig.

Nun sei $r>1$. Dann ist $k_r(t,x)$ im Quadrat $a\leq t\leq b$, $a\leq x\leq b$ gleichmäßig stetig. Es sei $\omega(\delta)$ das Stetigkeitsmaß von $k_r(t,x)$ in diesem Quadrat. Es ist

$$\left|\int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,x+h)\,dt - \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,x)\,dt\right| \leq \omega(|h|)\int_a^b |f^{(r)}(t)|\,dt;$$

da hier die rechte Seite gegen 0 strebt, wenn $h\to 0$ geht, ist in

$$F(v) = \int_a^v\int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,x)\,dt\,dx$$

der Integrand des äußeren Integrales eine stetige Funktion von x im Intervall $a\leq x\leq b$, also

$$F'(v) = \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,v)\,dt.$$

Wir betrachten andererseits die Funktion

$$G(v) = \int_a^b\int_a^v f^{(r)}(t)\,k_r(t,x)\,dx\,dt;$$

ihr Differenzenquotient ist

$$\frac{G(v+h)-G(v)}{h} = \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,v+\vartheta h)\,dt \qquad (0<\vartheta<1);$$

also ist

$$\left|\frac{G(v+h)-G(v)}{h} - \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,v)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_a^b f^{(r)}(t)\,[k_r(t,v+\vartheta h)-k_r(t,v)]\,dt\right| \leq \omega(|h|)\int_a^b |f^{(r)}(t)|\,dt;$$

hieraus folgt für $h \to 0$, daß

$$G'(v) = \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t, v)\, dt.$$

Es ist also $F(a) = G(a) = 0$ und $F'(v) = G'(v)$ für $a \leq v \leq b$. Daher ist $F(v) = G(v)$ im ganzen Intervall $a \leq v \leq b$. Für $v = b$ besagt dies insbesondere, daß die Formel (48) gilt.

Nach (47), (48) und (35) ist

$$R_n = (-1)^{r+1} \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b \left[k_r(t, x) - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} (-1)^\alpha k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x) \right] dx\, dt$$

$$= \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b K_r(t, x)\, dx\, dt$$

oder

$$R_n = \int_a^b f^{(r)}(t)\, \Psi_r(t)\, dt. \tag{49}$$

Für die Funktion $\Psi_r(t)$ findet man nach (35), (31) und (22) leicht die Darstellungen

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi_r(t) &= \int_a^b K_r(t, x)\, dx \\ &= (-1)^{r+1} \left[k_{r+1}(t, a) - k_{r+1}(t, b) - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} (-1)^\alpha k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(a-t)^r + (b-t)^r}{r!} - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} L_{\sigma\alpha} \frac{\operatorname{sign}(x_\sigma - t)}{(r-1-\alpha)!} (x_\sigma - t)^{r-1-\alpha} \right], \end{aligned} \right. \tag{50}$$

bzw. nach (42) und (44)

$$\Psi_r(t) = C_r + \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} \frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!} L_{\sigma\alpha}\, \mathfrak{B}_{r-\alpha}\left(\frac{x_\sigma - t}{b-a} \right), \tag{51}$$

wo

$$C_r = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq r \leq n, \qquad C_{n+1} = \int_a^b \frac{(x - x_0)^{\alpha_0} \dots (x - x_s)^{\alpha_s}}{(n+1)!\,(b-a)}\, dx. \tag{52}$$

Die Quadraturformel (46) mit dem Fehlerglied (49) wurde im Lagrangeschen Fall von W. WIRTINGER a. in [3]) a. O. angegeben; WIRTINGER drückte dabei die Funktion $\Psi_r(t)$ durch die Funktionen $\mathfrak{B}_r(t)$ aus. Mit der zweiten der Darstellungen (50) für $\Psi_r(t)$ hat sie auch Herr A. KNESCHKE [10]) unter der Voraussetzung, daß $f^{(r)}(t)$ stetig ist, gefunden.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 19. November 1954.)

MARKUS, L.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 310—319 (1955)

Continuous matrices and the stability of differential systems.

By
LAWRENCE MARKUS.

1. *Kinematic similarity of matrices.* To investigate the stability of differential equations we find the invariants and canonical forms, under the equivalence relation of kinematic similarity, of matrices whose entries vary with time. Let $\mathfrak{M}_n$ be the set of all $n \times n$ matrices whose entries are complex-valued functions of a real variable t (called time), continuous and bounded on a right half-line, say $0 \leq t < \infty$.

Definition. *For $A, B \in \mathfrak{M}_n$ we say $A \sim B$ (read: A is kinematically similar to B) in case there exists a matrix P with P, P^{-1}, and*[1] *$\dot{P} \in \mathfrak{M}_n$ and $-P^{-1}[\dot{P} - AP] = B$ for all $0 \leq t < \infty$. If A, B, and P are real-valued, then A is kinematically similar to B over the real field.*

It is easy to verify that kinematic similarity is an equivalence relation on $\mathfrak{M}_n$. LOEWY [*11*] and JACOBSON [*8*] have studied this relation algebraically without reference to the requirement of boundedness. PERRON [*14*, p. 466] introduced the above definition in his stability theory and showed that every matrix in $\mathfrak{M}_n$ is kinematically equivalent to a triangular matrix. PERRON [*13*, p. 751] refined LIAPOUNOFF's [*10*, p. 255] concept of the characteristic exponents of a matrix in $\mathfrak{M}_n$ and so extended the classical stability theory of differential systems [*9*, Ch. IV and *2*, Ch. II] beyond those special instances where the variational equations had constant or periodic coefficients. CAMERON [*4*] sought conditions to insure that almost periodic linear differential systems have solutions of a certain form; however, his results are quite different from ours. Lately DILIBERTO [*5*] has improved upon the results of PERRON and has shown that the characteristic exponents are invariants of kinematic similarity.

In this paper we clarify the relation between the characteristic exponents of PERRON and the classical stability theories of differential systems by a systematic use of kinematic similarity. For the important class of matrices which are kinematically similar to constant matrices, thus including all periodic matrices [*7* or *9*, p. 68] but not all almost periodic matrices [*5*, p. 26], we compute a complete set of invariants and determine canonical forms which display these invariants.

More practically, for a new class of matrices, we develop explicit estimates for the characteristic exponents and thus we test the LIAPOUNOFF stability

[1] $\dot{P} = dP/dt$. Actually "$\dot{P}$ exists" is equivalent to "$\dot{P} \in \mathfrak{M}_n$" in this definition.

of solutions of certain non-linear differential systems. PERRON [*13*, p. 760] noted that the characteristic exponents do not vary continuously with the coefficient matrix of a linear differential system and thus their exact values are difficult to determine. In fact, unless A is constant or else its diagonal entries are dominant in a certain special sense [*13*, p. 762], there seems to be little known for estimating the characteristic exponents.

For an intuitive appreciation of the significance of kinematic similarity consider a homogeneous linear system of n ordinary differential equations $\dot{X} = AX$ where $A \in \mathfrak{M}_n$ and $X(t)$ is a solution (column) vector in E_c^n (complex Euclidean n-space), differentiable and satisfying the differential equation for each $0 \leq t < \infty$. Such systems arise as variational equations, based on a bounded solution, of a non-linear differential system in E^n, see theorem 4 below.

To study the geometric behavior of a solution curve $X(t)$, one effects a non-singular linear coordinate change $Y = P^{-1}X$ with $P \in \mathfrak{M}_n$. Then the transformed equation, that is, the equation which has the same solution curves in E_c^n, is $\dot{Y} = BY$ where $B = -P^{-1}[\dot{P} - AP]$. Thus $A \sim B$ if and only if they are coefficients of the same differential system which is referred to two coordinate systems in E_c^n.

If $Y = P_0^{-1}X$, where P_0 is a constant matrix, then $-P_0^{-1}[\dot{P}_0 - AP_0] = P_0^{-1}AP_0 = B$ and thus the algebraic relation of similarity, which we shall call static similarity, is a special case of kinematic similarity. However, as we shall later see, there are even constant matrices which are kinematically, though not statically, similar.

The geometric significance of allowing P to vary with time t is that the new coordinates Y can be moving relative to the original coordinates $X = PY$. If one does not require P and P^{-1} to be bounded, then every matrix $A \in \mathfrak{M}_n$ can be transformed into the zero matrix by merely taking P as a non-singular solution matrix of $\dot{P} = AP$. This is not surprising since it only states that, as referred to axes affixed to the solution vectors of $\dot{X} = AX$, the relative velocity is zero. However, we demand P and $P^{-1} \in \mathfrak{M}_n$ so that the coordinate transformations preserve the uniform structure of E_c^n, for all $0 \leq t < \infty$. In this case stability has an invariant meaning.

The most interesting case is when $A \in \mathfrak{M}_n$ is kinematically similar to a constant matrix C. Here the solutions of $\dot{X} = AX$ are just linear combinations, with bounded continuous coefficients, of the solutions of $\dot{Y} = CY$. Thus the real parts of the characteristic roots of C govern the asymptotic growth of the solutions $X(t)$, and thereby the stability of $\dot{X} = AX$, about the origin.

2. *Characteristic exponents and other invariants.* Following PERRON we define the (generalized) characteristic exponents.

Definition. *Let $\dot{X} = AX$ where $A \in \mathfrak{M}_n$. For each non-zero solution vector $X_\alpha(t)$ define a characteristic exponent of A by* $\limsup_{t \to \infty} t^{-1} \log |X_\alpha(t)| = \lambda_\alpha$.

Here we take the norm of a vector (or of a matrix) as the maximum of the absolute values of its components. PERRON [13, p. 750] showed that the real numbers λ_α are bounded, in fact, $|\lambda_\alpha| \leq n \sup_{0 \leq t < \infty} |A|$. Moreover, there are at most n distinct characteristic exponents of A.

Definition. *Let $\dot{X} = AX$ where $A \in \mathfrak{M}_n$. For each solution vector $X(t)$ with characteristic exponent λ define a type of A as $\nu(\lambda, X(t)) = \nu(\lambda) = \limsup_{t \to \infty} \log |X(t)\, e^{-\lambda t}| / \log t$.*

Solutions of different type are linearly independent and so there are only a finite number of types for each characteristic exponent of $A \in \mathfrak{M}_n$. Let $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \leq \lambda_k$ be the distinct characteristic exponents of A and let $\nu_{11} < \nu_{12} < \cdots$; $\nu_{21} < \nu_{22} < \cdots$; $\cdots$; $\nu_{k1} < \nu_{k2} < \cdots$ be corresponding types with ν_{ij} belonging to λ_i for $i = 1, 2, \ldots, k$.

The set of all solution vectors of $\dot{X} = AX$ with characteristic exponents $\lambda \leq \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, forms a linear space called $E(\lambda_i)$. Moreover $E(\lambda_{i-1})$ is properly included in $E(\lambda_i)$ and we make the convention $E(\lambda_0) = 0$. Furthermore for any two solution vectors in the set difference $E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1})$, which differ only by a solution in $E(\lambda_{i-1})$, the type is the same. Thus one can define the type of a coset in the factor space $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$, taking the identity coset to have zero type. The collection of cosets of $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$ whose type $\nu \leq \nu_{ij}$ is a linear subspace of $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$ called $T(\lambda_i, \nu_{ij})$. Again we agree that $T(\lambda_i, \nu_{i0}) = 0$.

Definition. *Let $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ be the distinct characteristic exponents of $A \in \mathfrak{M}_n$ with corresponding types $\nu_{11} < \nu_{12} < \cdots$; $\nu_{21} < \nu_{22} < \cdots$; $\cdots$; $\nu_{k1} < \nu_{k2} < \cdots$. The multiplicity of λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, is $m(\lambda_i) = \dim E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$. The multiplicity of ν_{ij} is $m(\nu_{ij}) = \dim T(\lambda_i, \nu_{ij})/T(\lambda_i, \nu_{i,j-1})$.*

Theorem 1. *The characteristic exponents λ_i of $A \in \mathfrak{M}_n$, their types ν_{ij}, and the multiplicities $m(\lambda_i)$ and $m(\nu_{ij})$ are invariants of kinematic similarity.*

Proof. Let $-P^{-1}[\dot{P} - AP] = B$ define the kinematic similarity $A \sim B$ and consider the isomorphism $X(t) \to Y(t) = P^{-1}X(t)$ of the solution space of $\dot{X} = AX$ onto that of $\dot{Y} = BY$. Since P and P^{-1} are in $\mathfrak{M}_n$, corresponding solutions $X(t)$ and $Y(t)$ have the same characteristic exponents and the same types. Therefore, using the isomorphism, we show that the numbers $\lambda_i, \nu_{ij}, m(\lambda_i), m(\nu_{ij})$ are the same for A and B. Q. E. D.

Each constant $n \times n$ matrix A_0 is statically, and thereby kinematically, similar to a Jordan matrix $A_J = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Here each square block $A_i = \operatorname{diag}\{A_{i1}, \ldots, A_{ip_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ and each square (elementary divisor) block $A_{ir} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$, $r = 1, 2, \ldots, p_i$, where the complex numbers λ_i are the characteristic roots of A_0. We arrange an order of the blocks A_{ir} down the principal diagonal of A_J (say, first by increasing $|\lambda_i|$, second by increasing $\operatorname{Arg} \lambda_i$, and third by $\dim A_{ir}$) and then the Jordan matrix A_J which is statically similar to A_0 is unique.

We shall introduce real Jordan matrices as canonical forms for a subclass of $\mathfrak{M}_n$, including all constant and periodic matrices.

Lemma. *Let A_J and B_J be real, constant, Jordan matrices. If $A_J \sim B_J$, then $A_J = B_J$.*

Proof. We need only verify that the invariants λ_i, ν_{ij}, $m(\lambda_i)$, and $m(\nu_{ij})$ characterize a real Jordan matrix A_J. But the characteristic roots of A_J are exactly its characteristic exponents λ_i. Also, using the above notation for A_J, $\dim A_i = m(\lambda_i)$. Now $A_i = \operatorname{diag}\{A_{i1}, \ldots, A_{ip_i}\}$ and the dimensions of the blocks A_{ir}, $r = 1, 2, \ldots, p_i$, are determined by the types ν_{ij}. In fact, the number of blocks of A_{ir} of dimension $\geq \nu_{ij} + 1$ is exactly $m(\nu_{ij})$. Thus the total structure of A_J is determined by the λ_i, ν_{ij}, $m(\lambda_i)$, $m(\nu_{ij})$ as is required. Q. E. D.

Theorem 2. *For the subclass of matrices in $\mathfrak{M}_n$ which are kinematically similar to constant matrices, the invariants consisting of characteristic exponents λ_i, types ν_{ij}, and their multiplicities $m(\lambda_i)$ and $m(\nu_{ij})$ form a complete set of invariants. Furthermore if $A \sim C$, for $A \in \mathfrak{M}_n$ and C a constant matrix, then there exists a unique real constant Jordan matrix $A_J \sim A$ which displays the invariants of A.*

Proof. The above lemma proves the uniqueness of A_J. From the existence of A_J it also follows that the invariants λ_i, ν_{ij}, $m(\lambda_i)$, $m(\nu_{ij})$ form a complete set. To show the existence of A_J we can assume that C is a complex Jordan matrix and show that C is kinematically similar to a real Jordan matrix. In fact, it is sufficient to show that, for each elementary divisor block,

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi & 1 & & 0 \\ & \xi & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \xi \end{pmatrix} = A_{ij}$$

where $\lambda = \xi + i\eta$. Then define $\Pi_{ij} = e^{i\eta t}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Direct calculation shows that $-\Pi_{ij}^{-1}[\dot{\Pi}_{ij} - C_{ij}\Pi_{ij}] = A_{ij}$ which yields the required reduction. Q. E. D.

Thus the unique canonical form A_J for A is obtained by taking a complex Jordan matrix $C \sim A$ and then eradicating the imaginary parts of the characteristic roots of C. Thus if A is, for example, a periodic matrix, its characteristic exponents can be realized as the characteristic roots of the unique, real, Jordan matrix $A_J \sim A$.

Corollary. *If $A \sim C$ over the real field, where $A \in \mathfrak{M}_n$ and C is a constant matrix, then $A \sim A_J$ over the real field.*

Proof. We can assume that C is in a classical (static similarity) normal form for real matrices. In fact, we need only study elementary divisor blocks

$$C_{ij}^R = \begin{pmatrix} \Lambda_i & I_2 & & 0 \\ & \Lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & \Lambda_i \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_i & -b_i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and the corresponding elementary divisor is a power of $(x^2+b_ix+c_i)$ with $\Delta_i=1/2(4c_i-b_i^2)^{\frac{1}{2}}>0$.

Define $\Pi_i'=\begin{pmatrix} \cos\Delta_i t & \sin\Delta_i t \\ -\frac{b_i}{2}\cos\Delta_i t-\Delta_i\sin\Delta_i t & -\frac{b_i}{2}\sin\Delta_i t+\Delta_i\cos\Delta_i t\end{pmatrix}$ and let $\Pi_i=\operatorname{diag}\{\Pi_i', \ldots, \Pi_i'\}$ so that Π_i has the same dimension as C_{ij}^R. Then one calculates

$$-\Pi_i^{-1}[\dot{\Pi}_i-C_{ij}^R\Pi_i]=\begin{pmatrix} \Xi_i & I_2 & & 0\\ & \Xi_i & I_2 & \\ & & \ddots & I_2\\ 0 & & & \Xi_i\end{pmatrix} \quad \text{where} \quad \Xi_i=-\frac{b_i}{2}I_2.$$

But by the classical theory of real elementary divisors, $-\Pi_i^{-1}[\dot{\Pi}_i-C_{ij}^R\Pi_i]$ is statically similar, over the real field, to $\operatorname{diag}\{A_{ij}, A_{ij}\}$ where

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} -\frac{b_i}{2} & 1 & & 0\\ & -\frac{b_i}{2} & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & -\frac{b_i}{2}\end{pmatrix}.$$ Therefore $A\sim A_J$ over the real field. Q. E. D.

Various authors [2, p. 25; 5, p. 2; 14, p. 466] have investigated canonical forms other than the real, constant Jordan form. The next theorem shows that for matrices $A\in\mathfrak{M}_n$ which have a real, constant, Jordan form A_J, A is diagonalizable in $\mathfrak{M}_n$ only in case A_J is already diagonal.

Theorem 3. *Let $A\sim A_J$ where $A\in\mathfrak{M}_n$ and A_J is its real, constant Jordan form. Then there exists a diagonal matrix $D\in\mathfrak{M}_n$ such that $A\sim D$ if and only if A_J is diagonal.*

Proof. Of course we need only show that $A\sim D$ implies that A_J is diagonal. We suppose the contrary and consider the special case where $A_J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$ consists of only one elementary divisor block. Using $P=(p_{ij})$ and $D=\operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ and the equation $\dot{P}=A_JP-PD$ we have:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{11} &= \lambda p_{11}+p_{21}-p_{11}d_1\\
\dot{p}_{12} &= \lambda p_{12}+p_{22}-p_{12}d_2\\
&\vdots\\
\dot{p}_{1n} &= \lambda p_{1n}+p_{2n}-{}_{1n}d_n;\\
\dot{p}_{21} &= \lambda p_{21}+p_{31}-p_{21}d_1\\
&\vdots\\
\dot{p}_{2n} &= \lambda p_{2n}+p_{3n}-p_{2n}d_n;\\
&\vdots\\
\dot{p}_{n1} &= \lambda p_{n1}-p_{n1}d_1\\
\dot{p}_{n2} &= \lambda p_{n2}-p_{n2}d_2\\
&\vdots\\
\dot{p}_{nn} &= \lambda p_{nn}-p_{nn}d_n.
\end{aligned}$$

If $d_1 = \lambda$, then $p_{n1} = 0$ and $p_{n1} = c_{n1}$ is a constant. But then $\dot{p}_{n-1,1} = \lambda p_{n-1,n} + p_{n1} - p_{n-1,1} d_1 = c_{n1}$ and $p_{n-1,1} = c_{n1} t + c_{n-1,1}$. Since all the $p_{ij}(t)$ are bounded, $p_{n1} \equiv 0$.

If $d_1 \not\equiv \lambda$, then $p_{n1} = c_{n1} \exp \int_0^t (\lambda - d_1)\, ds$. Then $p_{n-1,1} = c_{n1} t \exp \int_0^t (\lambda - d_1)\, ds + c_{n1}\, c_{n-1,1} \exp \int_0^t (\lambda - d_1)\, ds$ and $\int_0^t (\lambda - d_1)\, ds \to -\infty$ as $t \to \infty$. But then $p_{n1} \to 0$ as $t \to \infty$. Thus in either case, $\lim_{t\to\infty} p_{n1}(t) = 0$.

Similar reasoning, using d_j, shows that $\lim_{t\to\infty} p_{nj}(t) = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. But then $\lim_{t\to\infty} \det \mathcal{P} = 0$. This requires that $\lim_{t\to\infty} |\det \mathcal{P}^{-1}| = \infty$ which is impossible since $\mathcal{P}^{-1} \in \mathfrak{M}_n$. Therefore the supposition that $\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{A}_J \mathcal{P} - \mathcal{P} D$ where $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1} \in \mathfrak{M}_n$ leads to a contradiction.

Now in the general case let $\mathcal{A}_J$ contain several (non-diagonal) elementary divisor blocks. The differential equations for the elements (p_{ij}) lying in the first m rows (say, the first block of $\mathcal{A}_J$ has m rows) are exactly the same as those given above, except the last set reads:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{m1} &= \lambda p_{m1} - p_{m1} d_1 \\ &\vdots \\ \dot{p}_{mn} &= \lambda p_{mn} - p_{mn} d_n . \end{aligned}$$

Again we conclude $\lim_{t\to\infty} p_{mj}(t) = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$. Again this requires $\lim_{t\to\infty} \det \mathcal{P} = 0$ which is impossible.

Therefore we must have only diagonal blocks in $\mathcal{A}_J$. Q. E. D.

As a special instance of the above theorem we note that if $D \in \mathfrak{M}_n$ is diagonal and $D \sim C$, a constant matrix, then the unique real Jordan form for D is diagonal.

3. *Stability of non-linear differential systems.* Let $\dot{u}^i = f^i(u)$ be a differential system with n real-valued functions $f^i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ of class $C^{(2)}$ in a region O of Euclidean n-space E^n. Let $u^i = \varphi^i(t)$ be a solution, lying in a bounded subregion K, with $\bar{K} \subset O$, for all $0 \leq t < \infty$, and consider the LIAPOUNOFF stability of this solution. Here a nearby $u(t)$, lying in $K \subset O$ for $0 \leq t < t_1 \leq \infty$, differs from the base solution $\varphi(t)$ by $x^i(t) = u^i(t) - \varphi^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Furthermore $\dot{x}^i = \partial f^i / \partial u^j \left(\varphi(t)\right) x^j + \partial^2 f^i / \partial u^j \partial u^k \left(\varphi(t) + \varepsilon(t)\right) x^j x^k$ where $\varphi(t) + \varepsilon(t)$ is some point on the line segment joining $\varphi(t)$ to $u(t)$. Therefore $\dot{x}^i = J^i_j(t)\, x^j + B^i_{jk}(t)\, x^j x^k$ where $\mathfrak{J}(t)$ and $B(t)$ are continuous and bounded on $0 \leq t < t_2 \leq t_1$. We seek conditions on $\mathfrak{J}(t)$ which insure that every solution $x(t)$, with sufficiently small initial values $|x(0)|$ will be defined for $0 \leq t < \infty$ and will approach the origin as $t \to \infty$ (or will, at least, remain small). In this case the solution $\varphi(t)$ of the non-linear system is called stable. The obvious conjecture that "if the characteristic exponents of $\mathfrak{J}(t)$ are negative, then the non-linear system is stable at $\varphi(t)$" is known to be false [*15*, p. 705].

Theorem 4. *Let* $\dot{x}^i = J_j^i(t)\,x^j + F^i(t, x)$ *where* $J(t) \in \mathfrak{M}_n$ *and* $F(t, x) \in C^{(1)}$ *for* $0 \leq t < \infty$ *and* $|x| < \varepsilon$, *for* $\varepsilon > 0$ *and* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Also assume*

$$\lim_{|x| \to 0} |F(x, t)|/|x| = 0$$

uniformly on $0 \leq t < \infty$ *and assume that* $J(t)$ *is kinematically similar to a constant matrix and has negative characteristic exponents. Then there exists* $\delta > 0$ *such that if* $|x(0)| < \delta$, *the solution* $x(t)$ *is defined for all* $0 \leq t < \infty$ *with* $|x(t)| < \varepsilon$ *and furthermore* $\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$.

Proof. Let $Y = P^{-1}X$ (or $y^i = \varrho_j^i x^j$ or $x^i = p_j^i y^j$) be a coordinate change in E^n such that $P, P^{-1}, \dot{P} \in \mathfrak{M}_n$ and $-P^{-1}[\dot{P} - JP] = C$ a real, constant, Jordan matrix which has negative characteristic roots. The transformed differential equations are $\dot{y}^i = C_j^i y^j + \varrho_j^i(t)\, F^j(t, p_m^e y^m)$. Let $G^i(t, y^e) = \varrho_j^i(t)\, F^j(t, p_m^e y^m)$ which is in $C^{(1)}$ for $0 \leq t < \infty$ and $|y| < \varepsilon_1 = \varepsilon/A$ where $0 < \alpha < |P(t)| < A$ for $t \geq 0$. Also

$$\lim_{|y| \to 0} |G(t, y)|/|y| = \lim_{|x| \to 0} |\varrho_j^i(t)\, F^j(t, x)|/|\varrho_j^i(t)\, x^j| = 0.$$

Then by a standard stability theorem [*1*, p. 358], there exists $\delta_1 > 0$ such that for $|y(0)| < \delta_1$, the solution $y(t)$ is defined for all $0 \leq t < \infty$ with $|y(t)| < \varepsilon_1$ and $\lim_{t \to \infty} |y(t)| = 0$. However, this means that for $|x(0)| < \delta_1 \alpha = \delta$, $|x(t)| < \varepsilon_1 A = \varepsilon$ for all $0 \leq t < \infty$ and $\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$. Q. E. D.

Because of the importance of the concept of stability, it is of interest to give estimates for the characteristic exponents of matrices $A \in \mathfrak{M}_n$. We do this, in the next section, for certain special kinds of matrices.

4. *Estimates for characteristic exponents.* If the matrices arising in the solution of a system of n homogeneous, linear, differential equations commute, then the system behaves essentially as if $n = 1$. The next theorem, whose hypotheses are fulfilled, for example, by a diagonal matrix $A = D \in \mathfrak{M}_n$, illustrates this principle.

Theorem 5. *Let* $A \in \mathfrak{M}_n$ *commute with* $\int_0^t A(s)\, ds$ *for each* $0 \leq t < \infty$. *Assume* $A = A_p + A_0$ *where* A_0 *is constant and commutes with both* A *and* $\int_0^t A(s)\, ds$. *Suppose* $\int_0^t A_p(s)\, ds \in \mathfrak{M}_n$. *Then* $A \sim A_0$ *and* $A_0 = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^t A(s)\, ds$.

Proof. We first establish certain commutation results. Now

$$A_p \int_0^t A_p\, ds = (A - A_0)\left(\int_0^t A\, ds - \int_0^t A_0\, ds\right) = \left(\int_0^t A\, ds - \int_0^t A_0\, ds\right)(A - A_0) = \left(\int_0^t A_p\, ds\right) A_p.$$

A similar calculation shows that A_0 and $\int_0^t A_p\, ds$ commute.

Let $P = \exp \int_0^t A_p\, ds$. One easily computes $-P^{-1}[\dot{P} - AP] = A_0$. Since $\left|\int_0^t A_p\, ds\right| \leq M$, for some constant M, $e^{-M} \leq |P| \leq e^M$. Thus both P and $P^{-1} \in \mathfrak{M}_n$ and clearly $P \in C^{(1)}$. Therefore $A \sim A_0$ as required.

Also A_0 is the mean value of A in the following sense:

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t A\,ds = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\left(\int_0^t A_p\,ds + A_0 t\right) = A_0. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Corollary. *Let $A\in\mathfrak{M}_n$ be almost periodic and let A, $\int_0^t A\,ds$, and A_0 all commute for each $0\leq t<\infty$ where $A_0=\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t A(s)\,ds$. If $\int_0^t (A-A_0)\,ds\in\mathfrak{M}_n$, then $A\sim A_0$. Moreover the transformation matrix P is almost periodic.*

Proof. Immediate, cf. [5, p. 21—25].

Corollary. *Let $A\in\mathfrak{M}_n$ be almost periodic and commute with $\int_0^t A\,ds$ for each $0\leq t<\infty$. Assume A has an absolutely convergent Fourier series whose characteristic frequencies are bounded away from zero. Then $A\sim A_0=0$ by an almost periodic matrix P.*

Proof. Now $\int_0^t A\,ds$ is bounded and thus almost periodic. Since

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t A\,ds = 0,$$

the result follows from the theorem. Q. E. D.

We next investigate a relation between the characteristic exponents of $A\in\mathfrak{M}_n$ and the averages of the characteristic roots of $A(t)$ for each fixed value of t. We restrict our attention to matrices for which each $A(t)$ is normal ($AA^*=A^*A$), that is, statically similar, by unitary transformation, to a complex diagonal matrix.

Theorem 6. *Let $A\in\mathfrak{M}_n$ be normal for each fixed t on $0\leq t<\infty$. Let $M(t)$ be the maximum of the real parts of the characteristic roots of $A(t)$ and $m(t)$ be the minimum of these real parts. Then*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t m(s)\,ds \leq \lambda_i \leq \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds,$$

where the λ_i are the characteristic exponents of A.

Proof. By the theory of perturbation of the spectrum, we know that $M(t)$ and $m(t)$ are real, continuous, bounded functions on $0\leq t<\infty$.

Now the radial velocity along any solution $X(t)$ of $\dot{X}=AX$ is

$$\dot{r} = (X^*A^*X + X^*AX)\,r\,(2\,\|X\|^2)^{-1} \quad \text{where} \quad r^2 = X^*X = \|X\|^2.$$

Since $A(t)$ is normal for each $t\geq 0$,

$$m(t) \leq (X^*A^*X + X^*AX)/2\,\|X\|^2 \leq M(t).$$

Thus along $X(t)$, $m(t)\leq \dot{r}/r \leq M(t)$. Therefore

$$\int_0^t m(s)\,ds \leq \log r(t) - \log r(0) \leq \int_0^t M(s)\,ds.$$

Now

$$\lambda = \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log|X(t)| = \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log r.$$

Therefore

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t m(s)\,ds \leq \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log r \leq \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds,$$

which proves the theorem. Q. E. D.

It may be remarked that if $\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds < 0$, then every solution of $\dot{X} = XA$, under the assumptions of the theorem, approaches the origin as $t\to\infty$.

Corollary. *Let $A\in\mathfrak{M}_n$ be normal for each fixed $t\geq 0$ and let A be almost periodic or have period $T>0$. Then $M(t)$ and $m(t)$ are also almost periodic, or have period T, respectively, and*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t m(s) \leq \lambda_i \leq \lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds.$$

Proof. Let A have period $T>0$. Then clearly both $M(t)$ and $m(t)$ have period T.

Suppose A is almost periodic. Then for each $\delta>0$, there are $L(\delta)$-dense approximate periods τ_α such that $|A(t)-A(t+\tau_\alpha)|<\delta$ for $-\infty<t<\infty$. Since $|A(t)|$ is bounded, one can choose δ so small that $|M(t)-M(t+\tau_\alpha)|<\varepsilon$ and $|m(t)-m(t+\tau_\alpha)|<\varepsilon$ for a preassigned $\varepsilon>0$ and all $-\infty<t<\infty$. Thus both $M(t)$ and $m(t)$ are almost periodic.

Therefore the limits designated in the conclusion of the corollary do exist and the result follows from the theorem. Q. E. D.

We conclude with an example to show that if $A(t)$ is not normal, then the conclusions of theorem 6 are not valid.

Example. Consider $\dot{X} = AX$ where

$$A = \begin{pmatrix} 1+\cos^2 t & 1-\sin t\cos t \\ -1-\sin t\cos t & 1+\sin^2 t \end{pmatrix},$$

A solution matrix is

$$X = \begin{pmatrix} e^t\sin t & -e^{2t}\cos t \\ e^t\cos t & e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$

and the characteristic exponents of A are $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. For each fixed t_0 on $0\leq t<\infty$, the characteristic roots of $A(t_0)$ have real parts with $m(t_0)=\frac{3}{2}$, $M(t_0)=\frac{3}{2}$. But these do not satisfy the inequalities of theorem 6.

Bibliography.

[1] BELLMAN, R.: On the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations. Trans. Amer. Math. Soc. **62**, 357—386 (1947). — [2] BELLMAN, R.: Stability theory of differential equations. New York 1953. — [3] BOHR, H., and O. NEUGEBAUER: Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodische rechte Seite. Nachr. Göttingen 8—22 (1926). — [4] CAMERON, R.: Linear

differential equations with almost periodic coefficients. Acta math., Stockh. **69**, 21—56 (1938). — [*5*] DILIBERTO, S.: On systems of ordinary differential equations. Contributions to the theory of non-linear oscillations, p. 1—38. 1950. — [*6*] FAVARD, J.: Lecons sur les fonctions presque-périodique, Ch. 3. Paris 1933. — [*7*] FLOQUET, G.: Sur les équations différentielles linéares à coefficients périodique. Ann. de l'Ecole Normal Supp. **12**, 47—88 (1883). — [*8*] JACOBSON, N.: Pseudo-linear transformations. Ann. of Math. **38**, 484—507 (1937). — [*9*] LEFSCHETZ, S.: Lectures on differential equations. Princeton 1946. — [*10*] LIAPOUNOFF, A.: Problème général de la stabilité du mouvement. Reprinted by Princeton 1949. — [*11*] LOEWY, H.: Über Matrizen und Differentialkomplexe. Math. Ann. **78**, 1—51 (1918). — [*12*] MASSERA, J.: Existence of periodic solutions. Duke Math. J. **17**, 457—475 (1950). — [*13*] PERRON, O.: Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme. Math. Z. **31**, 748—766 (1930). — [*14*] PERRON, O.: Über eine Matrixtransformation. Math. Z. **32**, 465—473 (1930). — [*15*] PERRON, O.: Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Z. **32**, 703—728 (1930). — [*16*] WAZEWSKI, T.: Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues. Composito mathematica **2**, 63—68 (1935). — [*17*] WINTNER, A.: A criterion for stable characteristic exponents. Quart. Appl. Math. **5**, 232—237 (1947). — [*18*] WINTNER, A., and C. R. PUTNAM: Linear differential equations with almost periodic or Laplace transform coefficients. Amer. J. Math. **73**, 792—806 (1951).

Dept. of Math., Yale University, New Haven, Conn. (USA.).

(Eingegangen am 31. Januar 1955.)

DJERASIMOVIĆ, B.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 320—329 (1955)

Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche.

Von
BOŽIDAR DJERASIMOVIĆ.

I. Einleitung.

1. In dieser Arbeit wollen wir versuchen, eine neue Symbolik in die Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche einzuführen. Durch diese neue Symbolik erreicht man zunächst eine kürzere und übersichtlichere Schreib- und Beweisweise, bekommt aber auch oft allgemeinere Formeln. Besonders wird durch diese neue Symbolik eine Möglichkeit gewonnen, gewisse Veränderungen an einzelnen unvollständigen Quotienten oder an ihrer Folge auszudrücken, welche sonst schwer oder überhaupt nicht durch Zähler und Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche auszudrücken wären.

Zuerst wird die bereits erwähnte Symbolik dargelegt, danach wollen wir mit ihrer Hilfe die bekannten Formeln aus der Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche ausdrücken, um schließlich auch gewisse neue durch diese Symbolik gewonnene Resultate zu gewinnen.

II. Bezeichnungen und Operationen.

2. Nach FROBENIUS [1] wollen wir einen geordneten Komplex $a_1 a_2 \dots a_m$ der Größen oder Symbole mit einem großen lateinischen Buchstaben bezeichnen:

$$A = a_1 a_2 \dots a_{m-1} a_m.$$

Ist ferner $B = b_1 b_2 \dots b_n$, dann ist

$$a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n = AB.$$

Für diese Symbole gilt nicht das Kommutativ-, aber das Assoziativgesetz

$$\{AB\}C = A\{BC\}.$$

Demnach ist der Sinn der Potenz $A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k\,\text{mal}}$ sowie des Ausdrucks $A^k B^l C^m \dots$ eindeutig bestimmt. Ebenso wollen wir, wenn a eine einzige Zahl ist, den Komplex $\underbrace{a\,a \dots a}_{k\,\text{mal}}$ mit $\{a\}^k$ oder mit a^k bezeichnen. Führen wir auch den Begriff des leeren Komplexes ein, den wir mit V bezeichnen werden, so ist $A^0 = V$, $a^0 = V$.

3. Wir definieren drei Operationen, welche an einem geordneten Komplex $A = a_1 a_2 \dots a_m$ durchgeführt werden können, wobei wir berücksichtigen, daß

in unserem Fall $a_1, a_2, \ldots, a_m$ unvollständige Quotienten eines regelmäßigen Kettenbruchs sind — also natürliche Zahlen. Das sind:

1. Inversion:

$$\underline{A} = a_m a_{m-1} \ldots a_3 a_2 a_1, \qquad (m \geq 0).$$

So z.B.:

$$\underline{\{ABC\}} = \underline{C}\,\underline{B}\,\underline{A}, \quad \underline{\{ab\}} = ba, \quad \underline{\{a\}} = a.$$

2. Weglassen der ersten oder der letzten Glieder:

$$\begin{array}{l|l} {}'A = a_2 a_3 \ldots a_m & A' = a_1 a_2 \ldots a_{m-1} \\ {}''A = a_3 a_4 \ldots a_m & A'' = a_1 a_2 \ldots a_{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ {}^{(k)}A = a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_m & A^{(k)} = a_1 a_2 \ldots a_{m-k} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

wo $k \leq m$ ist. So z.B.:

$$\{a\}' = V, \quad {}^{(m)}A = V, \quad \{AB\}' = AB'.$$

3. Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt:

$${}^*A = \left.\begin{matrix} 1 + a_2 \\ 1, a_1 - 1, a_2 \end{matrix}\right\} a_3 a_4 \ldots a_m \qquad \begin{matrix} (\text{bei } a_1 = 1) \\ (\text{bei } a_1 \geq 2), \end{matrix}$$

$$A^* = a_1 a_2 \ldots a_{m-2} \begin{cases} a_{m-1} + 1 & (\text{bei } a_m = 1) \\ a_{m-1}, a_m - 1, 1 & (\text{bei } a_m \geq 2), \end{cases}$$

wo $m \geq 2$ oder $m = 1$, $a_1 > 1$ ist. So z.B.:

$${}^*\{AB\} = {}^*AB; \qquad \{A^*\}^* = A;$$

$${}^*\{a\} = 1,\ a - 1, \quad \{a\}^* = a - 1,\ 1, \quad (a \geq 2).$$

Wie man sieht, sind die eingeführten Operationen untereinander nicht vertauschbar, daher bestimmen wir die Reihenfolge dieser Operationen durch die folgende Regel.

Sind an einem geordneten Komplex mehr Operationen angedeutet, so soll zuerst die Operation der Inversion ausgeführt werden, dann die übrigen zwei, und zwar — wenn sie auf derselben Seite sind — zuerst diejenige, deren Zeichen (* oder ') *dem den Komplex bezeichnenden Buchstaben näher ist. Sind diese Operationen auf verschiedenen Seiten, beeinflussen sie einander nicht.*

So z.B.:

$$\underline{A}^* = \underline{\{A\}^*}, \quad {}'\underline{A} = \underline{'\{A\}}, \quad \underline{\{'A^*\}} = {}^*\underline{A'},$$

$$A^{*\prime} = \{A^*\}', \quad {}^{*\prime}A = {}^*\{'A\}.$$

4. Zum Schreiben des regelmäßigen Kettenbruchs wollen wir das bekannte Symbol:

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots) = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ddots$$

benützen. Außerdem wollen wir das ebenfalls bekannte Symbol $[a_1 a_2 \dots a_m]$ für die durch die Gleichung

$$(1) \qquad (a_1 a_2 \dots a_m) = \frac{[a_1 a_2 \dots a_m]}{[a_2 a_3 \dots a_m]}$$

definierte Eulersche Funktion anwenden.

III. Einige Formeln aus der Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche.

5. Es seien

$$A = a_1 a_2 \dots a_m, \quad B = b_1 b_2 \dots b_n, \quad C = c_1 c_2 \dots c_p$$

geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen. Dann folgen aus der Definition der eingeführten Operationen und aus den bekannten Eigenschaften der Symbole $(a_1 a_2 \dots a_m)$ und $[a_1 a_2 \dots a_m]$ die Identitäten:

$$(2) \qquad [\underline{A}] = [A], \qquad (m \geq 0),$$

(PERRON [2], § 11, I);

$$(3) \qquad (A^*) = (A), \quad \text{aber} \quad ({}^*A) \neq (A),$$

$$(4) \qquad [{}^*A] = [A], \quad [A^*] = [A], \qquad (m \geq 2 \quad \text{oder} \quad m = 1, \ a_1 \geq 2).$$

(PERRON [2], § 9, III);

$$(5) \qquad (A) = \frac{[A]}{['A]}, \quad (\underline{A}) = \frac{[A]}{[A']}, \qquad (m \geq 1).$$

Die bekannten Rekursionsformeln erhalten die Gestalt:

$$(6) \qquad [A] = a_m [A'] + [A''], \qquad (m \geq 1),$$

mit

$$(7) \qquad [V] = 1, \quad ['V] = [V'] = 0,$$

(PERRON [2], § 9, Formeln (6) und (7));

$$(8) \qquad [AB] = [A][B] + [A']['B], \qquad (m \geq 0, \ n \geq 0),$$

(PERRON [2], § 5, (4));

$$(9) \qquad [B][ABC] = [AB][BC] + (-1)^n [A']['C], \qquad (m, n, p \geq 0),$$

(PERRON [2], § 6, (7));

$$(10) \qquad [A]['A'] - ['A][A'] = (-1)^m, \qquad (m \geq 1),$$

(PERRON [2], § 6, (1));

$$(11) \qquad (AB) - (A) = \frac{(-1)^{m-1}['B]}{['AB]['A]}, \qquad (m \geq 1, \ n \geq 0),$$

(PERRON [2], § 6, (4)).

6. Ist $S = \underline{S}$, dann ist der geordnete Komplex

$$S = a_1 a_2 \dots a_2 a_1$$

symmetrisch. Die symmetrischen Komplexe mit gerader bzw. ungerader Gliederzahl können in der folgenden Gestalt geschrieben werden: $\underline{A}A$ und

$\underline{A}aA$, wo A irgendein geordneter Komplex der natürlichen Zahlen, und a eine natürliche Zahl ist. Durch die unmittelbare Anwendung der Formel (8) bekommt man die bekannten Formeln:

$$[\underline{A}A] = [A]^2 + [{}'A]^2,$$

$$[\underline{A}\,a\,A] = [A]\{[aA] + [{}'A]\},$$

weil:

$$[\underline{A}] = [A], \quad [\underline{A}'] = [{}'A], \quad [\underline{A}a] = [aA].$$

(PERRON [2], § 11, Formeln (7), (9), (11) und (13).)

7. Ist $A = a_1 a_2 \dots a_m$ irgendein geordneter Komplex der natürlichen Zahlen mit endlicher oder unendlicher Gliederzahl ($m \geq 2$ oder $m = 1$, $a_1 \geq 2$), dann gilt die Identität:

$$(0A) + (0\,{}^*A) = 1, \tag{12}$$

welche man auch in den folgenden Gestalten schreiben kann:

$$-(0A) = (-1, {}^*A), \tag{13}$$

$$[{}'{}^*A] = [A] - [{}'A], \tag{14}$$

$$[A^{*\prime}] = [A] - [A']. \tag{15}$$

Beweis. Beginnt der Komplex A mit dem Glied $a_1 = 1$ oder $a_1 > 1$, so hat die linke Seite der Gl. (12) folgende Gestalt:

$$(0, 1, a-1, B) + (0, a, B), \tag{16}$$

wo $a \geq 2$ eine natürliche Zahl, B dagegen ein geordneter Komplex der natürlichen Zahlen ist. Der Ausdruck (16) hat immer den Wert 1, weil

$$(0, 1, a-1, B) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(a-1, B)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(aB) - 1}} = 1 - (0, a, B)$$

ist. Dadurch sind die Identitäten (12) und (13) bewiesen. Aus der Identität (12) folgt:

$$\frac{[{}'A]}{[A]} + \frac{[{}'{}^*A]}{[A]} = 1,$$

das ist aber die Identität (14).

Schließlich wenn wir A durch $\underline{A}$ ersetzen, so folgt die Identität (15).

IV. Drei Sätze über die zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen.

8. Die regelmäßigen periodischen Kettenbrüche, welche zwei zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen darstellen, sind voneinander abhängig (PERRON [2], Sätze 3.6 und 3.8). Der folgende Satz ermöglicht die unmittelbare Bestimmung des Kettenbruches einer quadratischen Irrationalzahl aus dem Kettenbruch der zu ihr konjugierten und umgekehrt.

Satz 1. *Ist die quadratische Irrationalzahl $\xi > 1$ durch ihre Kettenbruchentwicklung gegeben*

(17) $$\xi = (B\bar{A}),$$

wo A und B geordnete Komplexe der natürlichen Zahlen sind

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_m \\ B &= b_1 b_2 \dots b_n \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad b_n \neq a_m,\ m \geq 1,\ n \geq 0,$$

so kann immer, ohne auf die endliche Gestalt der Zahl ξ überzugehen, die zu ξ konjugierte Zahl η bestimmt werden, ebenfalls in der Gestalt des regelmäßigen periodischen Kettenbruchs, und zwar:

Ist ξ von der Gestalt:	*wobei:*	*dann und nur dann ist η von der Gestalt:*	
$(\bar{A})$	–	$(-1, {}^*\underline{A}\bar{A})$	(18)
$(b_1\bar{A})$	$b_1 \neq a_m$ *oder* $b_1 = a_m$	$(b_1 - a_m - 1, {}^{*\prime}\underline{A}\bar{A})$	(19)
$(B\bar{A})$	$b_n > a_m + 1$	$(B', b_n - a_m - 1, {}^{*\prime}\underline{A}\bar{A})$	(20)
$(B\bar{A})$	$b_n = a_m + 1$	$(B'', \{b_{n-1} + ({}^{*\prime}\underline{A}\bar{A})\})$	(21)
$(B\bar{A})$	$b_n < a_m,\ b_{n-1} > 1$	$(B'', b_{n-1} - 1, {}^*\{a_m - b_n, {}'\underline{A}\}\bar{A})$	(22)
$(B\bar{A})$	$b_n < a_m,\ b_{n-1} = 1$	$(B''', \{b_{n-2} + ({}^*\{a_m - b_n, {}'\underline{A}\}\bar{A})\})$	(23)
$(1, b_2, \bar{A})$	$b_2 < a_m$	$(0, {}^*\{a_m - b_2, {}'\underline{A}\}\bar{A})$	(24)

Beweis. Nach dem bekannten Satz von Galois (PERRON [2], Satz 3.6) und nach der Formel (13), folgt aus $\xi = (\bar{A})$:

$$\eta = -(0\underline{\bar{A}}) = (-1, {}^*\underline{A}\bar{A}),$$

das ist aber die Formel (18). Aus

$$\xi = (b_1\bar{A}) = b_1 + \frac{1}{(\bar{A})},$$

folgt

$$\eta = b_1 + \frac{1}{-(0\underline{\bar{A}})}, \quad \text{d.h.} \quad \eta = b_1 - (\underline{\bar{A}})$$

und aus der Formel (13) ergibt sich:

$$\eta = b_1 - (\underline{\bar{A}}) = b_1 - a_m - (0\,{}'\underline{A}\bar{A}) = b_1 - a_m + (-1, {}^{*\prime}\underline{A}\bar{A}),$$

so gelangt man zur Formel (19).

Schreiben wir im allgemeinen Fall den Bruch $\xi = (B\bar{A})$ in der Gestalt:

(25) $$\xi = (B'', \vartheta),$$

wo ϑ eine quadratische Irrationalzahl ist

$$\vartheta = (b_{n-1} b_n \bar{A}) = b_{n-1} + \frac{1}{(b_n \bar{A})}. \tag{26}$$

Nach den Formeln (19), (26) und (25) sind die zu ϑ und ξ konjugierte Zahlen

$$\vartheta' = b_{n-1} + \frac{1}{(b_n - a_m - 1, {}^*{}'\underline{A}\,\underline{\bar{A}})}, \tag{27}$$

$$\eta = (B'', \vartheta'). \tag{28}$$

Unterscheiden wir nun drei Fälle:

1. Ist $b_n > a_m + 1$, dann ist der Nenner des Bruchs in der Gl. (27) größer als 1, und daher

$$\vartheta' = (b_{n-1}, b_n - a_m - 1, {}^*{}'\underline{A}\,\underline{\bar{A}}).$$

Da aber $\vartheta' > 1$ ist, so bekommt man durch seine Eintragung in die Gl. (28) die Formel (20).

2. Ist $b_n = a_m + 1$, dann wird ϑ' zu

$$\vartheta' = b_{n-1} + ({}^*{}'\underline{A}\,\underline{\bar{A}}),$$

da aber $\vartheta' > 1$ ist, folgt aus der Gl. (28) die Formel (21).

3. Sei schließlich $b_n < a_m$, dann können wir ϑ' — nach dem schon erwähnten Satz von Galois und nach der Formel (26) — in der Gestalt

$$\vartheta' = b_{n-1} + \frac{1}{b_n - (\underline{\bar{A}})},$$

schreiben, d.h.

$$\vartheta' = b_{n-1} - (0, a_m - b_n, {}'\underline{A}\,\underline{\bar{A}})$$

und endlich auf Grund der Formel (13) in der Gestalt:

$$\vartheta' = (b_{n-1} - 1, {}^*\{a_m - b_n; {}'\underline{A}\}\,\underline{\bar{A}}). \tag{29}$$

Wenn $b_{n-1} > 1$, dann ist $\vartheta' > 1$, und so bekommt man durch seine Eintragung in die Gl. (28) die Formel (22). Ist $b_{n-1} = 1$, dann wird die Gl. (29):

$$\vartheta' = (0, {}^*\{a_m - b_n, {}'\underline{A}\}\,\underline{\bar{A}}),$$

und da aus der Gl. (28)

$$\eta = \left(B''', b_{n-2} + \frac{1}{\vartheta'}\right)$$

folgt, so ergibt sich daraus die Formel (23). Die Formel (24) folgt unmittelbar aus der Gl. (29).

Umgekehrt, wird ξ als die zu η konjugierte Zahl gesucht, dann erhält man ξ aus jeder der Formeln (18) bis (24) in der Gestalt $\xi = (B\bar{A})$, deren unvollständige Quotienten der entsprechenden Bedingung genügen. Zum Beispiel, aus (22):

$\eta = (B'', \alpha, {}^*\{\beta, {}'\underline{A}\}\,\underline{\bar{A}})$, ($\alpha$ und β natürliche Zahlen, $\beta < a_m$),

wenn man wie im vorigen Beweis verfährt, folgt

$$\xi = (B'', \alpha + 1, a_m - \beta, \bar{A})$$

was bedeutet, daß: $b_{n-1} = \alpha + 1$, also $b_{n-1} > 1$, und $b_n = a_m - \beta$, also $b_n < a_m$. Außerdem durch die sieben im Satz 1 angegebenen Fälle ist die Gesamtheit aller periodischen regelmäßigen Kettenbrüche $\xi > 1$ umfaßt. So ist der Satz 1 im ganzen bewiesen.

9. Beispiel: Sei

$$\xi = (3, 2, 1, 6, \overline{1, 3, 7})$$

so ist nach der Formel (23):

$$\eta = \left(3, \left\{2 + (^*\{1, 3, 1\}, \overline{7, 3, 1})\right\}\right),$$

danach

$$\eta = \left(3, \{2 + (4, \overline{1, 7, 3})\}\right) = \left(3, (6, \overline{1, 7, 3})\right)$$

und schließlich

$$\eta = (3, 6, \overline{1, 7, 3}).$$

Umgekehrt würden wir ξ aus η auf Grund der Formel (20) bekommen:

$$\xi = (3, 2, ^*\{7, 1\}, \overline{3, 7, 1}),$$

d.h.

$$\xi = (3, 2, 1, 6, \overline{1, 3, 7}).$$

10. Aus Satz 1 erhält man folgenden

Satz 2. *Ist $\xi > 1$ der gegebene regelmäßige periodische Kettenbruch:*

$$\xi = (b_1 b_2 \dots b_n \overline{a_1 a_2 \dots a_m}), \qquad (b_n \neq a_m),$$

und η die zu ihm konjugierte Zahl, dann ist

1. bei $n = 0$ und $n = 1$ immer $\xi > \eta$;

2. bei $n \geq 2$, hat die Differenz $\xi - \eta$ das Vorzeichen des Ausdrucks

$$(-1)^n (a_m - b_n).$$

Beweis. 1. folgt unmittelbar aus (18) und (19). 2. Aus (20) und (21) ergibt sich, daß bei $b_n > a_m$ die Differenz $\xi - \eta$ das Vorzeichen $(-1)^{n+1}$ hat, und aus (22), (23) und (24) folgt, daß bei $b_n < a_m$ die Differenz $\xi - \eta$ das Vorzeichen $(-1)^n$ hat — immer bei $n \geq 2$. Zusammenfassend ergeben beide Schlußfolgerungen die Behauptung 2. des Satzes 2.

11. Aus Satz 1 ergibt sich leicht noch folgender

Satz 3. *Sind ξ und η ($\xi > \eta$, $\xi > 1$) zwei zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen und wird ξ in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt, dann gilt über die Gliederzahl seiner Vorperiode folgendes:*

1. Befinden sich zwischen ξ und η zwei oder mehr ganze Zahlen, dann und nur dann besitzt ξ eingliedrige Vorperiode (für $\eta > 0$ und $\eta < -1$) oder ist reinperiodisch (für $-1 < \eta < 0$).

2. Befindet sich zwischen ξ und η nur eine ganze Zahl, dann und nur dann ist die Vorperiode der Zahl ξ zweigliedrig.

3. Befindet sich zwischen ξ und η keine ganze Zahl, dann und nur dann hat die Vorperiode der Zahl ξ drei oder mehr Glieder.

Beweis. 1. Ist die quadratische Irrationalzahl ξ von der Gestalt $\xi = (b_1 \bar{A})$, wo $b_1 \neq a_m$ oder $b_1 = a_m$ ist, dann ist nach Satz 1 [Formel (19)]:

$$\eta < b_1 - 1. \tag{30}$$

Umgekehrt, aus (30) folgt

$$-1 < \frac{1}{\eta - b_1} < 0,$$

was bedeutet, daß $\frac{1}{\xi - b_1}$ eine reduzierte Zahl ist:

$$\frac{1}{\xi - b_1} = (\bar{A}), \quad \text{oder also} \quad \xi = (b_1 \bar{A}).$$

2. Ist $\xi = (b_1 b_2 \bar{A})$, mit $b_2 \neq a_m$, größer als die zu ξ konjugierte Zahl η, dann ist nach Satz 2

$$(-1)^2 (a_m - b_2) > 0, \quad \text{oder also} \quad b_2 < a_m.$$

In diesem Fall ist nach (22) und (24) η von der Gestalt

$$\eta = (b_1 - 1, {}^*\{a_m - b_2, {}'\underline{A}\}\underline{\bar{A}}),$$

was bedeutet, daß die Ungleichheit

$$b_1 - 1 < \eta < b_1 \tag{31}$$

befriedigt ist. Umgekehrt folgt aus (31)

$$\frac{1}{\eta - b_1} < -1,$$

was bedeutet — nach Satz 3, Beh. 1 —, daß die Vorperiode der Zahl $\frac{1}{\xi - b_1}$ eingliedrig ist, d.h.

$$\frac{1}{\xi - b_1} = (b_2 \bar{A}), \quad \text{mit} \quad b_2 \neq a_m,$$

oder

$$\xi = (b_1 b_2 \bar{A}).$$

3. Der Beweis folgt aus Beh. 1 und 2 desselben Satzes.

V. Kulminierende und fastkulminierende Perioden.

12. Sei $K, b_0, \underline{K}, 2b_0$ eine kulminierende und $F, b_0 - 1, \underline{F}, 2b_0$ eine fastkulminierende Periode, wo

$$K = a_1 a_2 \dots a_{r-1}, \; F = b_1 b_2 \dots b_{r-1}, \qquad (r \geq 1),$$

geordnete Komplexe der natürlichen Zahlen sind (PERRON [2], § 29). Dann befriedigt der Komplex K die Gleichung

$$2[K'] = ['K] \tag{32}$$

und der Komplex F die Gleichung

$$[F] = 2[F'] - ['F]. \tag{33}$$

Eine Lösung K der Gl. (32) werden wir einen k-Komplex nennen und eine Lösung F der Gl. (33) einen f-Komplex.

Der Zweck dieser Zeilen unserer Arbeit ist die Bestimmung der Gestalt der k- und f-Komplexe. Dieses Problem wurde in einer allgemeineren Form durch STEUERWALD [3] gelöst, und unsere Lösung wird wegen ihrer Kürze angegeben.

13. Durch folgende zwei Sätze kann man alle k- und f-Komplexe bestimmen.

Satz 4. *a) Der einzige k-Komplex mit weniger als zwei Gliedern ist leer:* $K = V$.

b) Jeder k-Komplex mit zwei und mehr Gliedern, dessen letztes Glied eine gerade Zahl ist, hat die Gestalt

$$K = a_1, \underline{K_0}, 2a_1, \tag{34}$$

wo K_0 *ebenfalls ein k-Komplex und* a_1 *eine natürliche, von* K_0 *unabhängige Zahl ist.*

c) Jeder k-Komplex mit zwei und mehr Gliedern, dessen letztes Glied eine ungerade Zahl ist, hat die Gestalt

$$K = a_1, \underline{F}, 2a_1 + 1, \tag{35}$$

wo F *ein f-Komplex und* a_1 *eine natürliche, von* F *unabhängige Zahl ist.*

Beweis. a) Für $K = V$ ist die Gl. (32) befriedigt und für $K = a$ (wo a eine natürliche Zahl ist) kann sie überhaupt *nie* befriedigt werden.

b) und c): Nach Rekursionsformel (8), für $r \geq 3$ kann man die Gl. (32) in der Gestalt

$$2a_1['K'] + 2[''K'] = a_{r-1}['K'] + ['K''] \tag{36}$$

schreiben, und nach der beiderseitigen Division durch $['K']$:

$$\underset{\sim}{a_{r-1}} - 2a_1 = 2(0, 'K') - (0, '\underline{K}').$$

Daraus folgt

$$-1 < a_{r-1} - 2a_1 < 2,$$

was bedeutet, daß a_{r-1} nur zwei Werte haben kann:

$$a_{r-1} = 2a_1 \quad \text{oder} \quad a_{r-1} = 2a_1 + 1.$$

Im ersten Fall ergibt sich aus (36)

$$2[''K'] = ['K''],$$

woraus folgt, daß in diesem Fall der Komplex $'\underline{K}'$ immer ein k-Komplex ist. Im zweiten Fall ergibt sich aus (36)

$$['K'] = 2[''K'] - ['K''],$$

woraus nach (33) folgt, daß in diesem Fall der Komplex $'\underline{K}'$ immer ein f-Komplex ist.

Satz 5. *a) Der einzige f-Komplex mit weniger als zwei Gliedern ist: $F=1$.*

b) Jeder f-Komplex mit zwei und mehr Gliedern hat die Gestalt

$$F = {}^*K^*, \tag{37}$$

wo K ein k-Komplex ist.

Beweis. Für $r \geq 3$ kann man die Gl. (33) in der Gestalt

$$2\{[F] - [F']\} = [F] - ['F]$$

schreiben, und nach den Formeln (14) und (15)

$$2[F^{*'}] = ['^*F],$$

oder nach (4) schließlich

$$2[^*F^{*'}] = ['^*F^*].$$

Daraus folgt, nach (32), daß der Komplex $^*F^*$ immer ein k-Komplex ist:

$$^*F^* = K, \quad \text{d.h.} \quad F = {}^*K^*.$$

Die Analyse der erhaltenen Resultate wurde hier nicht durchgeführt, denn dadurch hätte man genau die gleichen Schlüsse wie in der Arbeit von STEUERWALD bekommen; aber die Tabelle am Schluß des § 6 der erwähnten Arbeit kann auch ohne diese durch einfache Anwendung der Formeln (34), (35) und (37) erhalten werden, wenn man von $K = V$ und $F = 1$ ausgeht.

Literatur.

[1] FROBENIUS, G.: Über die Markoffschen Zahlen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. **1913**, 458—487. — [2] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart: B. G. Teubner 1954. — [3] STEUERWALD, R.: Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. Math. Z. **52**, 686—697 (1950).

Mathematisches Institut der Universität Belgrad (Jugoslawien).

(Eingegangen am 7. Februar 1955.)

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 330 (1955)

Über eine Vermutung von Kaplansky.

Von
IVAN VIDAV.

Seien a und b zwei Elemente einer assoziativen Banachschen Algebra und $c = ab - ba$ ihr Kommutator. I. KAPLANSKY hat die Vermutung ausgesprochen[1]), daß c, wenn mit a oder b vertauschbar, ein quasinilpotentes Element ist. Vor kurzem hat C. R. PUTNAM in der Algebra der Operatoren des Hilbertschen Raumes diese Vermutung für den Fall bewiesen, daß c mit a und b vertauschbar ist[2]). Hier will ich zeigen, daß dies auch in der allgemeinsten Banachschen Algebra gültig ist.

Wird in der Banachschen Algebra $\mathfrak{B}$ ohne Einheitselement

$$a e^x = a + \frac{ax}{1!} + \frac{ax^2}{2!} + \cdots, \qquad e^x a = a + \frac{xa}{1!} + \frac{x^2 a}{2!} + \cdots; \qquad a, x \in \mathfrak{B}$$

gesetzt, so gilt, wenn x und y vertauschbar sind:

$$(a e^x) e^y = a e^{x+y}, \qquad (a e^x)(e^y b) = [a e^{x+y}] b = a [e^{x+y} b].$$

Sei nun der Kommutator c mit a vertauschbar. Dann ist bekanntlich $n a^{n-1} c = a^n b - b a^n$. Daraus folgt leicht $\lambda e^{\lambda a} c = e^{\lambda a} b - b e^{\lambda a}$, wo λ eine beliebige Zahl ist. Es ist also für $\lambda \neq 0$

$$c = \lambda^{-1} (e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} - b).$$

Hieraus ergibt sich, wenn c auch mit b vertauschbar ist:

$$c^n = \lambda^{-n} \left(e^{\lambda a} b^n e^{-\lambda a} - \binom{n}{1} e^{\lambda a} b^{n-1} e^{-\lambda a} \cdot b + \cdots \pm \binom{n}{n} b^n \right).$$

Für positive λ gilt also die Abschätzung

$$\|c^n\| \leq \lambda^{-n} e^{2\lambda \|a\|} (2\|b\|)^n.$$

Daraus folgt für $\lambda = n$:

$$\|c^n\|^{\frac{1}{n}} \leq n^{-1} e^{2\|a\|} \cdot 2\|b\|, \qquad \lim_{n \to \infty} \|c^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Ist in einer Banachschen Algebra der Kommutator $c = ab - ba$ mit a und b vertauschbar, so ist c quasinilpotent.

[1]) HALMOS, P. R.: Commutators of operators. II. Amer. J. Math. **76**, 191—198 (1954).
[2]) PUTNAM, C. R.: On the spectra of commutators. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 929—931 (1954).

Ljubljana (Jugoslavien), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 14. März 1955.)

FRÖHLICH, A., and J. C. SHEPHERDSON
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 331—334 (1955)

On the factorisation of polynomials in a finite number of steps.

By
A. FRÖHLICH and J. C. SHEPHERDSON.

In view of the recent discussion in this Journal ([1], [2]) it seems appropriate to mention briefly here some results on the factorisation of polynomials in a finite number of steps which we intend to publish in more detail elsewhere [3].

1. VAN DER WAERDEN [4] has shown that there is no *general* algorithm applicable to all "explicitly given" fields K for splitting polynomials with coefficients from K into their irreducible factors in $K[x]$[1]). We can strengthen this result by giving a *particular* explicitly given field K_0 for which there is no splitting algorithm. In fact let p_n denote the nth prime number, let $\lambda(n)$ be a recursive function defined for all positive integers n, such that $\lambda(n) \neq \lambda(m)$ *if* $n \neq m$ and such that the integers m satisfying $(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$ form a non-recursive class[2]), and let Q denote the field of rational numbers. Then the field $Q(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots)$ where $\vartheta_n = \sqrt{p_{\lambda(n)}}$ is obviously capable of being given an "explicit representation" K_0[3]). But $x^2 - p_m$ is reducible in K_0 if and only if $(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$. Since there is no recursive algorithm[4]) for deciding of arbitrarily given m whether this holds or not it follows that there can be no recursive algorithm for deciding whether an element of $K_0[x]$ is reducible or not and hence no algorithm for splitting elements of $K_0[x]$ into their irreducible factors.

We can strengthen similarly a result of M. KNESER [1] by constructing explicitly given fields K, $\overline{K}$ such that $\overline{K}$ is a simple non separable extension of K, and such that K has a splitting algorithm but $\overline{K}$ has not. Here we define $\Delta = GF(2)$, $K_0 = \Delta(x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, where $x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ are independent transcendentals over Δ, $K = K_0(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots)$ where $\vartheta_n = (x_{\lambda(n)} + x_0\, y_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $\overline{K} = K\left(\sqrt{x_0}\right)$. It is easily seen that $\overline{K}$ has no splitting algorithm since $x^2 - x_m$ is reducible in $\overline{K}$ if and only if $(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$. The proof that K has a splitting algorithm is tedious and is given elsewhere [3].

---

[1]) From now on we shall call such an algorithm a *splitting algorithm* for K.

[2]) For a proof that such a function λ exists see [5]. λ can be chosen to be primitive recursive.

[3]) i.e. a representation by a recursive set of words (i.e. finite sequences) in some finite alphabet $\{a_1, \ldots, a_n\}$ such that there are recursive procedures for deciding when two words W_1, W_2 represent the same element of the field and for computing $-W$, W^{-1} (for those W not representing 0) $W_1 + W_2$, $W_1 \times W_2$.

[4]) See [5], [6], [7] for a discussion of the reasons for identifying "algorithm" with "recursive procedure".

2. On closer inspection the last example given leads to a paradox. For the field K which has no splitting algorithm is, as an abstract field, isomorphic to $\Delta(\sqrt{x_0}, \sqrt{x_{\lambda(1)}}, \sqrt{x_{\lambda(2)}}, \ldots, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, y_1, y_2, \ldots)$ where $\{i_1, i_2, \ldots\}$ is an enumeration of the set of those positiveintegers m such that $\sim(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$, i.e. the complement of the set $\{\lambda(1), \lambda(2), \ldots\}$. But the elements $\sqrt{x_0}, \sqrt{x_{\lambda(1)}}, \sqrt{x_{\lambda(2)}}, \ldots, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ are easily seen to be independent transcendentals over Δ so that K is isomorphic to the field $K' = \Delta(z_1, z_2, \ldots)$ obtained by adjoining $\aleph_0$ independent transcendentals $z_1, z_2, \ldots$. But surely this is an explicit field which has a splitting algorithm (c. f. [8])? The solution of this paradox is that if the elements of K' are represented in the "obvious" way, viz. as polynomials in $z_1, z_2, \ldots$ with coefficients *0* or *1* then there is an algorithm for splitting polynomials with given coefficients into their irreducible factors; if however the elements of K' are represented in the "bizarre" way they are in K then there is no such algorithm. This shows that the sort of properties of fields we are dealing with depend not only on the field as an abstract field but also on the particular "explicit representation" chosen. This fact makes it necessary to re-state all the results of KRONECKER [9], HAUPT [10], VAN DER WAERDEN [4], [8], KNESER [1], making it explicit at each stage that the properties dealt with are properties of particular explicit representations of the abstract fields involved. In particular some care has to be taken with the definition of when an explicit representation of a field K is to be considered as an "explicit" extension of a certain explicit representation of a field K_1. All these details are dealt with fully in [3].

The fact that it is possible to have two explicit representations of the same abstract field which, although abstractly isomorphic, are not explicitly isomorphic[5]), raises the question, "which abstract fields have the property, clearly possessed by the field of rational numbers, that all their explicit representations are explicitly isomorphic?". Our example above shows that there are transcendental extensions of a prime field which do not possess this property. It might be conjectured that all purely algebraic extensions of a prime field necessarily have this property. We have shown that this is false. In fact let $\mu(n)$ be a recursive function such that[6]) there is no algorithm for saying correctly of arbitrarily given positive integers m either "if there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is odd" or "if there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is even". Let Q be the field of rational numbers, let K be the field $Q(u_1, u_2, \ldots)$ where $u_n = \sqrt{p_n}$, and let K_1, K_2 be respectively the "usual"[7]) explicit representations of the fields $K\left(\sqrt{u_{\mu(1)}}, \ldots, \sqrt{u_{\mu(n)}}, \ldots\right)$, $K\left(\sqrt{-u_{\mu(1)}}, \ldots, \sqrt{(-1)^n u_{\mu(n)}}, \ldots\right)$. K_1, K_2 are clearly isomorphic via the automorphism of K defined by $u_{\mu(n)} \leftrightarrow (-1)^n u_{\mu(n)}$. But if ϑ is any explicit

[5]) We call two explicit representations of a field *explicitly isomorphic* if there is an isomorphism $W \leftrightarrow \vartheta(W)$ between the representations such that there is a recursive algorithm for computing $\vartheta(W)$.

[6]) It is not difficult to prove the existence of such a function μ. See [3]. μ can be taken to be primitive recursive.

[7]) This is defined precisely in [3].

isomorphism of K_1 onto K_2 then since the only roots of $x^2 - p_m = 0$ in K_1 and K_2 are $\pm u_m$ we must have, for all m, $\vartheta(u_m) = \pm u_m$. Also the only roots of $x^4 - p_{\mu(n)} = 0$ are $\pm\sqrt{u_{\mu(n)}}$ in K_1 and $\pm\sqrt{(-1)^n u_{\mu(n)}}$ in K_2; so $\vartheta\left(\sqrt{u_{\mu(n)}}\right) = \pm\sqrt{(-1)^n u_{\mu(n)}}$ and hence $\vartheta(u_{\mu(n)}) = (-1)^n u_{\mu(n)}$. So for any integer m we can find $\vartheta(u_m) = \pm u_m$ and if the sign is $+$ we can correctly say "*if* there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is even"; if the sign is $-$ we can say "if there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is odd". This is contrary to our hypothesis about μ hence such a ϑ cannot exist.

However it is easily proved that all finite extensions of prime fields have the property that all their explicit representations are explicitly isomorphic. Our strongest result of this kind is the following:

Let P be a prime field and let K be a field $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ where

(i) there is an algorithm for deciding, for arbitrarily given n, whether α_n is algebraic or transcendental over $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$,

(ii) there is an algorithm for finding, for those n such that α_n is algebraic over $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ a polynomial $\varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ in $x_1, \ldots, x_n$ with coefficients in P such that $\varphi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x) = 0$ is an irreducible equation for α_n over $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Then the field K has explicit representations. If further

(iii) every isomorphism of a finite subfield $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ of K into K can be extended to an automorphism of K, then every pair of explicit representations of K are explicitly isomorphic.

3. KRULL ([2], pt. I) distinguishes various kinds of splitting algorithm according to various ways in which bounds can be given for the number of steps required by the process. It seems to us that in order to be significant his definitions need to be supplemented by precise definitions of what kinds of functions are permissible as "bounding functions". Let us take the simple case of a function $f(n)$ of a single positive integer variable. Let us say that f is bounded by g if the computation of $f(n)$ according to some standard procedure requires $\leq g(n)$ "steps". If we identify "computable" with "general recursive" in the usual way (cf. [5], [6], [7]) then according to this definition *every* computable function is bounded by some computable function g—e.g. by the function $g_0(n)$ = number of steps taken for the computation of $f(n)$—this $g_0(n)$ is clearly a computable function! So one does not narrow the class of computable functions by restriction to those functions which are bounded by computable functions. Such a narrowing will only be achieved by requiring the bounding function to be a special kind of computable function. The desire to effect such a restriction of the class of computable functions can hardly be motivated by practical considerations, since with repeated exponentiation alone it is possible to define functions g whose values for quite small n are so large that a computation involving $g(n)$ steps would take centuries even if carried out by high speed computing machines. Presumably, then, the desire to narrow down the class of computable functions is motivated by a feeling of distrust for the classical use of the excluded middle which may be involved in the proof that the function $f(n)$ really is recursive.

e.g. if $f(n)$ is given in KLEENE's standard form as $\varphi(\mu n \psi(m, n))$, where $\mu n \psi(m, n)$ denotes "the least n such that $\psi(m, n)$ holds", then the law of the excluded middle will generally be needed to prove that for all m there does exist an n such that $\psi(m, n)$. A proof that there exists such an $n \leq g(m)$, where g is some function already accepted as computable would perhaps make one feel a little more certain that there really was such an n than would the mere knowledge that the assumption $(n) \sim \psi(m, n)$ leads to contradiction. But if this is the reason for the proposed narrowing of the class of computable functions it seems only reasonable to adopt the following procedure: Start with some class C_0 of commutable functions which are accepted as being "genuinely" computable. Then successively enlarge C_0 by counting as acceptable any function which is bounded by an acceptable function (i.e. computable in an acceptable number of steps) and so on. One would then end up with a class C of computable functions which is closed in the sense that any function bounded by a member of C belongs to C. It would be interesting to know what sub-classes of the class of computable functions are closed in this sense. Presumably the class of primitive recursive functions and the class of multiply recursive functions, are closed. In order to make KRULL's distinctions significant it seems that one would have to take some closed proper sub-class C of the class of computable functions and interpret statements such as "there exists a bound for the number of steps which can be computed directly from n", as meaning "there exists a function f belonging to C such that the number of steps is $\leq f(n)$. However it seems to us probable that whatever proper sub-class C of the class of computable functions were selected there would be functions not in C which everyone would agree were quite definitely computable. So we prefer to adopt the procedure accepted by most logicians and metamathematicians of using "computable" in the sense of TURING [7], i.e. accepting all general recursive functions as computable. By doing this we destroy the distinctions created by KRULL.

References.

[1] KNESER, M.: Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Math. Z. **57**, 238—240 (1953). — [2] KRULL, W.: Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten I, II, III. Math. Z. **59**, 57—60, 296—298 (1953); **60**, 109—111 (1954). — [3] FRÖHLICH, A., and J. C. SHEPHERDSON: Effective Procedures in field theory. Submitted to the Trans. Roy. Soc., London. — [4] WAERDEN, B. L. VAN DER: Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. Math. Ann. **102**, 738—739 (1930). — [5] KLEENE, S. C.: General recursive functions of natural numbers. Math. Ann. **112**, 727—742 (1936). — [6] CHURCH, A.: An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. **58**, 345—363 (1936). — [7] TURING, A. M.: On computable numbers. Proc. London Math. Soc. (2) **42**, 230—265 (1937). — [8] WAERDEN, B. L. VAN DER: Moderne Algebra, first edit. Vol. 1. 1930. — [9] KRONECKER, L.: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Crelles J. **92**, 11—13 (1882). — [10] HAUPT, O.: Lehrbuch der Algebra, Vol. 2, chpt. 23, § 7 (1929).

King's College, London.
Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (USA.) and University of Bristol, England.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954.)

BARTLE, R. G.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 335—346 (1955)

Implicit functions and solutions of equations in groups*).

By
ROBERT G. BARTLE.

In this paper we will be concerned with the possibility of extending the theory of implicit functions and of local inversion to mappings with domain and range in metric groups. It is seen that under certain restrictions the notion of derivative may be introduced and employed to advantage in extending the classical results of HILDEBRANDT and GRAVES [*10*][1]) to this realm. At the same time we drop the hypothesis that the derivative be one-to-one, in which case uniqueness is not generally present; this extends recent results of GRAVES [*9*]. Conditions are given which are sufficient to insure that if $y_0 = f(x)$ has k solutions and if y_1 is near y_0, then $y_1 = f(x)$ has at least (or exactly) k solutions, or that if the first equation has a continuum of solutions then so does the second.

It should be mentioned that our hypotheses are more stringent than are required in certain classical cases, but if more structure is present then some of our conditions are automatically (or easily) satisfied. Further, we do not investigate here questions of the differentiability of the solution or inverse functions. This delicate problem was treated in detail in the case of BANACH spaces by HILDEBRANDT and GRAVES.

1. *Basic results on smooth mappings.* Let $\mathfrak{X}$ be a topological group. Although we do not assume that $\mathfrak{X}$ is abelian, we will always write the group operation as addition since this notation is more suggestive for our purposes. We suppose that the topology of $\mathfrak{X}$ is given by a right-invariant metric function d; hence $d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3)$, $x_i \in \mathfrak{X}$. We define the "norm" in $\mathfrak{X}$ by

$$\|x\| \equiv d(x, 0).$$

The reader may readily verify that this norm has the following properties:

(i) $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$;

(ii) $\|-x\| = \|x\|, \quad x \in \mathfrak{X}$;

(iii) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|, \quad x_i \in \mathfrak{X}$.

*) The basic results in this paper were obtained while the author was an A. E. C. Fellow at Yale University. They were extended while he was under contract with the O. N. R.

[1]) Numbers in brackets refer to the list of references at the end of the paper.

We denote open spheres by $S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ and agree to employ terms that are standard in metric and linear spaces without further mention.

If α and β are real numbers, then the symbols $\alpha \wedge \beta$ and $\alpha \vee \beta$ denote their minimum and their maximum, respectively.

In the following we take $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ to be *groups bearing right-invariant metrics*. Because it is needed in the fundamental Theorem 1.3, we will suppose that $\mathfrak{X}$ is *complete* under its metric. We will be concerned with the existence of solutions of the equation

$$(*) \qquad y = f(x),$$

where f is a continuous map of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$. It goes without saying that additional restrictions must be put on f, but no further structure will be assumed about $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ without explicit mention, and only in § 5. A notational distinction between the norms, or between the identities in $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ and the scalar number zero is not necessary for us and will not be made.

The following notion will be important in the sequel:

1.1. *Definition.* A continuous function f defined on a subset $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}$ to $\mathfrak{Y}$ with $y_0 = f(x_0)$ is said to be *smooth at* x_0 if there are positive numbers α und β depending on f and x_0 such that if $0 < \|y - y_0\| < \beta$, then there is at least one $x \in \mathfrak{X}_0$ with $y = f(x)$ and $\|x - x_0\| \leq \alpha \|y - y_0\|$. In such a case we will sometimes say that f is (α, β)-*smooth at* x_0. We mention that if f is (α, β)-smooth, then it is trivially (α', β')-smooth for any $\alpha' \geq \alpha$ and $\beta' \leq \beta$.

Intuitively, the requirement of smoothness at x_0 is analogous to (but different from) the requirement that the "slope" of the function is not identically zero in a neighborhood of x_0, although it may vanish at x_0 and at occasional points nearby. It is worth observing that this smoothness property is certainly satisfied for a function of a real variable if f has a derivative bounded away from zero near x_0. The functions $f(x) \equiv x^3$ and $f(x) \equiv x^5$ both fail to be smooth at $x = 0$ even though the latter function is a homeomorphism of the real line. On the other hand the mappings defined by

$$f(x) \equiv (\text{signum } x)\,|x|^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad f(x) \equiv (\text{signum } x)\,|x \sin \pi/x|$$

are smooth at $x = 0$ even though the latter fails to have a derivative at a sequence of points converging to zero and the derivative vanishes at another such sequence.

The following lemma on translation of the smoothness property for homomorphisms is proved by a simple calculation.

1.2. *Lemma. Let h be a continuous homomorphism of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$. Then h is (α, β)-smooth at $x = 0$ if and only if it is (α, β)-smooth at any point in $\mathfrak{X}$. Further if h is smooth then it takes open sets into open sets.*

If $\mathfrak{X}$ is also known to be separable, then it is known [2] [17; 299] that the range of h is of the second category in $\mathfrak{Y}$. If h is a smooth linear operator

between F-spaces, it maps onto $\mathfrak{Y}$; we do not know other conditions under which it is certain that h maps onto $\mathfrak{Y}$.

Our first theorem embodies the process of successive approximations and will be vital for later use. This result is essentially due to GRAVES [9], but because of its fundamental nature and for the convenience of the reader, we carry out here the simple changes that the non-commutativity requires.

1.3. *Theorem. Let $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ be as above; let f be a continuous function on $S(x_0, \gamma)$ to $\mathfrak{Y}$, and let $y_0 = f(x_0)$. Suppose that h is a continuous homomorphism of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$ which is (α, β)-smooth and such that*

$$(\dagger) \qquad \|[f(x_1) - f(x_2)] - [h(x_1) - h(x_2)]\| \leq \delta \|x_1 - x_2\|, \qquad x_i \in S(x_0, \gamma),$$

where $\alpha\,\delta < 1$. Then f is smooth at x_0. More precisely, if $\|y - y_0\| < r \equiv (1 - \alpha\,\delta)(\beta \wedge \alpha^{-1}\gamma)$, it follows that the equation

$$(*) \qquad y = f(x)$$

has at least one solution x with $\|x - x_0\| \leq \alpha(1 - \alpha\,\delta)^{-1}\|y - y_0\| < \gamma$.

Proof. Replacing f by the function $F: S(0, \gamma) \to \mathfrak{Y}$ defined by $F(x) \equiv f(x + x_0) - y_0$, we see that it suffices to prove the theorem under the assumption that $x_0 = 0 = y_0$.

Let $y \in \mathfrak{Y}$ be such that $\|y\| < r$ and choose x_1 such that $y = h(x_1)$ and $\|x_1\| \leq \alpha\|y\| < \gamma(1 - \alpha\,\delta)$. Set $y_1 \equiv h(x_1) - f(x_1)$, so by $(\dagger)$ we have $\|y_1\| \leq \delta\|x_1\| \leq \alpha\,\delta\|y\| < \beta$. By induction choose x_n, $n > 1$ such that

$$(1) \qquad y_{n-1} = h(x_n - x_{n-1})$$

and define y_n by

$$(2) \qquad y_n \equiv y_{n-1} + f(x_{n-1}) - f(x_n).$$

Since h is (α, β)-smooth, x_n can be chosen to satisfy $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha\|y_{n-1}\|$, provided that $\|y_{n-1}\| < \beta$. By (2), (1) and $(\dagger)$ we have

$$\|y_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1}) - h(x_n - x_{n-1})\| \leq \delta\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha\,\delta\|y_{n-1}\|,$$

provided that x_n and x_{n-1} are in $S(0, \gamma)$. By recursion we have

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha(\alpha\,\delta)^{n-1}\|y\|, \qquad \|y_n\| \leq (\alpha\,\delta)^n\|y\|,$$

from which it follows that $\|x_n\| \leq \alpha(1 - \alpha\,\delta)^{-1}\|y\| < \gamma$ and that $\|y_n\| < \beta$, so the induction is possible. Further, $\{x_n\}$ is a CAUCHY sequence converging to some point x with $\|x\| \leq \alpha(1 - \alpha\,\delta)^{-1}\|y\|$, and $y_n \to 0$. By repeated application of (2) we obtain $y_n = y - f(x_n)$ from which we have $y = f(x)$.

We now treat the case in which h is an isomorphism.

1.4. *Theorem. If, in addition to the hypotheses of Theorem* 1.3, *we assume that h is an isomorphism, then it follows that for $\|y - y_0\| < \frac{1}{2}r$, the equation $(*)$ has a unique solution in the sphere $S(x_0, r')$, where $r' \equiv \frac{1}{2}(\alpha\,\beta \wedge \gamma)$. Hence the inverse function $f^{-1}: S(y_0, \frac{1}{2}r) \to S(x_0, r')$ is single-valued. Further, $f^{-1}: S(y_0, \frac{1}{2}r) \to S(x_0; \frac{1}{2}r')$ is uniformly continuous.*

Proof. Let $\|y-y_0\|<\frac{1}{2}r$; by Theorem 1.3, equation (*) has a solution x with $\|x-x_0\|\leq\alpha(1-\alpha\delta)^{-1}\|y-y_0\|<\frac{1}{2}\alpha(\beta\wedge\alpha^{-1}\gamma)=\frac{1}{2}(\alpha\beta\wedge\gamma)=r'$. If $x_1\in S(x_0,r')$ is another such solution, then by (†), we have

$$\|h(x-x_1)\|\leq\delta\|x-x_1\|.$$

But $\|x-x_1\|\leq\|x-x_0\|+\|x_1-x_0\|<\alpha\beta$ and so $\|h(x-x_1)\|<\beta$. Since h is (α,β)-smooth and also one-to-one, we have

$$\|x-x_1\|\leq\alpha\|h(x-x_1)\|\leq\alpha\delta\|x-x_1\|.$$

Since $\alpha\delta<1$, this is a contradiction unless $x=x_1$. Hence (*) is uniquely solvable in the indicated spheres.

To show that f^{-1} is uniformly continuous on the smaller sphere, let $y'\in S(y_0,\frac{1}{4}r)$. Then as above, $x'\equiv f^{-1}(y')$ is in $S(x_0,\frac{1}{2}r')$. If $F:S(x_0,\gamma)\to\mathfrak{Y}$ is defined by

$$F(x)\equiv f(x)-f(x'),$$

it follows that (†) holds with f replaced by F. Now take y such that $\|y-y'\|<\frac{1}{4}r$; from Theorem 1.3 we see that

$$y-y'=F(x)=f(x)-y'$$

has a solution x with $\|x-x'\|\leq\alpha(1-\alpha\delta)^{-1}\|y-y'\|<\frac{1}{2}r'$. Now since $\|y-y_0\|<\frac{1}{2}r$ and $\|x-x_0\|<r'$, it follows that the solution x just found is the only one in this latter sphere. Hence $x=f^{-1}(y)$, and we have proved that if $y'\in S(y_0,\frac{1}{4}r)$ and if $\|y-y'\|<\frac{1}{4}r$, then

$$\|f^{-1}(y)-f^{-1}(y')\|=\|x-x'\|\leq\alpha(1-\alpha\delta)^{-1}\|y-y'\|,$$

and the uniform continuity is proved.

1.5. *Definition.* Let $\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ denote the set of all continuous homomorphisms of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$. If $g,h\in\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, let

$$(g,h)\equiv\sup\left\{\frac{\|g(x)-h(x)\|}{\|x\|}:x\neq 0\right\},$$

$$\varrho(g,h)\equiv\frac{(g,h)}{1+(g,h)}.$$

Then it is readily seen that ϱ is a metric function on the space $\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

The following corollary parallels a result of GRAVES [9] for linear operators in BANACH spaces. Its proof follows readily from Theorems 1.3 and 1.4 and will be omitted.

1.6. *Corollary. Let $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ be as before. Then the set of all smooth homomorphisms and the set of all smooth isomorphisms are open in the ϱ-topology of $\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.*

1.7. *Remark.* If $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are BANACH spaces and h is a continuous linear mapping of $\mathfrak{X}$ onto $\mathfrak{Y}$, then it is a corollary of the Interior mapping theorem that h is smooth. If $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are complete separable metric groups, then it was proved by BANACH [2] (see also PETTIS [17]) that the Interior mapping

theorem remains valid for homomorphisms mapping $\mathfrak{X}$ onto $\mathfrak{Y}$. However, lacking homogeneity with respect to scalar multiples, the writer has not been able to settle whether such mappings need be smooth.

2. *Differentiability and the implicit function theorem.* In this section we define a derivative[2]) of a function $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ at a point x_0, and show that under certain circumstances the smoothness of this derivative at x_0 implies that f maps onto a neighborhood of $f(x_0)$.

2.1. *Definition.* Let $\mathfrak{X}_0$ be an open set in the metric group $\mathfrak{X}$. A function $f:\mathfrak{X}_0\to\mathfrak{Y}$ is said to have a *derivative* $f'(x_0)$ at the point $x_0\in\mathfrak{X}_0$ if $f'(x_0)$ is a continuous homomorphism of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$ such that

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{1}{\|u\|}\|f(u+x_0)-f(x_0)-f'(x_0)(u)\|=0.$$

[We will ordinarily write $f'(x_0|u)$ for $f'(x_0)(u)$.]

2.2. *Definition.* If $\mathfrak{X}_0$ is open in $\mathfrak{X}$, then $f:\mathfrak{X}_0\to\mathfrak{Y}$ is said to be in *class* $C'(\mathfrak{X}_0)$ if it has a derivative at every point of $\mathfrak{X}_0$ and if for every $x_0\in\mathfrak{X}_0$ and $\varepsilon>0$ there is a number $\pi=\pi(x_0,\varepsilon)$ such that if $x_1, x_2\in S(x_0,\pi)$ then

(i) $$\|f'(x_1|u)-f'(x_0|u)\|<\varepsilon\|u\|,\qquad u\in\mathfrak{X};$$

(ii) $$\|f(x_1)-f(x_2)-f'(x_0|x_1-x_2)\|<\varepsilon\|x_1-x_2\|.$$

Note[3]). If $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are BANACH spaces, then (ii) is automatically satisfied so that this definition of the class $C'(\mathfrak{X}_0)$ coincides with the definition of HILDEBRANDT and GRAVES [*10*]. The validity of this assertion follows from the generalization of TAYLOR'S theorem due to GRAVES [*8*].

2.3. *Lemma. If f is in class $C'(\mathfrak{X}_0)$, and if $f'(x_0)$ is smooth for some x_0, then $f'(x)$ is smooth for x in a neighborhood of x_0. If, in addition, $f'(x_0)$ is a smooth isomorphism, the same is true for $f'(x)$ when x is sufficiently near to x_0. Let $f'(x)$ be smooth for $x\in\mathfrak{X}_0$, and let $A(x)$ and $B(x)$, $x\in\mathfrak{X}_0$, be defined to be*

$$A(x)\equiv\inf\alpha,\qquad B(x)\equiv\sup\beta$$

over all pairs (α,β) for which $f'(x)$ is (α,β)-smooth. Then A is upper semi-continuous and B is lower semi-continuous on $\mathfrak{X}_0$.

The first statements follow immediately from 2.2 (i) and 1.6. The final statement follows from 2.2 (i) and Theorem 1.3.

2.4. *Theorem. Suppose that f is in class $C'(S(x_0,a))$, that $y_0=f(x_0)$ and that $f'(x_0)$ is smooth; then f is smooth at x_0. If, in addition, $f'(x_0)$ is an isomorphism, then f has a uniformly continuous local inverse at x_0.*

[2]) Derivatives of functions in groups have been defined and discussed before—see the papers of MICHAL and MILLSAPS cited in the references, and see HYERS [*11*] for a general discussion.

[3]) The reader is asked to observe that we neither state nor require uniqueness of the derivative or the usual algebraic facts concerning it. All we demand is approximation by a homomorphism.

The last conclusion means that there are neighborhoods of x_0 and y_0 such that if the domain and range of f^{-1} is restricted to these neighborhoods, then it is single-valued and uniformly continuous.

Proof. This result follows from Theorems 1.3 and 1.4. However, it behooves us to make precise the neighborhoods under question. We suppose that $f'(x_0)$ is (α, β)-smooth. Let $\pi(x_0, (2\alpha)^{-1})$ be as in Definition 2.2. It follows from Theorem 1.3 that if $\|y - y_0\| < r$, where

$$r \equiv \tfrac{1}{2}\left[\beta \wedge \alpha^{-1} a \wedge \alpha^{-1} \pi\left(x_0, (2\alpha)^{-1}\right)\right],$$

then there is at least one x with $y = f(x)$ and such that $\|x - x_0\| \leq 2\alpha \|y - y_0\|$. If $f'(x_0)$ is an isomorphism, then Theorem 1.4 implies that f has a uniformly continuous local inverse on $S(y_0, \frac{1}{2}r)$ to the sphere about x_0 with radius $\frac{1}{2}\left[\alpha\beta \wedge a \wedge \pi\left(x_0, (2\alpha)^{-1}\right)\right]$.

2.5. *Definition.* If $\mathfrak{X}_0$ is an open set, if f is in class $C'(\mathfrak{X}_0)$ and if at every point x_0 of $\mathfrak{X}_0$, $f'(x_0)$ is smooth, then we say that f is in *class* $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$ or that f is *differentiably smooth* on $\mathfrak{X}_0$. If, in addition, the function π of Definition 2.2 does not depend on x we say that f is in *class* $\mathfrak{S}^*(\mathfrak{X}_0)$ or that f is *uniformly differentiably smooth* on $\mathfrak{X}_0$.

With this terminology we may state the following result concerning *invariance of domain.* We recall that a function is said to be *locally one-to-one* at a point if that point has a neighborhood on which it is one-to-one.

2.6. *Corollary. If f is in class $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$, then f is smooth and sends open sets into open sets. If at every point f' is a smooth isomorphism, then f is locally one-to-one and has a uniformly continuous local inverse at every point of $f(\mathfrak{X}_0)$.*

As would be expected, the preceding results can be used to give an implicit function theorem. In order to formulate this result, let $\mathfrak{Z}$ be a (possibly incomplete) group with a right invariant metric, and let $\mathfrak{Z}_0$ be an open subset of $\mathfrak{Z}$. Let $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Z}$ be the Cartesian product of these groups with the obvious algebraic operation and with the norm $\|[x, z]\| = \|x\| \wedge \|z\|$. Let $F: \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Z}_0 \to \mathfrak{Y}$, then we observe that Definitions 2.1 and 2.2 are meaningful for the function F. If $F'(x_0, z_0)$ is a derivative of F at $[x_0, z_0]$, then the *partial derivative* of F with respect to x at $[x_0, z_0]$ is the homomorphism $F_x(x_0, z_0)$ of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$ defined by $F_x(x_0, z_0 | u) \equiv F'(x_0, z_0 | u, 0)$. We note that if z_0 is held fixed, then $F_x(x_0, z_0)$ is in fact a derivative of the function $F(\cdot, z_0)$ at x_0 in the previous sense. Further, if F is in class $C'(\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Z}_0)$, then for each fixed $z_0 \in \mathfrak{Z}_0$, the function $F(\cdot, z_0)$ is in class $C'(\mathfrak{X}_0)$.

With these preliminaries settled, we may now state the following *Implicit function theorem:*

2.7. *Theorem. Let F be in class $C'(\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Z}_0)$ with values in $\mathfrak{Y}$, let $F(x_0, z_0) = 0$, and suppose that $F_x(x_0, z_0)$ is smooth. Then there exist constants p_1 and p_2 such that if $z \in S(z_0, p_2)$, there is at least one solution x of the equation*

$$F(x, z) = 0 \tag{**}$$

with $x \in S(x_0, p_1)$. Further, if F_x is an isomorphism, there is a single-valued continuous function f defined on a neighborhood of z_0 to a neighborhood of x_0 with $x_0 = f(z_0)$ and such that for all z in this neighborhood we have $F(f(z), z) = 0$.

Proof. Suppose that $F_x(x_0, z_0)$ is (α, β)-smooth. Take $\pi = \pi(x_0, z_0, (2\alpha)^{-1})$ such that if $\|x_i - x_0\| < \pi$ and $\|z - z_0\| < \pi$, then

$$\|F(x_1, z) - F(x_2, z) - F_x(x_0, z_0|x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2\alpha}\|x_1 - x_2\|.$$

Let G^z be defined by $G^z(x) \equiv F(x, z) - F(x_0, z)$ for $x \in S(x_0, \pi)$ and $z \in S(z_0, \pi)$. Then we have

$$\|G^z(x_1) - G^z(x_2) - F_x(x_0, z_0|x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2\alpha}\|x_1 - x_2\|.$$

Since $F(x_0, z)$ is continuous, there is a number $p_2 \leq \pi$ such that if $\|z - z_0\| < p_2$ then $\|F(x_0, z)\| < \frac{1}{2}(\beta \wedge \alpha^{-1}\pi)$. It follows from Theorem 1.3 that for such z, the equation

$$-F(x_0, z) = G^z(x) = F(x, z) - F(x_0, z)$$

has a solution x with $\|x - x_0\| \leq 2\alpha\|F(x_0, z)\|$, and this x is a solution for equation (**).

The final statement follows from Theorem 1.4 and its proof and will be left to the reader.

We note that in the case of BANACH spaces, considerably more refined results giving the differentiability of the solution function f have been obtained by HILDEBRANDT and GRAVES [*10*].

3. *Finite number of solutions.* It sometimes happens that a functional equation is of such a type that it can possess only a finite number of solutions for a particular element y_0 in its range. It is then of interest to inquire about the number of solutions possible for a point near y_0, or for general points in the range. Simple examples indicate that relatively strong conditions are required to obtain any information—we now take a few steps in this direction.

3.1. *Theorem. Let f be in class $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$, where $\mathfrak{X}_0$ is open, and let $y_0 = f(x)$ have k distinct solutions $x_1, \ldots, x_k$ in $\mathfrak{X}_0$. Then there exist positive numbers α and p_0 such that the spheres $S(x_i, 2\alpha p_0)$, $i = 1, \ldots, k$, are disjoint and such that if $\|y - y_0\| < p \leq p_0$, then equation (*) has at least k distinct solutions, one solution lying in each of the spheres $S(x_i, 2\alpha p)$.*

Proof. Choose a such that $S(x_i, a) \subseteq \mathfrak{X}_0$, $i = 1, \ldots, k$. By hypothesis $f'(x_i)$ is (α_i, β_i)-smooth. Let $\alpha \equiv \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k$ and $\beta \equiv \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$. If

$$p_0 \equiv \tfrac{1}{2}\Big[\beta \wedge \alpha^{-1} a \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \alpha^{-1}\pi\big(x_i, (2\alpha)^{-1}\big) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (2\alpha)^{-1}\|x_i - x_j\|\Big],$$

then the spheres $S(x_i, 2\alpha p)$ are seen to be disjoint. If $\|y - y_0\| < p \leq p_0$, equation (*) has solutions u_i, $i = 1, \ldots, k$, with $\|u_i - x_i\| \leq 2\alpha\|y - y_0\| < 2\alpha p$ and which are necessarily distinct.

The reader can show that if $f'(x_i)$ is an isomorphism for $i = 1, \ldots, k$, and if $\|y - y_0\| < \frac{1}{2}p_0$, then each of the solutions of (*) in the spheres $S(x_i, \alpha p_0)$

is uniquely determined. However, this statement should not be construed so as to deny the possibility that there may be solutions lying outside of these spheres. It is desirable to know conditions under which it can be asserted that the solutions of (*) be in the specified spheres. We see below that uniform continuity of f' plus the boundedness of the functions A and $1/B$ (compare Lemma 2.3) gives such a condition. Now the requirement of uniformity of a continuous function, or boundedness of semi-continuous functions is not an unduly restrictive *local* condition, but it becomes so when imposed globally. Hence, we prefer to state the next result locally, even though this is somewhat more cumbersome.

3.2. *Theorem. Let f be in class $\mathfrak{S}^*(S(0,R))$ and let $y_0=f(x)$ have k distinct solutions $x_1,\ldots,x_k$ in $S(0,R)$. Suppose that $A(x)$ and $[B(x)]^{-1}$ are bounded for x in $S(0,R)$. Then there exist positive numbers α and p_0 as in Theorem 3.1 and such that if $\|y-y_0\|<p\leq p_0$, then every solution x of (*) with $\|x\|<R-2\alpha p_0$ is contained in some sphere $S(x_i, 2\alpha p)$.*

Proof. Let a be such that $S(x_i,a)\subset S(0,R)$, and let $A(x)\leq\alpha<\infty$, $B(x)\geq\beta>0$ for $x\in S(0,R)$. Let $\pi(\varepsilon)$ be the (uniform) modulus of continuity of f'. Then if $p_0\equiv\frac{1}{2}\left[\beta\wedge\alpha^{-1}a\wedge\alpha^{-1}\pi\left((2\alpha)^{-1}\right)\wedge\bigwedge_{i\neq j}(2\alpha)^{-1}\|x_i-x_j\|\right]$, it follows as before that if $\|y-y_0\|<p\leq p_0$, then $y=f(x)$ has solutions u_i, $i=1,\ldots,k$, such that $\|u_i-x_i\|\leq 2\alpha\|y-y_0\|<2\alpha p$. Now let u be any solution of $y=f(x)$ with $\|u\|<R-2\alpha p_0$. It follows as in the proof of Theorem 2.4 that there is a solution x_0 of $y_0=f(x)$ such that $\|x_0-u\|\leq 2\alpha\|y_0-y\|<2\alpha p_0$, so $\|x_0\|<R$; hence x_0 must be some one of the solutions $x_1,\ldots,x_k$. Consequently u is in one of the indicated spheres.

The global situation is simpler.

3.3. *Corollary. Let f be in class $\mathfrak{S}^*(\mathfrak{X})$, let $y_0=f(x)$ have k distinct solutions, and suppose that $A(x)$ and $[B(x)]^{-1}$ are bounded for $x\in\mathfrak{X}$. Then if y is sufficiently close to y_0, equation (*) has at least k solutions which lie within neighborhoods of the solutions of $y_0=f(x)$. Further, every such solution of (*) lies in some neighborhood of the solutions of $y_0=f(x)$.*

If, in addition, to the hypotheses of 3.2 it is known that f' is an isomorphism, then statements concerning uniqueness of solutions of (*) near the x_i may be made. We will not pursue this matter. We note that this assumption excludes the possibility of a branch type singularity, and for that reason it is best made locally. Consideration of branch points is delicate, and we have not been able to treat them satisfactorily in this generality, although for more special cases they have been discussed, e.g. in [3].

4. *Continuation procedures.* In this section we will be concerned with the familiar procedure of the continuation of solutions. Similar discussions have been applied, e.g. in [5], [6], [7], [16]. Sharper results may be obtained in linear spaces, since the notion of line segment is available there. We will content ourselves, however, with the general group case.

By a *curve*, we mean a continuous image of the unit interval. We will see that results similar to those obtained in § 3 are available under somewhat

different hypotheses. In particular, the uniformity assumptions will be replaced by certain familiar compactness conditions. This permits us to get away from a locality of the (known) solutions of $y_0 = f(x)$. For simplicity, we assume that f is differentiably smooth on all of $\mathfrak{X}$, although these methods are also applicable to smaller portions of the space $\mathfrak{X}$.

4.1. *Theorem. Let f be in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ and suppose that $y_0 = f(x)$ has k distinct solutions. Suppose y_1 can be joined to y_0 by a curve Γ in $f(\mathfrak{X})$ whose inverse image is conditionally compact, and suppose that f is locally one-to-one on $f^{-1}(\Gamma)$. Then the equation $y_1 = f(x)$ has exactly k distinct solutions.*

Proof. Let $\gamma: [0, 1] \to \mathfrak{Y}$, $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$, be a parametrization for the curve Γ, and set $F(x, t) \equiv f(x) - \gamma(t)$. We denote the k solutions of $y_0 = f(x)$ by $x_1, \ldots, x_k$. It follows from the semi-continuity of A and B and the compactness of $f^{-1}(\Gamma)$ that numbers α and β may be found such that $f'(x)$ is (α, β) smooth for any $x \in f^{-1}(\Gamma)$. The reader will see that even though γ is not assumed to be differentiable, the simple nature of F permits application of the proof of Theorem 2.7. Since f is locally one-to-one on $f^{-1}(\Gamma)$ we conclude that there exist k uniquely determined functions $g_i: [0, 1] \to \mathfrak{X}$ such that $f(g_i(t)) = \gamma(t)$, and $g_i(0) = x_i$, $i = 1, \ldots, k$. The continuity of the g_i follows from the openness of f. In this manner we have "continued" the solutions of $y_0 = f(x)$ into solutions of $y_1 = f(x)$. It follows from the local one-to-oneness that the solutions $g_i(1)$ of $y_1 = f(x)$ are all distinct. If this latter equation had any solution not already obtained, a reverse process would permit the continuation of this into a solution of $y_0 = f(x)$. But the x_i were supposed to be the totality of the solutions of this initial equation. This completes the proof.

In the remainder of this section we will find it convenient to employ a condition due to CACCIOPPOLI [5]. We say that f is an *inverse compact* mapping if it is true that the conditional compactness of a set in $\mathfrak{Y}$ implies the conditional compactness of its inverse image under f.

4.2. *Theorem. Let $\mathfrak{X}$ be arcwise connected, and suppose that f is locally one-to-one, inverse compact and in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. If there is one point in $\mathfrak{Y}$ which is the image under f of exactly $k (< \infty)$ points, then every point in $f(\mathfrak{X})$ is the image of exactly k points, and the inverse f^{-1} is a continuous k-valued function on $f(\mathfrak{X})$ to $\mathfrak{X}$.*

The proof of this statement follows from the preceding theorem and will be omitted.

We now see that if $\mathfrak{Y}$ is known to be connected and simply connected in the usual topological sense, then the situation simplifies somewhat. The argument here is a modification of one due to CACCIOPPOLI, which goes back to LÉVY [12].

4.3. *Theorem. Let $\mathfrak{X}$ be arcwise connected and let $\mathfrak{Y}$ be connected and simply connected. Suppose that f is locally one-to-one, inverse compact and in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. Then f is a homeomorphism of $\mathfrak{X}$ onto $\mathfrak{Y}$.*

Proof. It is seen that if f is inverse compact, then $f(\mathfrak{X})$ is closed, and if f is in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$, then $f(\mathfrak{X})$ is open. Hence the connectedness of $\mathfrak{Y}$ implies that $f(\mathfrak{X})=\mathfrak{Y}$. Suppose that x_0 and x_0' are distinct points mapping into y_0 and let L_0 be a curve from x_0 to x_0'. Then L_0 is mapped by f into a closed curve Γ_0 through y_0. Since $\mathfrak{Y}$ is simply connected, Γ_0 can be contracted to a point y_1 by a continuous family Γ_s, $s\in[0,1]$, of curves. More precisely, there is a continuous function $\gamma:[0,1]^2\to\mathfrak{Y}$ such that Γ_s is traced out by $\gamma(s,\cdot)$. As in the proof of 4.1, one can find a continuous family L_s, $s\in[0,1]$, of curves in $\mathfrak{X}$ such that $f(L_s)=\Gamma_s$. Now since $\Gamma_1=y_1$, it follows from the one-to-oneness of f that L_1 is a single point, say x_1. For s sufficiently near 1, L_s is in some neighborhood of x_1 which is mapped in a one-to-one manner. Since the curves Γ_s are evidently closed curves, we conclude that L_s is also a closed curve for s near 1. On the other hand L_0 is not a closed curve, and so contradiction is readily obtained.

5. *A case of non-uniqueness.* Much of the preceding discussion has dealt with the case in which f maps in a locally one-to-one manner. It is of interest to discuss the case where this is known not to occur, as when f maps a continuum of points into the same image. From some points of view this may be regarded as the "natural" behavior in the neighborhood of points x_0 for which $f'(x_0)$ (if it exists) is not an isomorphism. We present here a result concerning this case; for simplicity we consider only the case that $\mathfrak{X}$ *and* $\mathfrak{Y}$ *are* BANACH *spaces.*

First we give an example. Let $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=l_1$, the BANACH space of absolutely convergent sequences $[\xi_i]$, and let f be defined for $\|x\|=\sum|\xi_i|<1$ by the equation

$$f[\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots]\equiv[\xi_2-\tfrac{1}{4}\xi_1^2,\ldots,\xi_{n+1}-\tfrac{1}{4}\xi_n^2,\ldots].$$

It may be readily established that the derivative $f'(x)$ exists for $\|x\|<1$ and is the bounded linear transformation which sends the vector $h=[h_i]$ into

$$[h_2-\tfrac{1}{2}\xi_1 h_1,\ldots,h_{n+1}-\tfrac{1}{2}\xi_n h_n,\ldots],$$

and that f is in class C' for $\|x\|<1$. In addition, $f'(x)$ maps onto $\mathfrak{Y}$ for each x with $\|x\|<1$. The reader may check that f sends the curve Γ_0 defined by

$$[t,2^{-2}t^2,\ldots,2^{2-2^n}t^{2^n-2},\ldots],\qquad |t|<1$$

into the zero vector of $\mathfrak{Y}$, and that these points are the only ones mapped into zero.

It is natural to ask whether for $y=[\eta_1,\ldots,\eta_n,\ldots]$ sufficiently small in norm, there exists a curve Γ_y which is mapped into y by f, and how Γ_y is related to Γ_0. We now present a theorem that gives some answers, although at the cost of some unwieldy hypotheses.

5.1. *Theorem. Let $\mathfrak{T}$ be a metric space and φ_0 a continuous function on $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ such that $\varphi(t_0)=x_0$ and $f(\varphi_0(t))=y_0$, $t\in\mathfrak{T}$. Suppose that f is in class $C'(S(x_0,1))$, and that there exists a number N such that if $\|x-x_0\|<1$ and $y\in\mathfrak{Y}$, then there is at least one $z\in\mathfrak{X}$ with $\|z\|\leq N\|y\|$ such that $f'(x|z)=y$.*

Then there are positive numbers p, q such that if $\|y_1 - y_0\| < p$, there is a continuous function φ_1 defined for dist $(t, t_0) < q$ and with values in $\mathfrak{X}$ such that $f(\varphi_1(t)) = y_1$ and $\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < 2N\,p$, for any t with dist $(t, t_0) < q$.

Proof. The proof is based upon a result in [4]. Let $\mathfrak{X}_B$ and $\mathfrak{Y}_B$ denote the BANACH spaces of bounded continuous functions from $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$, respectively. We define a mapping $\lambda: \mathfrak{X}_B \to \mathfrak{Y}_B$ by

$$\lambda(\varphi)[t] \equiv f'(x_0|\varphi(t)), \qquad \varphi \in \mathfrak{X}_B,$$

and we set $G: \mathfrak{X}_B \to \mathfrak{Y}_B$ equal to

$$G(\varphi)[t] \equiv f[\varphi(t) + \varphi_0(t)] - y_0$$

whenever φ is small enough so that this last function is meaningful. Note that $G(0) = 0$; let $\delta > 0$ be such that if $\|x - x_0\| < \delta$ then $\|f'(x) - f'(x_0)\| < 1/2N$, and let $q > 0$ be such that if dist $(t, t_0) < q$ then $\|\varphi_0(t) - x_0\| < \delta/2$. If $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{X}_B$ and $\|\psi_i\| < \delta/2$, the Meanvalue theorem readily enables us to conclude that

$$\|G(\psi_1)[t] - G(\psi_2)[t] - \lambda(\psi_1 - \psi_2)[t]\| \leq \frac{1}{2N}\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|.$$

By Theorem 5 of [4] we have that if $\|y_1 - y_0\| < p$, where $p = \delta/4N$, then the equation $G(\varphi) = y_1 - y_0$ has a solution $\psi \in \mathfrak{X}_B$ such that

$$\|\psi(t)\| \leq 2N\|y_1 - y_0\|.$$

Now let φ_1 be defined by $\varphi_1(t) \equiv \varphi_0(t) + \psi(t)$; we conclude that

$$f(\varphi_1(t)) = y_1, \qquad \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < 2N\,p,$$

for any t with dist $(t, t_0) < q$.

This result permits us to conclude the existence of a solution curve φ_1 defined for t near t_0. If it happens that $\mathfrak{T}$ is compact, then by choosing y_1 sufficiently near to y_0, we can obtain a solution curve φ_1 which is defined on all of $\mathfrak{T}$.

5.2. *Theorem. Let $\mathfrak{T}$ be a compact metric space and φ_0 a continuous function on $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ such that $f(\varphi_0(t)) = y_0$, $t \in \mathfrak{T}$. Suppose that f is in class $C'(\mathfrak{X})$ and that the operator $f'(x)$ maps onto $\mathfrak{Y}$, for all $x \in \mathfrak{X}$. Then there exist positive numbers p_0 and K such that if $\|y_1 - y_0\| < p < p_0$, there exists a continuous function φ_1 on all of $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ such that*

$$f(\varphi_1(t)) = y_1, \qquad \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < Kp, \qquad t \in \mathfrak{T}.$$

It is easy to construct a proof of this theorem from the previous one using techniques that are current in this paper and in [4]. Since it is detailed but not difficult, we do not give it here.

References.

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Monografje Matematyczne, Warsaw 1932. — [2] BANACH, S.: Über metrische Gruppen. Studia Math. **3**, 101—113 (1931). — [3] BARTLE, R. G.: Singular points of functional equations. Trans. Amer.

Math. Soc. **75**, 366—384 (1953). — [*4*] BARTLE, R. G., and L. M. GRAVES: Mappings between function spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 400—413 (1952). — [*5*] CACCIOPPOLI, R.: Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **3**, 13—34 (1927). — [*6*] FICKEN, F. A.: The continuation method for functional equations. Comm. on Pure a. Appl. Math. **4**, 435—456 (1951). — [*7*] FRIEDRICHS, K. O.: Functional analysis. Institute for Math. and Mech., New York Univ., 1950. — [*8*] GRAVES, L. M.: Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 163—177 (1927). — [*9*] GRAVES, L. M.: Some mapping theorems. Duke Math. J. **17**, 111—114 (1950). — [*10*] HILDEBRANDT, T. H., and L. M. GRAVES: Implicit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 127—153 (1927). — [*11*] HYERS, D. H.: Linear topological spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 1—21 (1945). — [*12*] LÉVY, P.: Sur les fonctions de ligne implicites. Bull. Soc. Math. France **48**, 13—27 (1920). — [*13*] MICHAL, A. D.: First order differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups. Rev. Ciencias, Lima **47**, 389—422 (1945). — [*14*] MICHAL, A. D.: Higher order differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups. Rev. Ciencias, Lima **43**, 155—176 (1941). — [*15*] MILLSAPS, K.: Differential calculus in topological groups. I—II. Rev. Ciencias, Lima **44**, 485—492 (1942); **45**, 45—52 (1943). — [*16*] MIRANDA, C.: Problemi di esistenza in analisi funzionale. Scuola Normale Superiore Pisa, Litografia Tacchi. Pisa 1949. — [*17*] PETTIS, B. J.: On continuity and openness of homomorphisms in topological groups. Ann. of Math. **52**, 293—308 (1950).

Dept. of Math., Yale University, New Haven, Connecticut (U.S.A.).

(Eingegangen am 31. Januar 1955.)

MEINARDUS, G.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 347—351 (1955)

Über die Kroneckersche Grenzformel.

Von
GÜNTER MEINARDUS.

§ 1.

Jede positiv definite binäre quadratische Form läßt sich mit einer komplexen Zahl $\tau = x + iy$, $y > 0$, bis auf einen Faktor in der Gestalt $|n + m\tau|^2$ schreiben. Ist dann

$$(1) \qquad Z(\tau, s) = \sum_{\substack{n,m \\ n^2+m^2>0}} |n + m\tau|^{-2s}, \qquad Re(s) > 1,$$

die Zetafunktion dieser Form, so lautet die von KRONECKER [1] entdeckte Grenzformel

$$(2) \qquad \lim_{s\to 1}\left\{Z(\tau, s) - \frac{\pi}{y(s-1)}\right\} = -\frac{2\pi}{y}\log\{\eta(\tau)\eta(-\bar{\tau})\} - \frac{2\pi}{y}\log y + \frac{2\pi}{y}(\gamma - \log 2),$$

wobei $\bar{\tau} = x - iy$, γ die EULERsche Konstante und

$$(3) \qquad \eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n \tau}), \qquad Im(\tau) > 0,$$

die DEDEKINDsche η-Funktion ist. Für die Formel (2), die eine große algebraische sowie funktionentheoretische Bedeutung besitzt, gibt es bereits mehrere Beweise, vgl. etwa WEBER [2], LERCH [3], FRANEL [4], MERTENS [5], LANDAU [6], EPSTEIN [7]. Kürzlich gab Herr KOECHER [8] einen Beweis, der auf den Transformationseigenschaften der Funktion $\eta(\tau)$ bei Anwendung von Modulsubstitutionen beruht, d.h. im wesentlichen auf der Beziehung

$$(4) \qquad \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) = \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Es geht daraus hervor, daß sich im Prinzip jeder Beweis von (4) zu einem Beweis von (2) umgestalten läßt.

Von dieser Überlegung ausgehend soll hier ein neuer Beweis von (2) gegeben werden, der nur die beiden Formeln

$$(5) \qquad \pi \operatorname{ctg} \pi w = \frac{1}{w} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w+m} + \frac{1}{w-m}\right), \qquad w \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

und

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |w + iy|^{-2s}\, dw = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\, y^{1-2s}, \quad y > 0, \qquad Re(s) > \frac{1}{2},$$

benutzt. Der nach der obigen Bemerkung zugeordnete Beweis von (4) wurde mir vor einiger Zeit von Herrn Prof. SIEGEL[1]) mündlich mitgeteilt.

Die Formel (2) soll hier in der Gestalt

$$(7)\qquad \lim_{s\to 1}\left\{Z(\tau,s)-\frac{2\sqrt{\pi}\,y^{-2s+1}\,\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\,\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)}\right\}=-\frac{2\pi}{y}\log\{\eta(\tau)\,\eta(-\bar{\tau})\}$$

bewiesen werden. Die Äquivalenz von (2) und (7) erkennt man aus den Relationen

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma;\qquad \Gamma'(1)=-\gamma;\qquad \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\pi}(\gamma+2\log 2).$$

§ 2.

1. Es sei s reell und größer als 1. Weiter bedeuten α und β zwei feste reelle Zahlen mit $0<\alpha<1$, $0<\beta<\frac{\gamma}{2}$ und N eine natürliche Zahl. Unter $\mathfrak{W}_N$ verstehen wir den geschlossenen Integrationsweg, der die Punkte $N+\frac{1}{2}+i\beta$, $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$, $N+\frac{1}{2}-i\beta$ und $N+\frac{1}{2}+i\beta$ jeweils geradlinig in der angegebenen Reihenfolge verbindet. Ist m ganz-rational, so folgt auf Grund von (5) nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{W}_N}\{(w+m\tau)\,(w+m\bar{\tau})\}^{-s}\operatorname{ctg}\pi w\,dw=2\sum_{n=1}^{N}|n+m\tau|^{-2s}.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$(8)\qquad h(w,\tau,s)=\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{+\infty}\{(w+m\tau)\,(w+m\bar{\tau})\}^{-s}$$

auf dem Integrationsweg für $s>\frac{1}{2}$ in w erhält man durch Summation

$$2\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 1}}^{+\infty}|n+m\tau|^{-2s}=\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{W}_N}h(w,\tau,s)\operatorname{ctg}\pi w\,dw.$$

Nach (1) ergibt sich

$$(9)\qquad Z(\tau,s)=2\zeta(2s)\,(1+|\tau|^{-2s})+\frac{1}{i}\lim_{N\to\infty}\int_{\mathfrak{W}_N}h(w,\tau,s)\operatorname{ctg}\pi w\,dw.$$

Wir setzen $\mathfrak{W}_N=\mathfrak{W}_{1,N}+\mathfrak{W}_{2,N}$, wobei $\mathfrak{W}_{1,N}$ das oberhalb und $\mathfrak{W}_{2,N}$ das unterhalb der reellen Achse verlaufende Teilstück von $\mathfrak{W}_N$ bedeute. Nach dem CAUCHYschen Satz ist

$$-\int_{\mathfrak{W}_{1,N}}h(w,\tau,s)\,dw+\int_{\mathfrak{W}_{2,N}}h(w,\tau,s)\,dw=\int_{-(N+\frac{1}{2})}^{-\alpha}h(-w,\tau,s)\,dw+\int_{\alpha}^{N+\frac{1}{2}}h(w,\tau,s)\,dw$$
$$=\int_{-(N+\frac{1}{2})}^{N+\frac{1}{2}}h(w,\tau,s)\,dw-\int_{-\alpha}^{+\alpha}h(w,\tau,s)\,dw,$$

[1]) Vgl. SIEGEL, C. L.: A simple proof of $\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\eta(\tau)\sqrt{\frac{\tau}{i}}$. Mathematika 1, Nr. 4, 4 (1954).

denn es ist $h(-w, \tau, s) = h(w, \tau, s)$. Nach (6) gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(w, \tau, s)\, dw = \frac{2\sqrt{\pi}\, y^{-2s+1}\, \Gamma(s-\tfrac{1}{2})\, \zeta(2s-1)}{\Gamma(s)}.$$

Setzen wir noch

$$K(\tau, s) = Z(\tau, s) - \frac{2\sqrt{\pi}\, y^{-2s+1}\, \Gamma(s-\tfrac{1}{2})\, \zeta(2s-1)}{\Gamma(s)}, \tag{10}$$

so ergibt sich mit (9) die Beziehung

$$\left\{ \begin{aligned} K(\tau, s) &= 2\zeta(2s)\,(1+|\tau|^{-2s}) - \int_{-\alpha}^{+\alpha} h(w, \tau, s)\, dw + \\ &+ \frac{1}{i} \lim_{N\to\infty} \Big\{ \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} h(w, \tau, s)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} h(w, \tau, s)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw \Big\}. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

2. Die Konvergenz des letzten Ausdruckes ist gleichmäßig in s, wie man den vorstehenden Betrachtungen entnimmt, falls s in einer hinreichend kleinen Umgebung von $s=1$ angenommen wird. Aus (11) erhalten wir demnach

$$\left\{ \begin{aligned} K(\tau, 1) &= \frac{\pi^2}{3}\,(1+|\tau|^{-2}) - \int_{-\alpha}^{+\alpha} h(w, \tau, 1)\, dw + \\ &+ \frac{1}{i} \lim \Big\{ \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw \Big\}. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Man prüft leicht, daß

$$h(w, \tau, 1) = g(w, \tau) + g(w, -\bar{\tau}) \tag{13}$$

ist, mit

$$g(w, \tau) = \frac{2\tau}{\tau - \bar{\tau}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - m^2\tau^2}. \tag{14}$$

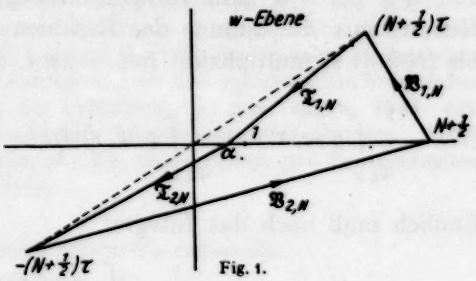


Fig. 1.

Diese Funktion ist bei festem $y>0$ in der ganzen w-Ebene regulär bis auf die Stellen $w = m\tau$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dort liegen Pole erster Ordnung vor mit den Residuen $\frac{1}{(\tau-\bar{\tau})\, m}$. Nach (5) läßt sich $g(w, \tau)$ im wesentlichen durch die Funktion $\operatorname{ctg} \frac{\pi w}{\tau}$ darstellen, was wir hier nicht verwenden. Es wird nun

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw \\ &\qquad = H_N(\tau) + H_N(-\bar{\tau}), \end{aligned} \right. \tag{15}$$

mit

$$H_N(\tau) = \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} g(w, \tau)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} g(w, \tau)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw. \tag{16}$$

Es seien $\mathfrak{B}_{1,N}$, $\mathfrak{B}_{2,N}$, $\mathfrak{T}_{1,N}$ und $\mathfrak{T}_{2,N}$ die in der Zeichnung angegebenen geradlinigen Integrationswege. Ersetzen wir in (16) die Wege $\mathfrak{W}_{1,N}$ bzw. $\mathfrak{W}_{2,N}$ durch $\mathfrak{B}_{1,N} + \mathfrak{T}_{1,N}$ bzw. $\mathfrak{T}_{2,N} + \mathfrak{B}_{2,N}$, so ändert sich nach dem CAUCHYschen

Integralsatz der Wert von $H_N(\tau)$ nicht. Auf $\mathfrak{B}_{1,N}$ ist $w=(N+\frac{1}{2})\,(1+t\,(\tau-1))$ zu setzen, wo der Parameter t von 0 bis 1 läuft. Nehmen wir $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{N}}$ an, so ist für $0\leq t\leq\varepsilon$ offenbar $|\operatorname{ctg}\pi w+i|$ beschränkt. Für $\varepsilon\leq t\leq 1$ gilt aber

$$|\operatorname{ctg}\pi w+i|=\left|\frac{2ie^{2\pi iw}}{e^{2\pi iw}-1}\right|\leq c_1 e^{-2\pi\varepsilon y(N+\frac{1}{2})},$$

wo c_1 eine von w und N unabhängige positive Konstante ist. Da $g(w,\tau)$ auf $\mathfrak{B}_{1,N}$ beschränkt bleibt, erhält man

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathfrak{B}_{1,N}} g(w,\tau)\,(\operatorname{ctg}\pi w+i)\,dw=0. \tag{17}$$

Analog folgt

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathfrak{B}_{2,N}} g(w,\tau)\,(\operatorname{ctg}\pi w-i)\,dw=0. \tag{18}$$

Weiter ist

$$\int_{\mathfrak{T}_{1,N}} g(w,\tau)\,dw-\int_{\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\,dw=\int_{-\alpha}^{(N+\frac{1}{2})\tau} g(w,\tau)\,dw+\int_{(N+\frac{1}{2})\tau}^{+\alpha} g(w,\tau)\,dw.$$

Die Integrale werden dabei geradlinig erstreckt. Fügen wir noch das Intervall von $+\alpha$ bis $-\alpha$ zum Integrationsweg hinzu, so erhalten wir nach dem Residuensatz die Summe der Residuen von $g(w,\tau)$ auf der Strecke von 0 bis $(N+\frac{1}{2})\,\tau$, multipliziert mit $-2\pi i$, d.h.

$$\int_{\mathfrak{T}_{1,N}} g(w,\tau)\,dw-\int_{\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\,dw=\int_{-\alpha}^{+\alpha} g(w,\tau)\,dw-\frac{2\pi i}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}. \tag{19}$$

Endlich muß noch das Integral

$$\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{T}_{1,N}+\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\operatorname{ctg}\pi w\,dw$$

berechnet werden. Der Integrand stellt eine ungerade Funktion dar. Für den doppelten Wert des Integrales erhalten wir also das Integral über einen geschlossenen Integrationsweg, der die Verbindungsstrecke von $-(N+\frac{1}{2})\,\tau$ und $(N+\frac{1}{2})\,\tau$ in negativem Sinne umschließt. Der Residuensatz ergibt

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{T}_{1,N}+\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\operatorname{ctg}\pi w\,dw&=\frac{-2\pi}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\operatorname{ctg}\pi m\tau-g(0,\tau)\\&=\frac{2\pi}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{i}{m}\left(1+\frac{2}{e^{-2\pi im\tau}-1}\right)+\frac{\pi^2}{3\tau(\tau-\bar{\tau})}\\&=\frac{2\pi i}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}+\frac{4\pi i}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m(e^{-2\pi im\tau}-1)}+\frac{\pi^2}{3\tau(\tau-\bar{\tau})},\end{aligned}$$

wobei Gl. (14) benutzt wurde. Fassen wir die letzte Beziehung mit den Formeln (16) bis (19) zusammen, so erhalten wir

$$\lim_{N\to\infty} H_N(\tau) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} g(w,\tau)\,dw + \frac{4\pi i}{\tau-\bar{\tau}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(e^{-2\pi i m\tau}-1)} + \frac{\pi^2}{3\tau(\tau-\bar{\tau})}. \tag{20}$$

Nach Gl. (3) ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(e^{-2\pi i m\tau}-1)} = -\log\eta(\tau) + \frac{\pi i\tau}{12}, \tag{21}$$

so daß die Gln. (12), (13), (15), (16), (20) und (21) die Aussage

$$K(\tau,1) = -\frac{2\pi}{y}\log\{\eta(\tau)\,\eta(-\bar{\tau})\} \tag{22}$$

liefern. Nach (10) und (11) ist durch (22) die Formel (7) bewiesen.

Literatur.

[1] Kronecker, L.: Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Sitzgsber. kgl. preuß. Akad. Wiss. Berlin **1885**, 775 u. **1889**, 135. — [2] Weber, H.: Komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Math. Ann. **33**, 390—410 (1889). — [3] Lerch, M.: Sur un théorème de Kronecker. Bull. Soc. Bohême, 2. Kl. **1893**, Nr. 9, 1—17. — [4] Franel, J.: Sur une formule fondamentale de Kronecker. Math. Ann. **48**, 595—602 (1897). — [5] Mertens, F.: Über einen asymptotischen Ausdruck. Sitzgsber. ksl. Akad. Wiss. Wien, Abt. 2a **106**, 411—421 (1898). — [6] Landau, E.: Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale. J. reine angew. Math. **125**, 64—188 (1902). — [7] Epstein, P.: Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. Math. Ann. **56**, 615—644 (1903). — [8] Koecher, M.: Ein neuer Beweis der Kroneckerschen Grenzformel. Arch. Math. **4**, 316—321 (1953).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 26. Februar 1955.)

EWEIDA, M. T.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 352—353 (1955)

On Newton's series of interpolation.

By
M. T. EWEIDA.

The series

$$(1)\qquad \begin{cases} f(a_1)+(z-a_1)f(a_1,a_2)+(z-a_1)(z-a_2)f(a_1,a_2,a_3)+\cdots \\ \qquad +(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)f(a_1,a_2,\ldots,a_{n+1})+\cdots \end{cases}$$

where $f(a_1,a_2), f(a_1,a_2,a_3),\ldots$ are the divided differences of $f(z)$ ([3] pp. 20–24), is known as Newton's series of interpolation associated with $f(z)$ and $\{a_n\}$. The convergence properties of this series have been studied extensively by many authors ([1] pp. 15–26; [2] pp. 49–64; [4] pp. 52–55). The object of this paper is to establish a convergence property of (1) if $\sum_{i=1}^{n}|a_i|=o(n)$. We prove the

Theorem. *If*

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{(i)} & \overline{\operatorname{fin}}_n\,|a_n| = A<\infty, \\ \text{(ii)} & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i|=0, \\ \text{(iii)} & f(z) \text{ is regular in } |z|<R \quad (R>A), \end{cases}$$

then the series (1) *converges uniformly to* $f(z)$ *in* $|z|\leq R_1<R$.

Proof. Let $A<R_1<R_2<R$, and $p_n(z)$ the n-th partial sum of (1) which interpolates to $f(z)$ in $a_1, a_2, \ldots, a_n$. According to Hermite's interpolation formula ([2] p. 50) we have

$$f(z)-p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_2}\frac{\omega(z)f(t)}{\omega(t)(t-z)}\,dt \qquad (|z|\leq R_1)$$

where $\omega(t)=(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$.

Therefore with a constant M

$$|f(z)-p_n(z)|\leq M\frac{\max\limits_{|z|\leq R_1}|\omega(z)|}{\min\limits_{|t|=R_2}|\omega(t)|}.$$

To estimate this, we have on one hand

$$|\omega(z)|\leq R_1^n\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{|a_i|}{R_1}\right)<R_1^n\cdot e^{\frac{1}{R_1}\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|} \qquad (|z|\leq R_1);$$

on the other hand $|a_i|/R_2\leq 1-\delta$ $(\delta>0)$ yields

$$|\omega(t)|\geq R_2^n\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{|a_i|}{R_2}\right)\geq R_2^n\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{|a_i|}{\delta R_2}\right)\right\}^{-1} \qquad (|t|=R_2).$$

It follows that

$$|f(z)-p_n(z)| \leq M \cdot R_1^n e^{\frac{1}{R_1}\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|} \cdot R_2^{-n} e^{\frac{1}{\delta R_2}\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|} < M\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n e^{\varepsilon_n n}$$

where $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$. This implies $|f(z)-p_n(z)| = o(1)$ $(n \to \infty)$, and the proof is complete.

Corollary[1]. If $a_n \to 0$ as $n \to \infty$, the theorem is applicable since (2) will be fulfilled.

Example 1[2]. We show that if the radius of regularity of $f(z)$ is equal to A and (2) is satisfied, the theorem is no more true.

Choose $a_1 = 1$, $a_n = 0$ $(n > 1)$, so that (2) holds and $A = 1$. Take $f(z) = \frac{1}{1-z}$, where the radius of regularity is one. Now $f(1) = \infty$, so that (1) is not defined for any z.

Example 2. We show that if (ii) is not satisfied and the radius of regularity of $f(z)$ is greater than A, the theorem may be false.

Choose $a_{2k+1} = 2$, $a_{2k+2} = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$, so that $\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}{n} \to \frac{3}{2}$ as $n \to \infty$. Consider $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$ whose radius of regularity is $3 > A\,(A = 2)$. If $2 < R < 3$ and n even then

$$\max_{|z|=R}|f(2, 1, 2, \ldots, 2)\cdot(z-2)^{n/2}\cdot(z-1)^{n/2}| > \frac{(R+1)^{n/2}\cdot(R+2)^{n/2}}{3^n},$$

and (1) cannot converge uniformly to $f(z)$ in $|z| \leq R$.

I wish to thank the referee for his valuable comments and suggestions.

References.

[1] GONTCHAROFF, W.: Détermination des fonctions entières par interpolation. Paris 1937. — [2] WALSH, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York 1935. — [3] WHITTAKER, E. T., and G. ROBINSON: The calculus of observations. London 1924. — [4] WHITTAKER, J. M.: Interpolatory function theory. Cambridge 1935.

[1] This result follows also from a theorem due to WALSH ([2] p. 61).

[2] See [2], p. 52.

Department of Mathematics, College of Arts and Sciences, Baghdad (Iraq).

(Eingegangen am 5. März 1955.)

SALZMANN, H., u. K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 354—367 (1955)

Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen.

Von

HELMUT SALZMANN und KARL ZELLER.

§ 1. Einleitung.

Wir betrachten Funktionen f, die in dem abgeschlossenen Intervall $I=[0,1]$ erklärt sind und dort endliche Ableitungen jeder Ordnung besitzen. Den Raum dieser Funktionen bezeichnen wir mit C^∞. Für $f\in C^\infty$ und $x\in I$ kann man die TAYLOR-Entwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} h^k f^{(k)}(x)/k!$ bilden. Wird f in einer Umgebung von x durch die TAYLOR-Entwicklung dargestellt (ist also f dort regulär-analytisch), so heißt x ein Entwicklungspunkt oder regulärer Punkt von f, andernfalls singulär. Die Singularität wird entweder hervorgerufen durch Divergenz der Entwicklung (Konvergenzradius Null, Divergenzpunkt von f) oder durch Konvergenz der Entwicklung zum falschen Wert (Fehlkonvergenzpunkt von f).

Es ist seit langem bekannt, daß eine Funktion aus C^∞ singuläre Punkte haben kann (CAUCHY [1823], DU BOIS REYMOND [1876], PRINGSHEIM [1893]) und daß sie sogar nirgends regulär sein kann (DU BOIS REYMOND [1876], MITTAG-LEFFLER (FREDHOLM) [1891], PRINGSHEIM [1893]; vgl. § 5). Wir untersuchen in § 2 die hierbei verwendeten Methoden, wobei wir auch die Theorie der linearen Räume heranziehen, und geben zwei einfache Beispiele nirgends regulärer Funktionen [(1) und (4)].

Die Kenntnis verschiedener Methoden ist wichtig für den Fall, daß man Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten gewissen Unterklassen von C^∞ entnehmen will, die z.B. durch Ungleichungen für die Ableitungen definiert sind (vgl. etwa MANDELBROJT [1942]), oder wenn man Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachtet.

In § 3, dem Hauptteil der Arbeit, behandeln wir die Frage nach der Struktur der Mengen der regulären Punkte, der Divergenz- und Fehlkonvergenzpunkte. Eine abschließende Antwort ist schon 1940 von ZAHORSKI [1946, 1947] gefunden worden (Satz 1), jedoch ist unser Beweis wesentlich einfacher.

§ 4 bringt Bemerkungen über verwandte Beweismethoden und Ergebnisse, § 5 einige geschichtliche Angaben.

Herrn H. KNESER danken wir für wertvolle Ratschläge.

§ 2. Erzeugung von Singularitäten.

Will man eine Funktion $s\in C^\infty$ mit singulären Punkten konstruieren, so hat man mehrere Alternativen: Singularität in einem Punkte a kann durch

Divergenz oder Fehlkonvergenz erzeugt werden; Singularität in allen Punkten kann man direkt oder auf dem Wege über eine dichte Punktmenge herstellen (ist s beispielsweise in den rationalen Punkten singulär, so sogar in allen Punkten). Die dabei vorkommende „Kondensation von Singularitäten" läßt sich auf „klassischem" oder funktionalanalytischem Wege bewerkstelligen. Schließlich bestehen noch die Möglichkeiten, nur im Reellen zu arbeiten oder komplexe Funktionentheorie heranzuziehen.

Die funktionalanalytische Methode — hier zuerst von MORGENSTERN [1954] eingeführt — beruht darauf, daß C^∞ mit den Halbnormen

$$\|f\|_k = \max_{x \in I} |f^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

ein (lokalkonvexer) F-Raum ist (wobei die linearen Verknüpfungen in natürlicher Weise erklärt werden). Konvergenz einer Folge f_n im Sinne dieser Topologie ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz jeder abgeleiteten Folge $f_n^{(k)}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$; fest). Wir sprechen kurz von Konvergenz in C^∞. Wesentlich ist die Vollständigkeit von C^∞ (im Sinne dieser Topologie), so daß jede CAUCHY-Folge ein Grenzelement im Raum besitzt. Die Mengen $U(\varepsilon, n)$ ($\varepsilon > 0$, n natürlich) der $f \in C^\infty$ mit

$$|f(x)|, \ldots, |f^{(n)}(x)| < \varepsilon \qquad (x \in I)$$

bilden eine Basis von Umgebungen des Nullpunktes. Durch Translation erhält man die Umgebungen der anderen Punkte.

Eine wichtige Rolle spielen noch die Ausdrücke

$$M_n(f, x) = \max_{0 \le k \le n} \sqrt[k+2]{\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!}}.$$

Wir nehmen hierbei die $(k+2)$-te Wurzel, weil dann eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit $M_n(f_n, x) < \frac{1}{n+1}$ in C^∞ konvergiert, da $|f_n^{(k)}(x)| < k!\,(n+1)^{-k-2}$ für $k = 0, \ldots, n$. Für die Abbildung $x \to M_n(f, x)$ schreiben wir $M_n(f)$.

Bei festem f und x wächst $M_n(f, x)$ monoton. $\sup_n M_n(f, x) < \infty$ ist gleichbedeutend damit, daß die TAYLOR-Entwicklung von f in x einen positiven Konvergenzradius hat. $M_n(f)$ ist in I stetig, M_n ist in C^∞ stetig und genügt der Dreiecksungleichung

$$M_n(f + g) \le M_n(f) + M_n(g).$$

Die Tatsache, daß ein $a \in I$ Divergenzpunkt einer Funktion $s \in C^\infty$ sein kann, beruht nun darauf, daß es in jedem $U(\varepsilon, n)$ ein g gibt, für das mindestens eine Ableitung in a „groß" ist (vgl. die unten benützten Funktionen const $\cdot \cos bx$, auch kann man analytische Funktionen nehmen, die in der komplexen Ebene in der Nähe von a eine Singularität haben). Damit sind die $M_n(f, a)$ in keiner offenen Menge $\neq \emptyset$ von C^∞ gleichmäßig beschränkt; die Mengen der f mit $M_n(f, a) \le M$ sind abgeschlossen und nirgends dicht in C^∞, nach dem Kategorieprinzip (BANACH [1932]) gilt $\sup_n M_n(f, a) = \infty$ in einer fetten Menge von C^∞ (magere Menge = Menge I. Kategorie, fette

Menge = Komplement einer mageren Menge). Jedes s dieser fetten Menge hat die gewünschte Eigenschaft. Man kann ein solches s auch leicht in Form einer Reihe darstellen, s. z.B. PRINGSHEIM [1893]. Nach dem Kategorieprinzip erhält man nun sofort ein $s \in C^\infty$, für das jedes rationale x Divergenzpunkt ist. Ein solches s, das also überall singulär ist, kann auch nach der Methode des gleitenden Buckels konstruiert werden (vgl. ZELLER [1953], S. 299). Die beiden Schritte „Singularität in einem Punkt", „Kondensation" lassen sich zu einem vereinigen (CARTAN [1940], MANDELBROJT [1942]).

Ohne den Umweg über die rationalen Punkte erhält man ein überall singuläres s, bei dem sogar jedes x Divergenzpunkt ist, in der Form

$$s(x) = \sum u_n(x) = \sum a_n \cos b_n x. \tag{1}$$

Dazu bestimmen wir die u_n induktiv mit geeignetem Anfangselement. Sind $u_0, \ldots, u_{n-1}$ schon so festgesetzt, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_{n-1}, x) > k \qquad (x \in I, k = 0, \ldots, n-1) \tag{2}$$

gilt, so wählen wir u_n so, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_n, x) > k \qquad (x \in I, k = 0, \ldots, n) \tag{3}$$

ist. Dies erreichen wir mit einem u_n, bei dem $M_{2n-2}(u_n)$ so klein ist, daß die n Ungleichungen (2) beim Übergang zu (3) erhalten bleiben, und bei dem $M_{2n}(u_n)$ so groß ist, daß auch die letzte Ungleichung in (3) erfüllt ist, etwa

$$M_{2n}(u_n) > n + M_{2n}(u_0 + \cdots + u_{n-1});$$

man verwende die Dreiecksungleichung. Zusätzlich können wir dabei noch die Konvergenzbedingung $M_n(u_n) < \frac{1}{n+1}$ erfüllen. Daß dies alles mit einem $u_n = u$ der Form $a \cos bx$ $(0 < a < 1 < b)$ zu erreichen ist, erkennen wir durch Betrachtung der Ableitungen der Funktion:

$$u^{(k)}(x) = \pm a b^k \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} bx, \quad \text{also} \quad |u^{(k)}(x)| \leq a b^k.$$

In jedem Punkt x ist dabei entweder die $(2n-1)$-te oder $(2n)$-te Ableitung dem Betrage nach $\geq \frac{1}{\sqrt{2}} a b^{2n-1}$. Wir wählen nun b so, daß der Größensprung von der $(2n-2)$-ten zur $(2n-1)$-ten Ableitung genügend groß ist und bewirken mit dem Faktor a, daß u_n bis zur $(2n-2)$-ten Ableitung klein ist. Wir sehen nun, daß $s = \sum u_n$ in C^∞ konvergiert und daß

$$M_{2k}(s, x) \geq k \qquad (x \in I, \ k = 0, 1, \ldots)$$

gilt, womit die gewünschten Eigenschaften nachgewiesen sind.

Statt des konstruktiven Vorgehens kann man auch das Kategorieprinzip verwenden, s. MORGENSTERN [1954] (dort erschweren aber zwei Druckfehler das Verständnis des Beweises). Genauer ergibt sich dabei, daß die Menge der gesuchten Funktionen fett ist.

Wir betrachten nun Beispiele mit Fehlkonvergenz der TAYLOR-Reihe. Am bekanntesten sind die CAUCHYschen Exponentialfunktionen, z. B.

$$\operatorname{cau}(x; a, b) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(b-a)^2}{(x-a)(b-x)}\right) & (a < x < b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Exponent entsteht hierbei aus $-\frac{1}{x(1-x)}$ durch die lineare Transformation, die 0 in a und 1 in b überführt, so daß also $\operatorname{cau}(x; a, b)$ als affines Bild von $\operatorname{cau} x = \operatorname{cau}(x; 0, 1)$ erscheint, wodurch unten die Abschätzung der höheren Ableitungen erleichtert wird. Unsere Funktion hat zwei Fehlkonvergenzpunkte in a und b, wo alle Ableitungen verschwinden; sonst ist sie regulär.

Vom allgemeinen Standpunkt aus sind Divergenz und Fehlkonvergenz der TAYLOR-Entwicklung zwei ganz verschiedene Erscheinungen. Tritt Fehlkonvergenz im Punkt a auf, so bedeutet das, daß die Funktionale $\varphi_n(f) = f^{(n)}(a)$ keine totale Menge bilden, d. h. daß es ein $f \neq 0$ in C^∞ mit $\varphi_n(f) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ gibt. Eine ausführlichere Deutung ist mit Hilfe des dualen Raumes zu C^∞ möglich. Wir verzichten darauf, weil wir dabei mit komplizierteren Topologien arbeiten müßten. — Weiter ist zu beachten, daß die Menge der f mit Fehlkonvergenz in a eine magere Menge in C^∞ bildet, was verschiedene Untersuchungen erschwert. Trotzdem kann man Fehlkonvergenz in a ähnlich wie Divergenz in a (s. oben) herstellen, wenn man beachtet, daß es in jedem $U(\varepsilon, n)$ ein u mit vorgeschriebenem $u^{(n+1)}(a)$ gibt. Dies gestattet eine C^∞-konvergente Reihe $s = \sum u_n$ aufzustellen, bei der man durch geeignete induktive Wahl der u_n dafür sorgt, daß alle Ableitungen von s in a klein sind (im Vergleich zum Verlauf von s bei a) und damit Fehlkonvergenz erzeugt; s. etwa PRINGSHEIM [1893, 1894]. Diese Konstruktion gestattet, Fehlkonvergenz auch bei Funktionen aus gewissen Untermengen von C^∞ (vgl. oben) zu erhalten, und damit auch die späteren, $\operatorname{cau}(x)$ verwendenden Untersuchungen auf diese Klassen auszudehnen.

Auch die Kondensation CAUCHYscher Singularitäten ist möglich. Die Funktion

$$s(x) = \sum a_n \operatorname{cau}(x; p_n, r_n) \tag{4}$$

hat jedes rationale x als Fehlkonvergenzpunkt (und ist damit überall singulär), wenn wir folgende Festsetzungen treffen: $r_0, r_1, \ldots$ durchläuft die rationalen Punkte des Inneren von I und $p_n < r_n$ ist ein irrationaler Punkt derart, daß im Intervall $[p_n, r_n]$ kein r_k mit $k < n$ liegt. Die $a_n > 0$ sind so klein, daß die Reihe in C^∞ konvergiert. (Ordnen wir z. B. die r_n nach wachsendem Nenner, so ist $|r_n - r_k| \geq \frac{1}{(n+1)^2}$ für $k < n$, und mit $r_n - \frac{1}{(n+1)^2} < p_n < r_n - \frac{1}{2(n+1)^2}$ sind wegen $\|\operatorname{cau}(x; p_n, r_n)\|_k = (r_n - p_n)^{-k} \|\operatorname{cau} x\|_k$ mit $a_n = 2^{-n}$ unsere Forderungen erfüllt.) $s(x)$ hat in r_n einen Fehlkonvergenzpunkt; denn $\sum_{k=0}^{n-1}$ ist

dort regulär, wogegen alle Ableitungen des bei r_n nicht identisch verschwindenden Restes $\sum_{k=n}^{\infty}$ in r_n verschwinden.

Wir deuten zwei weitere Möglichkeiten zur Erzeugung von Singularitäten an. Es gibt unendlich viele in $0<x<1$ reguläre Funktionen mit vorgeschriebenen Randableitungen $f^{(n)}(0), f^{(n)}(1)$ (s. BESIKOWITSCH [1924], EIDELHEIT [1938], PÓLYA [1938/39], MEYER-KÖNIG-ZELLER [1954]). Leichte Zusatzüberlegungen gestatten die Erzeugung von Divergenz- und Fehlkonvergenzpunkten im Inneren von I. — Läßt man komplexwertige Funktionen zu, so erhält man ein überall singuläres s als Randwert einer geeigneten nicht fortsetzbaren Funktion (MITTAG-LEFFLER [1891]).

§ 3. Der Satz von ZAHORSKI.

Der folgende Satz gibt eine genaue Charakterisierung der bei Funktionen aus C^∞ auftretenden Singularitätenmengen. Er wurde von ZAHORSKI im Jahre 1940 gefunden und später veröffentlicht ([1946, 1947]). Wir bringen hier einen Beweis, der — vor allem für den zweiten Teil des Satzes — wesentlich einfacher als der von ZAHORSKI ist. Auch BANG [1949] hat einen einfacheren Beweisweg vorgeschlagen; bis jetzt stand uns von dieser Arbeit jedoch nur ein Referat zur Verfügung.

Satz 1 (ZAHORSKI). *Für eine Zerlegung von I in drei paarweise disjunkte Teilmengen D, E, F sind folgende Eigenschaften gleichbedeutend:*

(I) *Es gibt ein $s\in C^\infty$, so daß E die Menge der regulären Punkte von s ist, D die Menge der Divergenzpunkte und F die Menge der Fehlkonvergenzpunkte.*

(II) *E ist offen, F eine magere F_σ-Menge, D das Komplement von $E\cup F$, also eine G_δ-Menge.*

Beweis. Aus (I) folgt (II). $E\cup F$ ist die Menge der x mit $\sup_n M_n(s,x)<\infty$, also eine F_σ-Menge. E ist offen. Daher ist $F=(E\cup F)-E$ eine F_σ-Menge (Subtraktion einer offenen Menge entspricht Durchschnittsbildung mit einer abgeschlossenen). Wir müssen noch zeigen, daß F mager ist. Wäre F nicht mager, so würde F als F_σ-Menge ein volles Intervall[1]) I_1 enthalten. Dies ist jedoch nicht möglich; denn es gilt der folgende Hilfssatz, der zuerst von BOAS [1935] aufgestellt wurde:

Hilfssatz 2. *Ist $\sup_n M_n(f,x)<\infty$ für $x\in I_1$, so ist $M_n(f,x)$ gleichmäßig beschränkt in einem Teilintervall $I_2\subset I_1$ und f regulär im Inneren von I_2.*

Beweis. Der erste Teil des Hilfssatzes folgt nach der üblichen Kategoriemethode (vgl. etwa BANACH [1932], S. 14). Der zweite Teil folgt leicht aus der TAYLOR-Entwicklung mit LAGRANGEschem Restglied:

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\frac{f^{(n)}(x+\vartheta h)}{n!}h^n \qquad (0<\vartheta<1),$$

[1]) Ein *Intervall* soll immer innere Punkte enthalten.

da ja $\frac{|f^{(n)}(y)|}{n!} < K^{n+2}$ für $y \in I_2$, so daß das Restglied gegen Null geht, wenn x im Inneren von I_2 und h genügend klein ist.

Aus (II) folgt (I). Wir konstruieren zunächst ein $t \in C^\infty$, das D als Menge der Divergenzpunkte hat. Dabei verwenden wir eine Methode, die bei F_σ-Konvergenzmengen zuerst von HERZOG-PIRANIAN [1949] angewandt wurde. D ist Durchschnitt einer absteigenden Folge offener Mengen. Indem wir jede dieser Mengen als Summe offener Intervalle darstellen und jedes der offenen Intervalle als Vereinigung abgeschlossener, von denen je zwei höchstens einen Randpunkt gemeinsam haben, erhalten wir nach Anordnung der abgeschlossenen Intervalle zu einer Folge B_n eine Darstellung von D in der Form:

Ein Punkt x gehört genau dann zu D, wenn er unendlich vielen B_n angehört.

Die Intervalle B_n vergrößern wir vorsichtig zu Intervallen A_n, die B_n im Inneren enthalten und ebenfalls die genannte Darstellungseigenschaft haben. Nun erhalten wir die gesuchte Funktion t in der Form

$$t(x) = \sum u_n(x),$$

wobei die u_n nach der folgenden Vorschrift induktiv bestimmt werden unter den Zusatzbedingungen:

$$u_n(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \text{ außerhalb } A_n$$

$$M_n(u_n, x) < \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } x.$$

Die Induktionsvorschrift lautet: Sind $u_0, \ldots, u_{n-1}$ so bestimmt, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_{n-1}, x) > k \qquad (x \in B_k,\ k = 0, \ldots, n-1)$$

gilt, so wählen wir u_n so, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_n, x) > k \qquad (x \in B_k,\ k = 0, \ldots, n)$$

ist. Dazu bestimmen wir u_n derart, daß $M_{2n-2}(u_n, x)$ für alle x so klein ist, daß die vorausgesetzten Ungleichungen durch das Hinzutreten von u_n nicht zerstört werden, und derart, daß $M_{2n}(u_n, x)$ so groß ist, daß auch die letzte Ungleichung erfüllt ist. Das geeignete u_n erhalten wir mit

Hilfssatz 3. *A und B seien abgeschlossene Teilintervalle von I und B sei im Inneren von A enthalten. Eine natürliche Zahl m und ein $\varepsilon > 0$ seien gegeben. Dann existiert eine Funktion $u \in C^\infty$ mit den Eigenschaften:*

$$u(x) = 0 \qquad (x \text{ außerhalb } A),$$

$$M_m(u, x) < \varepsilon \qquad (x \in I),$$

$$M_{m+2}(u, x) > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (x \in B).$$

Beweis. Durch Integration und Zusammenstückeln von zwei Funktionen der Form cau x erhalten wir ein $v \in C^\infty$, das außerhalb A verschwindet und

in B identisch gleich 1 ist. Die gesuchte Funktion ist dann von der Form $u(x)=a\cdot v(x)\cdot\cos bx$ $(0<a<1<b)$. Nach der LEIBNIZ-Regel gilt für die ersten m Ableitungen eine Ungleichung

$$|u^{(k)}(x)|\leq 2^m a b^m K \qquad (k=0,\ldots,m).$$

In jedem Punkt $x\in B$ ist ferner die $(m+1)$-te oder $(m+2)$-te Ableitung

$$\geq \frac{a b^{m+1}}{\sqrt{2}}.$$

Geeignete Wahl von a und b (vgl. § 2) ergibt die gewünschte Funktion.

Man sieht, daß t die geforderten Eigenschaften hat: Wegen der Konvergenzbedingung (zweite Zusatzbedingung bei der Bestimmung der u_n) existiert t und gehört zu C^∞. Ist $x\in D$, so gehört x unendlich vielen B_n an. Somit gilt für dieses x und unendlich viele n die Ungleichung

$$M_{2n}(t,x)\geq n.$$

Daher ist x Divergenzpunkt. Ist $x\notin D$, so gehört x nur endlich vielen A_n an. In der Summe $\sum u_n$ sind daher nur endlich viele Glieder nicht identisch Null bei x. Da die u_n keine Divergenzpunkte haben, folgt daß x kein Divergenzpunkt von t ist, w. z. b. w.

Die Funktion t hat nun zwar die geforderten Divergenzpunkte, über die Verteilung der regulären Stellen und Fehlkonvergenzpunkte wissen wir aber nicht Bescheid. Durch Abänderung von t in gewissen Intervallen erhalten wir jedoch ein s mit der geforderten Singularitätenverteilung. Dazu benützen wir

Hilfssatz 4. *Eine Funktion $f\in C^\infty$, ein $\varepsilon>0$ und eine natürliche Zahl m seien gegeben. Dann existiert ein $g\in C^\infty$ mit den Eigenschaften:*

$$g(x) \text{ ist regulär für } 0<x<1 \text{ und singulär in } 0 \text{ und } 1,$$
$$g^{(k)}(0)=f^{(k)}(0),\ g^{(k)}(1)=f^{(k)}(1) \qquad (k=0,1,\ldots),$$
$$|g^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)|<\varepsilon \qquad (x\in I;\ k=0,\ldots,m).$$

Beweis. Wir sehen zunächst von der Behauptung „singulär in 0 und 1" ab. Nach BESIKOVIČ [1924], § 4 (s. auch oben am Ende von § 2) gibt es eine für $0<x<1$ reguläre Funktion, welche dieselben Randableitungen wie f hat. Wir dürfen daher annehmen, daß alle Randableitungen von f verschwinden. Weiter gehen wir nun induktiv vor. Die Behauptung ist richtig für $m=0$: Wir setzen einfach

$$g(x)=h(x)\operatorname{cau} x$$

und wählen $h(x)$ als Polynom so, daß

$$\left|h(x)-\frac{f^\wedge(x)}{\operatorname{cau} x}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (x\in I)$$

ist, wobei $f^\wedge$ aus f durch eine geringfügige Abänderung entsteht, derart, daß $|f^\wedge(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ für $x\in I$ gilt und $f^\wedge$ stetig und in Umgebungen der Rand-

punkte identisch Null ist. Dann ist $f^{\wedge}(x)/\operatorname{cau} x$ stetig in I und wegen $|\operatorname{cau} x|<1$ folgt die Behauptung für $m=0$. Ist nun die Behauptung für $m-1$ bewiesen, so gilt sie auch für m: Nach der Induktionsvoraussetzung approximiert man nämlich zunächst die Funktion $f^*=f'$ durch ein g^* bis zur $(m-1)$-ten Ableitung mit einer Genauigkeit $<\eta<\varepsilon$. Die Funktion

$$G^*(x)=\int_0^x g^*(y)\,dy$$

hat dann alle gewünschten Eigenschaften bis auf die eine: $G^*(1)$ kann $\neq 0$ sein. Es ist aber sicher $|G^*(1)|<\eta$. Wir addieren nun zu $G^*(x)$ eine Korrekturfunktion der Form $a\int_0^x \operatorname{cau} y\,dy$, so daß die neue Funktion $g(x)$ auch in 1 verschwindet. Wenn η genügend klein ist, erfüllt $g(x)$ alle unsere Forderungen. Singularität in den Randpunkten erreicht man nachträglich durch Addition von b cau x (b geeignet, klein).

Wir schreiten nun zur Abänderung von $t(x)$. E besteht aus abzählbar vielen offenen Intervallen $E_0, E_1, \ldots$. Wir dürfen annehmen, daß es unendlich viele verschiedene Intervalle sind, der Fall endlich vieler bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Nach Hilfssatz 4 ersetzen wir $t(x)$ in E_m durch eine Funktion $g(x)$, die in E_m regulär ist, in den Randpunkten von E_m dieselben Ableitungen wie $t(x)$ hat, in diesen Punkten singulär ist und in E_m die Funktion t bis zur m-ten Ableitung bis auf $\frac{1}{m+1}$ genau approximiert. Führen wir diese Abänderungen fortlaufend durch, so erhalten wir eine Funktionenfolge t_0 (t in E_0 abgeändert), $t_1, t_2, \ldots$. Die Folge t_m konvergiert in C^∞ gegen eine Grenzfunktion s. Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften; denn ist

1. $x\in D$, so ist $s^{(k)}(x)=t^{(k)}(x)$ für $k=0, 1, \ldots$ und x ist Divergenzpunkt von s;

2. $x\in E$, so gehört x zu einem E_m, es gilt $s=t_m$ in E_m und s ist regulär in x;

3. $x\in F$, so ist $s^{(k)}(x)=t^{(k)}(x)$ für $k=0, 1, \ldots$ und x ist Konvergenzpunkt von s. Weil F mager ist, gehört x zur abgeschlossenen Hülle $\bar{D}$ oder $\bar{E}$, im zweiten Falle ist x Randpunkt eines E_m oder Häufungspunkt von solchen, in jedem Falle also Berührpunkt singulärer Punkte von s und damit selbst singulär.

§ 4. Bemerkungen.

Wählt man die Ersatzfunktionen am Ende unserer Konstruktion nicht so, daß sie in den Endpunkten von E_m singulär ist, so erhält man möglicherweise zu viel reguläre Punkte. Dies kann jedoch leicht mit Hilfssatz 5 (s. unten) korrigiert werden.

Sind D, E, F so beschaffen, daß die Endpunkte der Komponenten von E zu F gehören, so kann man die Intervalle A_n, B_n so wählen, daß ihre Endpunkte in D oder F liegen: In der Durchschnittsdarstellung von D (s. § 3) darf man annehmen, daß jede Komponente K jeder offenen Menge ein $x\in D$

enthält. Wegen unserer Zusatzvoraussetzung können wir eine strengmonotone Folge singulärer $x_p \in K$ $(-\infty < p < \infty)$ bestimmen, so daß jedes $x \in D \cap K$ in einem Intervall x_p, x_q liegt. Wir machen nun einfach jedes Quadrupel $x_p, \ldots, x_{p+3}$ zum Endpunktsystem eines Intervallpaares A_n, B_n. — Der erste Teil unserer Konstruktion in § 3 liefert dann eine Funktion ohne überflüssige Fehlkonvergenzpunkte, so daß die Abänderung in den E_m nicht mehr nötig ist. Etwa fehlende Fehlkonvergenzpunkte können nach Hilfssatz 5 hinzugefügt werden. Zu einer Konstruktion im allgemeinen Fall gelangt man, indem man die so gefundene Funktion derart abändert, daß gewisse weitere Punkte y_p Divergenzpunkte werden. Dies erreicht man am besten während der Kondensation durch Zusatzelemente.

Ein anderer Weg beruht auf folgendem Ergebnis (s. WHITNEY [1934], BOAS [1935], GANAPATHY IYER [1944]):

Hilfssatz 5. *Ist F eine abgeschlossene nirgendsdichte Teilmenge von I, so gibt es ein $u \in C^\infty$ mit $u(x) \geq 0$, das in $I - F$ regulär ist und F als Menge der Fehlkonvergenzpunkte besitzt. Dabei verschwinden für $x \in F$ alle Ableitungen von u.*

Beweis. Man erhält u in der Form

$$u(x) = \sum c_k \operatorname{cau}(x; a_k, b_k),$$

wo a_k, b_k die Endpunkte der Komplementintervalle von F durchläuft und die $c_k > 0$ so gewählt werden, daß die Reihe in C^∞ konvergiert (vgl. § 2).

Ist nun F gemäß unserem Satz vorgegeben, so stellt man F als Vereinigung aufsteigender abgeschlossener nirgendsdichter Mengen F_n dar und bildet zu jedem F_n nach Hilfssatz 5 ein u_n. In der Form

$$t(x) = \sum d_n u_n(x)$$

erhält man ein t in C^∞, für das jedes $x \in F$ Fehlkonvergenzpunkt ist. Durch geschickte Wahl der $d_n > 0$ erreicht man, daß jeder nicht zu F gehörige Häufungspunkt von F ein Divergenzpunkt der Funktion t ist: Sei

$$B_{km} = \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{m+1} \leq \text{Abstand}\,(x, F_k) \leq \frac{1}{m+2} \right\}.$$

Wir bestimmen die d_n induktiv. Sind $d_0, \ldots, d_n$ festgelegt, so wählen wir ein $p = p_n$, für das

$$M_p(d_0 u_0 + \cdots + d_n u_n, x) > (m+1)/2 \quad (x \in B_{km},\ 0 \leq k, m \leq n)$$

gilt. Dies ist möglich. Denn in einem $x \in B_{km}$ hat die TAYLOR-Entwicklung von $d_0 u_0 + \cdots + d_n u_n$ einen Konvergenzradius $\leq 1/(m+1)$ wegen des Gliedes u_k (die andern Glieder stören nicht, da $d_k, u_k \geq 0$). Daher ist für $p = p(x)$ die Ungleichung erfüllt. Die Monotonie von M_p ergibt, daß man ein gemeinsames p für alle x wählen kann (HEINE-BOREL-Überdeckung!). d_{n+1} bestimmen wir nun so, daß die vorausgesetzten Ungleichungen bezüglich $M_{p_0}, \ldots, M_{p_n}$ durch das Hinzutreten von $d_{n+1} u_{n+1}$ nicht gestört werden

(vgl. § 3). Man sieht, daß man so die gewünschten Divergenzpunkte erhält. Genügend kleine d_n sichern die Regularität von $t(x)$ in $I-F$ (man betrachte Fortsetzungen von u_n ins Komplexe!). — Damit kann man die gesuchte Funktion in den Fällen konstruieren, wo jedes $x \in D$ Häufungspunkt von F ist. Auch dieser Weg läßt sich zu einem Beweis für den allgemeinen Fall ausbauen.

ZAHORSKI [1947] zeigt zunächst, daß man sich wegen Hilfssatz 5 auf den Fall beschränken kann, daß F nur Häufungspunkte von D enthält. Seine Konstruktion in diesem Fall hat — wie nicht anders zu erwarten — eine gewisse Ähnlichkeit mit der unsrigen. Als Kondensationselemente benützt er im Gegensatz zu uns, wo diese Elemente singuläre Funktionen sind (vgl. bei Hilfssatz 3), Polynome, die zahlreichen Bedingungen genügen müssen, damit die entstehende Grenzfunktion die gewünschten Eigenschaften besitzt. Die Verwendung von Polynomen scheint hier also den Beweis zu erschweren. Jedoch dürfte sich die ZAHORSKIsche Methode auch noch abkürzen lassen.

Spezialfälle des Satzes (wie z. B. D = abgeschlossenes Intervall, E = Komplement von D; oder abzählbare Singularitätenmengen) sind natürlich einfacher zu behandeln. Statt I kann man auch andere Intervalle (halboffen, offen, unbeschränkt) betrachten. Auf Verallgemeinerungen und Verschärfungen von Satz 1 (Unterklassen von C^∞, mehrere Veränderliche) haben wir schon in § 1 und § 2 hingewiesen.

Der Vollständigkeit halber sei noch das folgende Ergebnis (PRINGSHEIM [1893], strenge Beweise von BOAS [1935], ZAHORSKI [1947]) genannt:

Hilfssatz 6. *Hat für ein $f \in C^\infty$ die* TAYLOR*-Entwicklung in jedem Punkte einen Konvergenzradius $\geq r > 0$, so ist f überall regulär.*

Den Beweis führt man am besten als Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, die Menge der singulären Punkte sei nicht leer. Als abgeschlossene Menge bildet sie dann einen vollständigen metrischen Raum Q. Wegen $\sup_n M_n(f, x) < \infty$ für jedes $x \in Q$ ist $M_n(f)$ gleichmäßig beschränkt in einer Kugel von Q, d. h. es gibt ein Intervall $J < I$, das Punkte aus Q enthält, so daß für die Menge der $x \in Q \cap J$ eine Beziehung $M_n(f, x) < K$ $(n = 0, 1, \ldots)$ gilt. Wir dürfen annehmen, daß die Länge von J kleiner als $1/4K$ ist. Liegt der reguläre Punkt y in J, so gehört er einem Regularitätsintervall E an, das einen Endpunkt, etwa x, in $Q \cap J$ hat. TAYLOR-Entwicklung von f um x liefert wegen der Voraussetzung die Werte von f in E sowie eine Fortsetzung des betreffenden Funktionselementes in $|z-x| \leq 1/2K$ sowie die Schranke $2K^2$ für die Fortsetzung. Die CAUCHYsche Abschätzungsformel liefert $|f^{(n)}(y)|/n! \leq 2K^2 4^n K^n$ und damit $M_n(f, y) \leq 4K$. Diese Abschätzung gilt sogar für alle $y \in J$, daher ist f in J regulär, womit der gewünschte Widerspruch erzielt ist.

§ 5. Geschichtliches.

Wir machen noch einige Angaben über die geschichtliche Entwicklung der behandelten Theorie.

LAGRANGE [1813] glaubte noch, daß aus der Existenz und Endlichkeit aller Ableitungen in einem Punkte die Entwickelbarkeit der Funktion in eine TAYLOR-Reihe folge.

CAUCHY [1823] stellte demgegenüber die Erscheinung der Fehlkonvergenz an der (stetig fortgesetzten) Funktion $\exp(-1/x^2)$ fest. Die Gültigkeit dieses Beispiels wurde jedoch bezweifelt, weil die betreffende Funktion nicht in geschlossener Form dargestellt wird.

So unterscheidet z.B. HANKEL [1870], S. 102, zwischen illegitimen und legitimen Funktionen, wo eine Funktion legitim heißt, wenn sie für alle reellen x (mit möglicher Ausnahme einer diskreten Menge) bestimmt, endlich und stetig ist und alle Ableitungen dieselben Eigenschaften besitzen. Er sagt dann, daß alle legitimen Funktionen nach dem TAYLORschen Satz entwickelbar seien, wenn der Entwicklungspunkt kein Ausnahmepunkt sei. Er hat also eigentlich „stückweise reguläre" Funktionen im Auge.

DU BOIS REYMOND [1876], S. 110—114, meint: „Nun nimmt man gewöhnlich an, daß die Stetigkeit einer Funktion und ihrer sämtlichen Ableitungen ihre TAYLORsche Entwickelbarkeit bedinge. Danach müßte also die Stetigkeit der Ableitungen der Funktion mit dem Unendlich nach n der n-ten Ableitungen in unmittelbarem Zusammenhang stehen. Möglich ist das schon, aber ich muß bekennen, daß die Entdeckung einer solchen Beziehung, nach welcher aus der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ eine Grenze für das Unendlich nach n von $f^{(n)}(x)$ folgte, mich ungemein überraschen würde. — Man steht also einerseits unter dem Einfluß der mit der mathematischen Muttermilch eingesogenen Vorstellung, daß eine in einem Intervall mit allen ihren Ableitungen stetige Funktion für jeden Wert x jenes Intervalls, höchstens einzelne Punkte ausgenommen, in denen ihr analytischer Sinn undeutlich wird, und für hinreichend kleine Werte von h sich auf die TAYLORsche Weise convergent entwickeln lassen müsse, andererseits erzeugen die obigen Überlegungen den Verdacht, ..." Und dann spricht er von der entscheidenden Frage: „Gibt es ... Funktionen ..., die für keinen besonderen Werth von x einer besonderen Erklärung bedürfen, bei denen ... die TAYLORsche Entwicklung ... versagt?" Er stellt nun zunächst eine solche Funktion mit Hilfe einer Reihe dar (s. unten) und bespricht dann $\exp(-1/x^2)$ mit der Bemerkung: „während gegen das Gewicht des zweiten, übrigens bekannten Beispieles schwer zu entkräftende Einwendungen erhoben werden können." Er schlägt vor, $f(x) = \exp(-1/x^2)$ für alle x auf gleiche Weise zu definieren, indem man diese Größe als $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x \pm \varepsilon)$ auffasse.

Auch PRINGSHEIM [1893], S. 154—155, ist skeptisch und meint zu CAUCHYs Bemerkung: „Und obschon sich gegen das einzige zum Belege seiner Behauptung angeführte Beispiel gewisse, nicht recht zu widerlegende Einwände erheben lassen (...), so ist doch die sachliche Richtigkeit jener CAUCHYschen Bemerkung, ..., meines Wissens von neueren Mathematikern niemals bestritten worden, ... — Immerhin bin ich auch der Ansicht, daß jenes CAUCHYsche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz ... schlechthin evident zu machen." Weiter sagt er auf S. 161 zum CAUCHYschen Beispiel: „Indessen fehlt demselben aus zwei Gründen die rechte Beweiskraft: einmal (...), weil hier $f(0)$ und $f^{(n)}(0)$ nicht „eigentlich" definiert sind, d.h. nicht durch direktes Einsetzen von $x = 0$ ... berechnet werden können, ...; zweitens aber nach

meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definierte $f(0)$ mit allen Ableitungen den besonderen Wert Null hat, so daß von einer convergierenden MacLaurinschen Reihe auch wiederum nur cum grano salis die Rede sein kann, da dieselbe formal eigentlich gar nicht existiert, ein Mangel der durch Einführung einer Funktion $f(x) = g(x) + \exp(-1/x^2)\,(\ldots)$ zwar verdeckt, aber in seinem Wesen doch nicht behoben wird." Mit der Kritik eines anderen Verfassers ist er aber gar nicht einverstanden (S. 154): „Was aber der Verfasser dort auf p. 234–236 vorbringt, enthält nur ein Körnchen Wahrheit, ... Alles übrige sind theils nichtssagende, theils geradezu absurde Redensarten."

Wir sehen, welche Schwierigkeiten und Kontroversen daraus entstanden, daß der Begriff „Funktion" noch nicht genügend geklärt war (genauer, daß Dirichlets Funktionsbegriff ([1837], Werke I, S. 135) noch nicht allgemein akzeptiert war); um so höher müssen wir die technischen Leistungen der damaligen Mathematiker einschätzen. Schließlich hängt ja auch grundsätzlich der Funktionsbegriff von der zugrunde gelegten Logik ab.

Du Bois Reymond [1876] gab als erster eine Funktion mit Divergenzsingularität an, nämlich

$$f(x) = \sum \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}.$$

Sodann kondensierte er diese Singularität über abzählbar viele Punkte und gibt sogar ein Beispiel ähnlich wie das oben in (4) genannte. Allerdings darf man an seine Rechnungen nicht den Maßstab heutiger Strenge anlegen; auch führt er bei beiden Kondensationen die Beweise nicht vollständig durch: „Es wäre freilich, weil diese Maximalhalbmesser gerade für $N = \infty$ unstetig sein könnten, noch direkt zu zeigen, daß die Funktion $F(x)$ nicht entwickelbar ist, doch wollen wir diese Rechnung nicht anstellen." „Es kann allerdings auch hier der (wie alle ähnlichen) schwierige Nachweis verlangt werden, daß die übrigen Terme dieses Unendlichwerden nicht aufheben."

Dies fiel schon Pringsheim [1893] auf, der schrieb: „die schon von Du Bois Reymond befolgte Methode, die in mancher Beziehung der Ergänzung geradezu bedarf, ..., derartig zu vervollkommenen, daß es möglich wird, ... völlig einwandfreie Beispiele zu erzeugen". Und an anderer Stelle [1894], S. 41, „zur Berichtigung eines ... von Du Bois Reymond begangenen fundamentalen Irrtums".

Pringsheim baut [1894] in exakter Form die Du Bois Reymondsche Methode weiter aus und gibt in Reihenform Funktionen mit Divergenz- bzw. Fehlkonvergenzpunkten an:

$$f(x) = \sum \frac{1}{p!} \frac{1}{1 + a^p x} \quad \text{bzw.} \quad = \sum \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{1 + a^p x}.$$

Der Begriff und das Prinzip der „Kondensation von Singularitäten" ist Hankel [1870] zu verdanken; s. auch G. Cantor [1882].

Die erste Kondensation von Singularitäten der Taylor-Entwickelbarkeit wurde von Du Bois Reymond (s. oben) versucht, später führten Fredholm

(s. MITTAG-LEFFLER [1891]) und PRINGSHEIM ([1893, 1894]) die Kondensation mit funktionentheoretischen Mitteln durch (dabei muß man allerdings für die Funktion komplexe Werte zulassen). PRINGSHEIM [1894], S. 50, vertritt dabei schon die Ansicht, daß die Fortsetzbarkeit eines analytischen Funktionselementes eine Ausnahmeerscheinung darstellt.

Auf neuere Arbeiten sind wir schon oben eingegangen. Im Literaturverzeichnis haben wir noch einige Arbeiten über quasianalytische Funktionen genannt, die mit unseren Untersuchungen nur einen losen Zusammenhang haben.

Das Kondensationsprinzip wurde später immer weiter ausgebaut. Die wesentlichste Verbesserung bedeutete dabei die Verwendung funktionalanalytischer Methoden durch die polnische Schule, insbesondere des Kategorieprinzips durch SAKS, s. BANACH-STEINHAUS [1927].

Literatur.

BANACH, S. [1932]: Théorie des opérations linéaires, S. 19. — BANACH-STEINHAUS [1927]: Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. math. **9**, 50—61; FdM. **53**, 243. — BANG, TH. [1949]: Sur le points singuliers (dans un sens généralisé) des fonctions indéfiniment dérivables. Den 11te Scand. Mat. Kongress, 259—263, Oslo 1952; MRev **14**, 626; Zbl. **48**, 40. — BERNSTEIN, S. [1914]: Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle. Math. Ann. **75**, 449—468; FdM. **45**, 635. — BESIKOWITSCH, A. [1924]: Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen. Math. Z. **21**, 111—118; FdM. **61**, 258. — BOAS jr., R. P. [1935]: A theorem on analytic functions of a real variable. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 233—236; FdM. **61**, 258; Zbl. **11**, 201. — [1941]: Functions with positive derivatives. Duke Math. J. **8**, 163—172; FdM. **67**, 192; Zbl. **25**, 37. — CANTOR, G. [1882]: Über ein neues und allgemeines Kondensationprinzip der Singularitäten von Funktionen. Math. Ann. **19**, 588—594; FdM. **14**, 321. — CARLEMAN, T. [1926]: Les fonctions quasianalytiques. Paris. — CARTAN, H. [1940]: Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives. Paris; FdM. **66**, 1231. — CAUCHY, A. [1823]: Leçons sur le calcul infinitesimal, S. 152; (Werke, 2 Ser. IV, S. 230). — DIRICHLET, G. LEJEUNE [1837]: Die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Ostwalds Klassiker 116, Leipzig 1900. — DU BOIS REYMOND, P. [1876]: Über den Gültigkeitsbereich der Taylorschen Reihenentwicklung. Sber. Bayr. Akad. Wiss., 225—237; FdM. **8**, 127. (Abdruck: Math. Ann. **21**, 109—117; FdM. **15**, 183.) — EIDELHEIT, M. [1938]: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. II. Stud. math. **7**, 150—154; FdM. **64**, 386; Zbl. **18**, 135. — GANAPATHY IYER, V. [1934]: Sur un problème de M. Carleman. C. R. Paris **199**, 1371—1373; FdM. **60**, 220; Zbl. **10**, 309. — [1944]: On singular functions. J. Indian Math. Soc., N. S. **8**, 94—108; MRev **7**, 117. — HANKEL, H. [1870]: Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Abdruck Math. Ann. **20**, 102; FdM. **2**, 190. — HERZOG-PIRANIAN [1949]: Sets of convergence of Taylor series I. Duke Math. J. **16**, 529—534; MRev **11**, 91; Zbl. **34**, 48. — LAGRANGE, J. L. [1813]: Théorie des fonctions analytiques. Paris. Chap. V, Art. 30. (Œuvres IX, 65). — MANDELBROJT, S. [1935]: Séries de Fourier et classes quasianalytiques de fonctions. Paris; Zbl. **13**, 110. — [1942]: Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions. Houston, Tex. — MEYER-KÖNIG-ZELLER [1954]: Über das Taylorsche Summierungsverfahren. Math. Z. **60**, 348—352; MRev **16**, 28. — MITTAG-LEFFLER, G. [1891]: Sur une transcendente remarquable trouvée par M. Fredholm. Acta Math. **15**, 279; FdM. **23**, 421. — MORGENSTERN, D. [1954]: Unendlich oft differenzierbare nirgends analytische Funktionen. Math. Nachr. **12**, 74. — PÓLYA, G. [1938/39]: Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auf-

lösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen. Comm. math. Helvet. **11**, 234—252; FdM **65**, 502; Zbl. **20**, 310. — PRINGSHEIM, A. [1893]: Zur Theorie der Taylorschen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich. Math. Ann. **42**, 153—184; FdM. **25**, 386. — [1894]: Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Veränderlichen. Math. Ann. **44**, 57—82; FdM. **25**, 386. — [1894]: Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwicklung besitzen. Math. Ann. **44**, 41—56; FdM. **25**, 389. — WHITNEY, H. [1934]: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 63—83; FdM. **60**, 217; Zbl. **8**, 249. — ZAHORSKI, Z. [1946]: Problèmes de la théorie des ensembles et de fonctions. C. R. Paris **223**, 449—451; MRev **8**, 41. — [1947]: Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres. Fund. Math. **34**, 183—245; MRev **8**, 141. — ZELLER, K. [1953]: *FK*-Räume in der Funktionentheorie. I. Math. Z. **58**, 288—305; MRev **14**, 1092; Zbl. **51**, 86.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. März 1955.)

KASCH, F.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 368—387 (1955)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen.

Von
FRIEDRICH KASCH.

§ 1. Einleitung.

1. Fragestellung. Eine Menge $\mathfrak{B}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen heißt eine *wesentliche Komponente*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Menge $\mathfrak{A}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen mit positiver Dichte $\alpha<1$ ist die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ größer als α. Während man auf Grund der SCHNIRELMANNschen Ungleichung bereits seit 1930 wußte, daß jede Menge $\mathfrak{B}$, die selbst eine positive Dichte besitzt, eine wesentliche Komponente ist, war es eines der überraschendsten Ergebnisse der additiven Zahlentheorie, als im Jahre 1933 A. J. CHINTSCHIN [2] feststellte, daß es auch wesentliche Komponenten der Dichte Null gibt; er zeigte nämlich, daß die Menge der Quadratzahlen eine wesentliche Komponente darstellt. Im Jahre 1936 machte dann P. ERDÖS die für die weitere Entwicklung grundlegende Entdeckung, daß dieses Ergebnis nicht an die Menge der Quadratzahlen gebunden ist, sondern für jede Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen zutrifft. Von E. LANDAU, A. BRAUER, S. SELBERG, A. STÖHR, H. E. RICHERT u. a. wurde der Grundgedanke von ERDÖS weiter ausgebaut und schärfere Ergebnisse, die im folgenden noch genauer angegeben werden, hergeleitet. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine einheitliche Beweismethode für alle diese Resultate zu entwickeln. Die Tragfähigkeit der Methode erweist sich dadurch, daß sie sogleich eine Verbesserung aller bisherigen Abschätzungen liefert. Außerdem bietet sie die Möglichkeit, die gleiche Frage auch bei anderen Mengen zu untersuchen, z. B. bei den Mengen $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\pm\mathfrak{B}$.

2. Voraussetzungen. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen. Unter $\mathfrak{A}(n)$ verstehen wir die Menge der Zahlen $a\in\mathfrak{A}$ mit $a\leq n$. Die Anzahlfunktion $A(n)$ der Menge $\mathfrak{A}$ gibt die Anzahl der natürlichen Zahlen aus $\mathfrak{A}(n)$ an. Die Zahl

$$\underset{n=1,2,\ldots}{\operatorname{fin}}\ \frac{A(n)}{n}=\alpha \tag{1.1}$$

wird als *(finite) Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Danach gilt also für jede natürliche Zahl n:

$$A(n)\geq\alpha n.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß $\mathfrak{A}$ in der Menge der natürlichen Zahlen echt enthalten sei; dann gilt offenbar $0\notin\mathfrak{A}$ und $\alpha<1$[1]). Ferner wird $1\in\mathfrak{A}$

[1]) Stimmt $\mathfrak{A}$ mit der Menge der natürlichen Zahlen überein, dann werden die hier behandelten Fragen gegenstandslos. Ist $0\in A$, dann gelten die folgenden Ergebnisse selbstverständlich erst recht; aus formalen Gründen ist aber bei den Beweisen die Voraussetzung $0\notin A$ zweckmäßig.

vorausgesetzt[2]). Sei $\overline{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$ in der Menge der natürlichen Zahlen mit der Anzahlfunktion $\bar{A}(n)$, dann ist offenbar $\bar{A}(n) = n - A(n)$, und es gilt:

$$\bar{A}(n) \leq (1-\alpha)\, n.$$

Unter der *Summenmenge* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit der Dichte γ und der Anzahlfunktion $C(n)$ ist die Menge aller in der Gestalt $a+b$ darstellbaren Zahlen mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$ zu verstehen. Wir setzen $0 \in \mathfrak{B}$ und $1 \in \mathfrak{B}$ voraus; dann ist offenbar $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{C}$, und jede natürliche Zahl m läßt sich in der Form

$$m = b_1 + \cdots + b_l$$

mit Zahlen $b_1, \ldots, b_l \in \mathfrak{B}$ darstellen. Sei $l(m)$ die kleinste natürliche Zahl, für die eine solche Darstellung möglich ist. Es werde

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=1,2,\ldots} l(m) = h, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} l(m) = \lambda \tag{1.2}$$

gesetzt und h als *Ordnung*, λ als *mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet; offenbar gilt $\lambda \leq h$. Ist h endlich, dann wird $\mathfrak{B}$ eine *Basis endlicher Ordnung* der natürlichen Zahlen genannt. Dies sei im folgenden der Fall.

3. Ergebnisse. Unter diesen Voraussetzungen gilt nach P. Erdös [3]:

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{h}\right). \tag{1.3}$$

E. Landau [6] bewies die gleiche Abschätzung für λ an Stelle von h:

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.4}$$

A. Brauer [1] verschärfte die Ungleichung zu:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1-\sqrt{\alpha}}{\lambda}\right) = \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.5}$$

Der sehr umfangreiche Beweis von A. Brauer wurde kürzlich von A. Stöhr [11] von allen technischen Schwierigkeiten befreit, so daß der Beweisgedanke besonders klar hervortritt.

Nach A. Brauer bewies S. Selberg [9]:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.6}$$

Dieses Ergebnis ist für $\alpha > \frac{1}{9}$ besser als das von A. Brauer.

---

[2]) Ist $1 \notin \mathfrak{A}$, dann folgt $\alpha = 0$; die folgenden Abschätzungen sind dann trivialerweise richtig oder falsch. Genauer: Die Abschätzungen mit dem Zeichen $\geqq$ sind richtig, und die mit dem Zeichen $>$ sind dann und nur dann richtig, wenn $\mathfrak{A}(n)$ mindestens ein Element enthält.

Schließlich zeigte kürzlich H. E. RICHERT[3]), daß auch die folgende, in gewissem Sinne zu (1.5) symmetrische Aussage gilt:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{1-\alpha}}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.7}$$

Wir erhalten hier die neuen Abschätzungen:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \tag{1.8}$$

und

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.9}$$

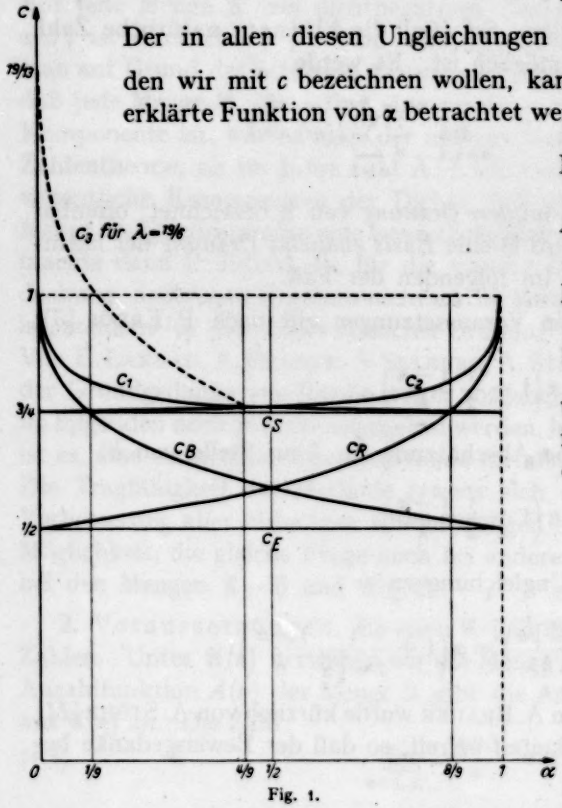


Fig. 1.

Der in allen diesen Ungleichungen auftretende Faktor von $\frac{1-\alpha}{\lambda}$, den wir mit c bezeichnen wollen, kann als eine im Intervall $0 \leq \alpha \leq 1$ erklärte Funktion von α betrachtet werden (siehe Abb.). Man hat dann:

ERDÖS-LANDAU: $c_E = \frac{1}{2}$;

A. BRAUER: $c_B = \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$;

H. E. RICHERT: $c_R = \frac{1}{1+\sqrt{1-\alpha}}$;

S. SELBERG: $c_S = \frac{3}{4}$;

und die neuen Faktoren, die in dieser Arbeit hergeleitet werden:

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2},$$

$$c_2 = \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}.$$

Eine Vermutung von P. ERDÖS (siehe [*10*], S. 7) besagt, daß der Wert $c = 1$ zulässig ist.[3a])

4. Asymptotische Abschätzungen. Eine Übertragung einer Ungleichung aus diesem Problemkreis auf asymptotische Dichten wurde bereits von P. ERDÖS [*4*] vorgenommen. Von H. ROHRBACH [*10*], H. KLÖTER und A. STÖHR [*5*] konnten weitere Abschätzungen für die asymptotische Dichte angegeben werden. Auch unsere Ergebnisse lassen sich auf den asymptotischen Fall übertragen. Dabei werden folgende Voraussetzungen gemacht.

[3]) Nach einer mündlichen Mitteilung.

[3a]) *Zusatz bei der Korrektur.* Inzwischen habe ich bemerkt, daß man durch eine Verallgemeinerung der hier dargestellten Überlegungen (insbesondere der aus § 2) zu dem

Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von natürlichen Zahlen, dann wird analog zu (1.1)

$$\lim_{n=1,2,\dots} \frac{A(n)}{n} = \alpha^*$$

als *asymptotische Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. $\mathfrak{B}$ sei eine Menge nichtnegativer Zahlen, die die Null enthält, und für die jetzt vorausgesetzt wird, daß sich jede natürliche Zahl $m > n_0$ (n_0 fest) in der Form

$$m = b_1 + \cdots + b_{l(m)} \qquad (b_i \in \mathfrak{B}) \tag{1.10}$$

darstellen lasse; sei $l(m)$ in dieser Darstellung minimal, dann wird

$$\overline{\lim_{n=1,2,\dots}} \frac{1}{n} \sum_{m=n_0+1}^{n} l(m) = \lambda^* \tag{1.11}$$

als *asymptotische mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Für die asymptotische Dichte γ^* von $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gilt nun in Analogie zu c_1 und c_2:

$$\gamma^* \geq \alpha^* \left(1 + c_i^* \frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.12}$$

mit

$$c_1^* = \frac{1 + \sqrt{\alpha^*} + \alpha^*}{(1 + \sqrt{\alpha^*})^2} \tag{1.13}$$

und

$$c_2^* = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^*} + (1-\alpha^*)}{(1 + \sqrt{1-\alpha^*})^2}. \tag{1.14}$$

Fast unmittelbar folgt ferner aus unseren Formeln, daß in (1.12) sogar $c_i^* = 1$ gilt, falls der Grenzwert von $\frac{A(n)}{n}$ (der dann notwendig mit α^* übereinstimmt) existiert[4]).

---

folgenden Ergebnis gelangt: Zu jedem λ gibt es ein $\alpha_\lambda > 0$, so daß für $0 \leq \alpha < \alpha_\lambda$ die Erdössche Vermutung übertroffen wird. Insbesondere gilt für $\lambda \geq \frac{8}{9}$:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha \left(1 + c_3 \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

mit

$$c_3 = c_3(\alpha, \lambda) = c_1 \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1+\alpha)\sqrt{\alpha}} = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1+\alpha)\sqrt{\alpha}}.$$

Ein analoges Ergebnis erhält man auch im asymptotischen Fall.

Für die mittlere Ordnung der Menge der Quadratzahlen $\lambda = \frac{1}{6}\pi^2$ ist c_3 in vorstehender Abbildung eingetragen.

Die Beweise dieser Ergebnisse sollen in einer in Kürze unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit dargestellt werden.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Abbildung für c_B und c_R eine Ungenauigkeit aufweist; diese Größen streben für α gegen 0 bzw. 1 selbst gegen 1.

[4]) Dieses Ergebnis wurde bereits von F. Krückeberg mitgeteilt (Seminar Göttingen, Dez. 1954). Dessen Beweis stützt sich auf die Schlußweise von S. Selberg [9].

§ 2. Die komplementären Grundformeln.

1. Wir beginnen damit, die bereits von ERDÖS und LANDAU benutzten Funktionen $D(m)$ und $E(m)$ einzuführen. Dabei seien n eine fest vorgegebene natürliche Zahl und m eine natürliche Zahl mit $1 \leq m \leq n$.

Definition 1. *$D(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$a \in \mathfrak{A} \quad mit \quad a + m \in \mathfrak{A}(n);$$

$E(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$a \in \mathfrak{A} \quad mit \quad a + m \in \mathfrak{A}(n).$$

Offenbar gilt dann

$$D(m) + E(m) = A(n - m),$$

also

$$D(m) = A(n - m) - E(m). \tag{2.1}$$

Hilfssatz 1. *Ist t eine natürliche Zahl mit $1 \leq t < m$, dann gilt*

$$D(m) \leq D(t) + D(m - t). \tag{2.2}$$

Beweis. Sei a eine Zahl, die in $D(m)$ gezählt wird, d.h. $a + m = \bar{a} \in \mathfrak{A}(n)$. Ist bereits $a + t \in \mathfrak{A}(n)$, dann wird a in $D(t)$ gezählt, ist jedoch $a + t = a' \in \mathfrak{A}(n)$, dann gilt $a' + m - t = \bar{a} \in \mathfrak{A}(n)$, und a' wird in $D(m-t)$ gezählt. Für zwei verschiedene Zahlen a und a_1, die in $D(m)$ gezählt werden, sind die zugeordneten Zahlen $a' = a + t$ und $a_1' = a_1 + t$ offenbar voneinander verschieden. Folglich gilt (2.2).

Sei nun

$$m = b_1 + \cdots + b_{l(m)} \qquad (b_i \in \mathfrak{B})$$

eine nach Voraussetzung existierende Darstellung von m, so besteht auf Grund von (2.2) die Ungleichung

$$D(m) \leq D(b_1) + \cdots + D(b_{l(m)}). \tag{2.3}$$

Wird $a \in \mathfrak{A}$ in $D(b_i)$ gezählt, dann gilt $a + b_i \in \mathfrak{A}(n)$; $a + b_i$ ist also ein Element aus $\mathfrak{C}(n)$, welches nicht in $\mathfrak{A}$ liegt. Daraus folgt

$$D(b_i) \leq C(n) - A(n) \equiv R(n).$$

Wegen (2.3) hat man daher die bekannte Ungleichung

$$D(m) \leq l(m)\, R(n),$$

aus der man durch Summation von 1 bis $k \leq n$ zufolge (1.2) erhält:

$$\sum_{m=1}^{k} D(m) \leq \left\{ \sum_{m=1}^{k} l(m) \right\} R(n) \leq \lambda\, k\, R(n). \tag{2.4}$$

Hilfssatz 2. *Sei $k \leq n$ eine natürliche Zahl, dann gilt:*

$$\sum_{m=1}^{k} E(m) = \binom{A(n)}{2} - \Gamma(k) \tag{2.5}$$

mit

$$(2.6)\quad \begin{cases} \Gamma(k) = \sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1) - A(m+k)\} & \text{für} \quad k \leq n-2, \\ \Gamma(n-1) = \Gamma(n) = 0. \end{cases}$$

Beweis. Offenbar ist $\sum_{m=1}^{n} E(m) = \sum_{m=1}^{n-1} E(m) = \binom{A(n)}{2}$, womit die zweite Gleichung von (2.6) bewiesen ist. Sei jetzt $k \leq n-2$; dann betrachten wir die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{k} E(m) = \sum_{m=1}^{n} E(m) - \sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \binom{A(n)}{2} - \sum_{m=k+1}^{n} E(m).$$

In der Summe $\sum_{m=k+1}^{n} E(m)$ werden nach Definition von $E(m)$ alle Paare a, a' mit $a'-a > k\,(a', a \in \mathfrak{A}(n))$ gezählt. Die Anzahl dieser Paare ist bei festem a' offenbar gleich $A(a'-k-1)$, und durch Summation über alle $a' \in \mathfrak{A}(n)$ mit $a' > k+1$ erhält man

$$\sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \sum_{m=k+2}^{n} A(m-k-1)\{A(m) - A(m-1)\},$$

denn $A(m) - A(m-1)$ ist gleich 0 oder 1, je nachdem, ob $m \notin \mathfrak{A}$ oder $m \in \mathfrak{A}$. Durch Änderung der Summationsgrenze folgt unmittelbar die erste Gleichung von (2.6).

Auf Grund von (2.1), (2.4) und (2.5) gilt jetzt

$$(2.7)\quad \lambda k R(n) \geq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \Gamma(k).$$

Diese Beziehung nennen wir die *erste Grundformel* (1. GF.).

2. Zur Gewinnung der zweiten, dazu komplementären Grundformel, führen wir neue Funktionen $D'(m)$ und $E'(m)$ ein. Dabei sei auch jetzt n fest und $1 \leq m \leq n$.

Definition 2. *$D'(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n) \quad \textit{mit} \quad \bar{a} - m \in \mathfrak{A};$$

$E'(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n) \quad \textit{mit} \quad \bar{a} - m \in \mathfrak{A}.$$

Offenbar gilt dann:

$$(2.8)\quad D'(m) + E'(m) = \bar{A}(n) - \bar{A}(m).$$

Wesentlich ist nun die Gleichung

$$(2.9)\quad D'(m) = D(m),$$

die unmittelbar aus den Definitionen von $D(m)$ und $D'(m)$ folgt. Daher hat man jetzt

$$D(m) = \bar{A}(n) - \bar{A}(m) - E'(m). \tag{2.10}$$

Ebenso wie $E(m)$ die Anzahl der Paare a, a' mit $a' - a = m\,(a',\, a \in \mathfrak{A}(n))$ angibt, gibt $E'(m)$ die Anzahl der Paare $\bar{a}$, $\bar{a}'$ mit $\bar{a}' - \bar{a} = m\,(\bar{a}',\, \bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}(n))$ an. Daher gilt Hilfssatz 2 auch für $E'(m)$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ an Stelle von $E(m)$ und $\mathfrak{A}$. Mit der Bezeichnung

$$\begin{cases} \Gamma(k) = \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} \bar{A}(m)\,\{\bar{A}(m+k+1) - \bar{A}(m+k)\} & \text{für} \quad k \leq n-2, \\ \Gamma(n-1) = \Gamma(n) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

besteht dann wegen (2.10) die folgende *zweite Grundformel* (2. GF.):

$$\lambda k R(n) \geq k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k} \bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \Gamma(k). \tag{2.12}$$

3. Es soll jetzt angedeutet werden, unter welchen Voraussetzungen die in der Einleitung angegebenen Ergebnisse aus den beiden Grundformeln folgen.

ERDÖS-LANDAU: Folgt aus beiden Grundformeln für $k = n$. In der Literatur wird dazu die aus der 1. GF. für $k = n$ folgende Formel benutzt, die in dieser Form von E. LANDAU [6] aufgestellt wurde. Hier soll der Beweis unter Verwendung der 2. GF. angegeben werden. Dabei kann $\bar{A}(n) \geq 1$ vorausgesetzt werden, denn sonst ist $A(n) = n$ und folglich die Behauptung erfüllt. Wegen

$$\bar{A}(m) \leq (1-\alpha)\,m$$

erhält man dann aus (2.12) [unter Beachtung von $\Gamma(n) = 0$]:

$$\lambda n R(n) \geq n^2 - nA(n) - (1-\alpha)\frac{n(n+1)}{2} - (1-\alpha)^2\frac{n^2}{2} + (1-\alpha)\frac{n}{2},$$

also

$$\frac{C(n)}{n} \geq \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\frac{A(n)}{n} + \frac{\alpha(3-\alpha)}{2\lambda}$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\alpha + \frac{\alpha(3-\alpha)}{2\lambda} = \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Einen Vorteil gegenüber der üblichen Schlußweise kann man darin sehen, daß jetzt nur ein linearer und nicht wie dort ein quadratischer Ausdruck in $A(n)$ nach unten abzuschätzen ist.

BRAUER-RICHERT: c_B folgt aus der 1. GF. für $k \sim \sqrt{\alpha}\,n$, wenn $\Gamma(k)$ trivial durch 0 abgeschätzt wird[5]; entsprechend ergibt sich c_R aus der 2. GF. für $k \sim \sqrt{1-\alpha}\,n$, wenn $\Gamma(k)$ durch 0 abgeschätzt wird[6].

[5] $k \sim \sqrt{\alpha}\,n$ bedeute, daß zwischen den Werten $[\sqrt{\alpha}\,n]$ und $[\sqrt{\alpha}\,n] + 1$ gemittelt wird.

[6] Der mir von H. E. RICHERT mitgeteilte Beweis erfolgt in anderer Weise. Die 1. GF. wird bis n summiert, jedoch wird $D(m)$ für $m > k \sim \sqrt{1-\alpha}\,n$ nicht durch $\iota(m)\,R(m)$, sondern $\bar{A}(n) - \bar{A}(m)$ nach oben abgeschätzt.

S. SELBERG: c_S folgt aus beiden Grundformeln für $k=[n/2]$ bei nichttrivialer Abschätzung von $\Gamma(k)$ bzw. $\bar{\Gamma}(k)$. Besonders kurz wird der Beweis, wenn man von der zweiten Grundformel ausgeht, da man dann — ebenso wie bei dem vorstehenden Beweis von c_E — nur einen linearen Ausdruck in $A(n)$ [(bzw. $\bar{A}(n)$] abzuschätzen hat.

Die Faktoren c_1, c_1^* und c_2, c_2^*:
c_1 folgt aus der 1. GF. gemittelt für die Werte

$$k \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\, n = \frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}\, n \quad \text{und} \quad n-k$$

bei nichttrivialer Abschätzung von $\Gamma(k)$. Entsprechend erhält man c_2 aus der 2. GF. gemittelt für die Werte

$$k \sim \frac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}\, n = \frac{\sqrt{1-\alpha}(1-\sqrt{1-\alpha})}{\alpha}\, n \quad \text{und} \quad n-k$$

bei nichttrivialer Abschätzung von $\bar{\Gamma}(k)$. Die Beweise werden im finiten Fall vollständig ausgeführt. Im asymptotischen Fall, in dem die Beweise ganz analog verlaufen, werden wir nur den Beweis von c_1^* ausführen. Nach dem Vorhergehenden ist dann der Beweis von c_2^* fast unmittelbar klar.

§ 3. Beweise von c_1 und c_1^*.

1. Beweis von c_1. Beim Beweis der Ungleichungen (1.8) und (1.9) kann $0<\alpha<1$ angenommen werden. Nach Voraussetzung gilt bereits $\alpha<1$. Für $\alpha=0$ sind (1.8) und (1.9) offenbar erfüllt, denn wegen $1\in\mathfrak{A}$ hat man stets $\frac{C(n)}{n}>0$. Sei also im folgenden $0<\alpha<1$.

Zum Beweis der Ungleichung (1.8) gehen wir von der 1. GF. (2.7) aus; für $1\leq k\leq n-2$ gilt danach:

$$(3.1)\quad \begin{cases} \lambda k R(n) \geq \sum\limits_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1)-A(m+k)\} \\ \qquad\qquad \geq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} m\{A(m+k+1)-A(m+k)\}. \end{cases}$$

Durch ABELsche Summation kann die letzte Summe umgeformt werden; man erhält so

$$(3.2)\qquad \lambda k R(n) \geq \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha\left\{(n-k-1)\,A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m)\right\}.$$

Wegen $1\leq k\leq n-2$ gilt auch $1\leq n-k-1\leq n-2$, und man darf daher in (3.2) k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$(3.3)\qquad \lambda(n-k-1) R(n) \geq \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha\left\{k A(n) - \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m)\right\}.$$

Diese Ungleichung wird mit α multipliziert und zu (3.2) addiert, wobei noch $-\lambda\alpha R(n)$ auf der linken Seite vernachlässigt wird:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \lambda\{k+\alpha(n-k)\}R(n) \\ \geq (1-\alpha^2)\sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \alpha\{n-k-1+\alpha k\}A(n) \\ \geq \alpha\{n-1-(1-\alpha)k\}A(n) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}k(2n-k-1). \end{cases}$$

In diese Ungleichung sollen nun gewisse Werte für k eingesetzt werden, und wir haben sicherzustellen, daß dafür die Voraussetzung $1\leq k\leq n-2$ erfüllt ist. Sei jetzt

$$(3.5)\qquad z=\varrho n \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}.$$

Zur Vereinfachung der Abschätzungen wollen wir im weiteren Beweis $\alpha\leq 1/2$ und $n\geq 4$ voraussetzen, was keine Einschränkung bedeutet[7]). Aus $\alpha<1$ folgt bereits $\varrho<1/2$, und wegen $n\geq 4$ gilt dann $[\varrho n]+1\leq n-2$. Schließlich können wir $1\leq\varrho n$ annehmen; ist nämlich $\varrho n<1$, d.h. $n<\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$, so folgt wegen $n\geq 4$ die Schranke $\alpha<1/9$, und wegen $1\in\mathfrak{A}$, $1\in\mathfrak{B}$ gilt dann

$$\frac{C(n)}{n}\geq\frac{2}{n}>\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}>\frac{3}{2}\sqrt{\alpha}>2\alpha>\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

also ist (1.8) erfüllt. Insgesamt können wir jetzt $1\leq[\varrho n]$ und $[\varrho n]+1\leq n-2$ annehmen und dürfen daher

$$k=[z]=z-\eta \quad \text{bzw.} \quad k=[z]+1=z+\delta$$

in (3.4) einsetzen[8]):

$$\begin{aligned} &\lambda\{(1-\alpha)(z-\eta)+\alpha n\}R(n) \\ &\qquad\geq\alpha\{n-1-(1-\alpha)(z-\eta)\}A(n)-(1+\alpha)\binom{A(n)}{2}+ \\ &\qquad\quad+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z-\eta)(2n-z+\eta-1), \\ &\lambda\{(1-\alpha)(z+\delta)+\alpha n\}R(n) \\ &\qquad\geq\alpha\{n-1-(1-\alpha)(z+\delta)\}A(n)-(1+\alpha)\binom{A(n)}{2}+ \\ &\qquad\quad+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta)(2n-z-\delta-1). \end{aligned}$$

---

[7]) Für $\alpha>\frac{1}{4}$ ist (1.9) besser als (1.8). Die Fälle $n=1, 2, 3$ ergeben sich folgendermaßen: Wegen $1\in\mathfrak{A}$, $1\in\mathfrak{B}$ gilt $C(1)=1$, $C(2)=2$ sowie $C(3)=3$, falls $\mathfrak{A}(3)=\{1, 2, 3\}$ oder $=\{1, 2\}$ oder $=\{1, 3\}$ ist; ist aber $\mathfrak{A}(3)=\{1\}$, so ist $\alpha\leq\frac{1}{3}$ und $\frac{C(3)}{3}\geq\frac{2}{3}\geq 2\alpha>\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$.

[8]) Die folgende Schlußweise wurde zuerst von A. STÖHR [13] zur Vereinfachung des Beweises von (1.5) benutzt; Herr STÖHR stellte mir freundlicherweise sein Manuskript vor Erscheinen der Arbeit zur Verfügung.

Multipliziert man die erste dieser Ungleichungen mit δ, die zweite mit η und addiert sie, so folgt unter Beachtung von $\eta+\delta=1$:

$$(3.6)\quad \begin{cases} \lambda\{(1-\alpha)z+\alpha n\}R(n) \\ \geq \alpha\{n-(1-\alpha)z\}A(n)-\frac{1+\alpha}{2}A^2(n)+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}z(2n-z)+ \\ \quad +\frac{1-\alpha}{2}A(n)-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta\eta). \end{cases}$$

Nun gilt wegen $n\geq 4$, $\alpha\leq 1/2$ und $\varrho<1/2$:

$$\frac{1-\alpha}{2}A(n)-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta\eta)>\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}n-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\geq\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}\left(n-\frac{3}{4}n-\frac{3}{8}\right)=\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}\left(\frac{n}{4}-\frac{3}{8}\right)>0;$$

daher erhält man aus (3.6)

$$\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{R(n)}{n}>\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\frac{A(n)}{n}-\frac{(1+\alpha)}{2}\frac{A^2(n)}{n^2}+$$

$$+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho),$$

also

$$(3.7)\quad \begin{cases} \lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{C(n)}{n} \\ >\left(\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}+\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\right)\frac{A(n)}{n}-\frac{1+\alpha}{2}\frac{A^2(n)}{n^2}+ \\ \quad +\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho). \end{cases}$$

Wir wollen jetzt das Minimum des von $\frac{A(n)}{n}$ abhängenden Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Ungleichung für

$$\alpha\leq\frac{A(n)}{n}\leq\alpha(2-\alpha)$$

bestimmen, d.h. das Minimum der Funktion

$$f(\xi)=\left(\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}+\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\right)\xi-\frac{1+\alpha}{2}\xi^2$$

für $\alpha\leq\xi\leq\alpha(2-\alpha)$. Die Berücksichtigung dieses Intervalls reicht für den Beweis aus; ist nämlich $\frac{A(n)}{n}=\xi>\alpha(2-\alpha)$, so auch

$$\frac{C(n)}{n}>\alpha(2-\alpha)\geq\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

und (1.8) ist erfüllt. Das Minimum der quadratischen Funktion $f(\xi)$ wird an einem Endpunkt des Intervalls angenommen, und zwar, wie jetzt gezeigt werden soll, für $\xi=\alpha$. Bei Beachtung des unter (3.5) angegebenen Wertes

für ϱ hat man

$$\begin{aligned} f(2\alpha-\alpha^2)-f(\alpha) &= \left\{\lambda\sqrt{\alpha}+\alpha\left(1-\sqrt{\alpha}+\alpha\right)\right\}\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha)\\ &\geq \left\{\sqrt{\alpha}(1-\alpha)+\alpha(1+\alpha)\right\}\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha)\\ &= \left\{\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}\right\}\alpha(1-\alpha)^2\\ &> \left\{\sqrt{\alpha}-\alpha\right\}\alpha(1-\alpha)^2>0. \end{aligned}$$

Folglich kann man in (3.7) $\frac{A(n)}{n}$ durch α ersetzen:

$$(3.8)\quad \begin{cases} \lambda\sqrt{\alpha}\,\frac{C(n)}{n} > \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\{1-(1-\alpha)\varrho\}\alpha^2-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho)\\ \qquad = \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\{\alpha+2\varrho-(1+\alpha)\varrho^2\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\\ \qquad = \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha}+\alpha)}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\alpha(1-\alpha). \end{cases}$$

Daraus erhält man unmittelbar die behauptete Abschätzung (1.8).

2. Beweis von c_1^*. Mit der gleichen Schlußweise, die zum Beweis der Ungleichung (1.8) führte, kann nun auch die Abschätzung (1.12) mit dem Faktor c_1^* bewiesen werden. Für $\alpha^*=0$ und $\alpha^*=1$ ist die Behauptung klar, ebenso für $\lambda^*=\infty$. Es sei daher $0<\alpha^*<1$ und $\lambda^*<\infty$. Zu jedem $\varepsilon>0$ mit $0<\varepsilon<\alpha^*$ gibt es dann ein n_ε so, daß

$$A(n)\geq(\alpha^*-\varepsilon)n \quad \text{für} \quad n>n_\varepsilon$$

gilt; wir setzen $\alpha^*-\varepsilon=\alpha'$. Ferner gibt es zu jedem $\mu>0$ ein n_μ $(>n_0)$ so, daß

$$(3.9)\qquad \sum_{m=n_0+1}^{n} l(m)\leq n(\lambda^*+\mu) \quad \text{für} \quad n>n_\mu$$

gilt; wir setzen $\lambda^*+\mu=\lambda'$. Sei jetzt

$$k=[\varrho n] \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{\alpha'}}{1+\sqrt{\alpha'}};$$

wegen $0<\alpha'<1$ ist dann $0<\varrho<\frac{1}{2}$. Folglich gibt es eine feste natürliche Zahl N so, daß für alle $n>N$ gilt:

$$k>\operatorname{Max}(n_\varepsilon,n_\mu), \quad n-k-1>\operatorname{Max}(n_\varepsilon,n_\mu), \quad 1\leq k\leq n-2.$$

Im folgenden sei stets $n>N$, so daß wir für k und $n-k-1$ als obere Summationsgrenzen von (3.9) die Gültigkeit von (3.9) voraussetzen können. Ferner bezeichne K geeignet zu wählende, von n unabhängige Konstanten, deren genauer Wert nicht interessiert. Die 1. GF. nimmt jetzt die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \lambda' k R(n) &\geq \sum_{m=n_0+1}^{k} D(m) \geq \sum_{m=n_0+1}^{k} A(n-m)-\sum_{m=1}^{k} E(m)\\ &= \sum_{m=n_0+1}^{k} A(n-m)-\binom{A(n)}{2}+\sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1)-A(m+k)\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(3.10)\quad \begin{cases} \lambda' k R(n) \geq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \\ \qquad + \alpha' \sum_{m=1}^{n-k-1} m\{A(m+k+1) - A(m+k)\} + Kn \\ = \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha' \left\{(n-k-1) A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m)\right\} + Kn. \end{cases}$$

Auf Grund der angegebenen Voraussetzungen können wir in dieser Ungleichung k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$\lambda'(n-k-1) R(n) \geq \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha' \left\{k A(n) - \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m)\right\} + Kn.$$

Diese Ungleichung wird mit α' multipliziert und zu (3.10) addiert:

$$\lambda' \{k + \alpha'(n-k)\} R(n)$$

$$\geq (1-\alpha'^2) \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - (1+\alpha') \binom{A(n)}{2} + \alpha'(n-k+\alpha' k) A(n) + Kn$$

$$\geq \alpha' \{n - (1-\alpha') k\} A(n) - \frac{1+\alpha'}{2} A^2(n) + \frac{(1-\alpha'^2)\alpha'}{2} k(2n-k) + Kn.$$

Daraus folgt:

$$(3.11)\quad \begin{cases} \lambda' \{\varrho + \alpha'(1-\varrho)\} \frac{R(n)}{n} \geq \alpha' \{1 - (1-\alpha')\varrho\} \frac{A(n)}{n} - \\ \qquad - \frac{1+\alpha'}{2} \frac{A^2(n)}{n^2} + \frac{(1-\alpha'^2)\alpha'}{2} \varrho(2-\varrho) + K \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Die gleiche Minimumbetrachtung wie im finiten Fall zeigt, daß entweder bereits

$$(3.12)\qquad \frac{C(n)}{n} \geq \alpha' \left(1 + \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right)$$

gilt oder in (3.11) $\frac{A(n)}{n}$ durch α' ersetzt werden darf. Dann folgt aus (3.11) analog zur Abschätzung (3.8):

$$\frac{C(n)}{n} \geq \alpha' \left(1 + \frac{1 + \sqrt{\alpha'} + \alpha'}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right) + K \frac{1}{n}.$$

Diese Abschätzung gilt also wegen (3.12) in jedem Falle.

Für $n \to \infty$ ergibt sich daraus:

$$\gamma^* \geq \alpha' \left(1 + \frac{1 + \sqrt{\alpha'} + \alpha'}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right);$$

da diese Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ und $\mu > 0$ gilt, folgt schließlich wie behauptet

$$\gamma^* \geq \alpha^* \left(1 + c_1^* \frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right).$$

§ 4. Beweise von c_2 und c_2^*.

1. Beweis von c_2. Wie beim Beweis von c_1 in § 3 kann auch jetzt $0<\alpha<1$ vorausgesetzt werden. Ferner können wir $\bar{A}(n)\geq 1$ annehmen, denn andernfalls ist $A(n)=n$ und somit die behauptete Ungleichung (1.9) erfüllt.

Zum Beweis der Ungleichung (1.9) gehen wir von der 2. GF. (2.12) aus. Für $1\leq k\leq n-2$ gilt danach:

$$
(4.1)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda k R(n) &\geq k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\\
&\qquad +\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\{\bar{A}(m+k+1)-\bar{A}(m+k)\}\\
&= k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n)-\\
&\qquad -\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m+k)\{\bar{A}(m)-\bar{A}(m-1)\}\\
&\geq k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n)-\\
&\qquad -(1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}(m+k)\{\bar{A}(m)-\bar{A}(m-1)\}\\
&= k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n)-\\
&\qquad -(1-\alpha)\Big\{n\bar{A}(n-k-1)-\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

Wegen $(1-\alpha)n-\bar{A}(n)\geq 0$ kann man fortfahren:

$$
(4.2)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda k R(n) &\geq k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\
&\qquad -\{(1-\alpha)n-\bar{A}(n)\}(1-\alpha)(n-k-1)+(1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\\
&= \{k+(1-\alpha)(n-k-1)\}\bar{A}(n)-\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\
&\qquad -\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)+(1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)-(1-\alpha)^2 n(n-k-1).
\end{aligned}\right.
$$

Wegen $1\leq k\leq n-2$ gilt auch $1\leq n-k-1\leq n-2$, und daher darf man in dieser Ungleichung k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$
(4.3)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda(n-k-1)R(n) &\geq \{n-k-1+(1-\alpha)k\}\bar{A}(n)-\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\
&\qquad -\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)+(1-\alpha)\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-(1-\alpha)^2 nk.
\end{aligned}\right.
$$

Diese Ungleichung wird mit $(1-\alpha)$ multipliziert und zu (4.2) addiert, wobei noch $-\lambda(1-\alpha)R(n)$ auf der linken Seite vernachlässigt wird:

$$
(4.4)\quad \begin{cases}
\lambda\{k+(1-\alpha)(n-k)\}R(n) \\
\geq \{k+2(1-\alpha)(n-k-1)+(1-\alpha)^2 k\}\bar{A}(n) - (2-\alpha)\binom{\bar{A}(n)}{2} - \\
\quad -\{1-(1-\alpha)^2\}\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) - (1-\alpha)^2 n\{n-k-1+(1-\alpha)k\} \\
\geq \{2(1-\alpha)(n-1)+\alpha^2 k\}\bar{A}(n) - \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n\bar{A}(n) + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n - \\
\quad - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k(k+1) - (1-\alpha)^2 n\{n-k-1+(1-\alpha)k\} \\
= \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 k\right\}\bar{A}(n) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k^2 - (1-\alpha)^2 n(n-\alpha k) - \\
\quad - 2(1-\alpha)\bar{A}(n) + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k + (1-\alpha)^2 n \\
\geq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 k\right\}\bar{A}(n) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k^2 - (1-\alpha)^2 n(n-\alpha k) + \\
\qquad + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k.
\end{cases}
$$

In diese Ungleichung sollen nun gewisse Werte für k eingesetzt werden, und wir haben sicherzustellen, daß dafür die Voraussetzung $1\leq k\leq n-2$ erfüllt ist. Sei jetzt

$$
(4.5)\qquad z=\varrho n \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\alpha}-(1-\alpha)}{\alpha};
$$

Da für $\alpha<1/2$ die Konstante c_1 besser als c_2 ist, können wir im folgenden $\alpha\geq 1/2$ voraussetzen und außerdem wieder $n\geq 4$[9]). Wegen $\varrho<1/2$ folgt dann $[\varrho n]+1=[z]+1\leq n-2$. Wir betrachten nun zunächst den Fall $1\leq z$ und dürfen jetzt

$$
k=[z]=z-\eta \quad \text{bzw.} \quad k=[z]+1=z+\delta
$$

in (4.4) einsetzen. Man erhält so zwei Ungleichungen, von denen die erste mit δ und die zweite mit η multipliziert wird; Addition beider Ungleichungen liefert dann [analog zu (3.6)]:

$$
(4.6)\quad \begin{cases}
\lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n) \\
\geq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2 - (1-\alpha)^2 n(n-\alpha z) + \\
\quad + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z+\eta\delta).
\end{cases}
$$

Wegen

$$
n-(2-\alpha)(z+\eta\delta) > n-\frac{3}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{n}{4}-\frac{3}{8}>0
$$

[9]) Die Fälle $n=1, 2, 3$ wurden in Fußnote 7), S. 376 erledigt.

hat man schließlich

$$(4.7)\quad \begin{cases} \lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n) \\ > \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2-(1-\alpha)^2 n(n-\alpha z). \end{cases}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Ungleichung auch im Falle $0<z<1$ gilt. Aus der 2. GF. folgt für $k=n$:

$$\begin{aligned} \lambda n R(n) &\geq n\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{n}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2} \\ &\geq n\bar{A}(n)-\frac{1-\alpha}{2}n(n+1)-\frac{1-\alpha}{2}n\bar{A}(n)+\frac{1-\alpha}{2}n \\ &= \frac{2+\alpha}{2}n\bar{A}(n)-\frac{1-\alpha}{2}n^2-\frac{1}{2}n\bar{A}(n) \\ &\geq \frac{2+\alpha}{2}n\bar{A}(n)-(1-\alpha)n^2. \end{aligned}$$

Daraus erhält man für $z-\eta=0$:

$$(4.8)\quad \begin{cases} \lambda\{z-\eta+(1-\alpha)(n-(z-\eta))\}R(n) \\ \geq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2(z-\eta)\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z-\eta)^2- \\ \qquad -(1-\alpha)^2 n\{n-\alpha(z-\eta)\}. \end{cases}$$

Setzt man in (4.4) $k=z+\delta$ ein, multipliziert (4.4) mit η, (4.8) mit δ und addiert beide Ungleichungen, so folgt

$$(4.9)\quad \begin{cases} \lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n) \\ \geq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2- \\ \qquad -(1-\alpha)^2 n(n-\alpha z)+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n\eta-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z+2\delta)\eta. \end{cases}$$

Nun gilt wegen $z+\delta=1$ und $n\geq 4$:

$$n-(2-\alpha)(z+2\delta)\geq n-4+2\alpha>0,$$

und daher folgt wegen $\eta>0$ aus (4.9) ebenfalls (4.7); diese Ungleichung gilt also jetzt allgemein unter der Voraussetzung (4.5). Setzt man in (4.7) $z=\varrho n$, so folgt wegen $A(n)=n-\bar{A}(n)$:

$$(4.10)\quad \begin{cases} \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)C(n)> \\ > -\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)-\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}-\alpha^2\varrho\right\}\bar{A}(n)+\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)n- \\ \qquad -\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}\varrho^2 n-(1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho)n. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt feststellen, daß der Koeffizient von $\bar{A}(n)$ negativ ist, um dann $\bar{A}(n)$ durch $(1-\alpha)n$ abschätzen zu können. Für die Dichte β von $\mathfrak{B}$ kann im folgenden

$$\beta \leq c_2 \alpha \tag{4.11}$$

vorausgesetzt werden, da unsere Behauptung (1.9) sonst bereits aus der bekannten SCHNIRELMANNschen Ungleichung[10])

$$\frac{C(n)}{n} \geq \alpha + \beta - \alpha\beta = \alpha + \beta(1-\alpha) \tag{4.12}$$

folgt (mit $\lambda = 1$). Zwischen β und λ besteht die Beziehung[11])

$$\lambda \geq 2 - \beta,$$

so daß wegen (4.11)

$$\lambda \geq 2 - c_2 \alpha$$

angenommen werden kann. Damit folgt unter Beachtung von (4.5) und

$$c_2 = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha} + 1 - \alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2} = \frac{2 - 2\alpha + \alpha^2 - (2-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\alpha^2}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha^2\varrho &\geq (2-c_2\alpha)\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha\left\{\sqrt{1-\alpha} - (1-\alpha)\right\} \\
&= \{2 - (c_2+1)\alpha\}\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left\{(2-\alpha)\sqrt{1-\alpha} - 2(1-\alpha)^2\right\}\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} \\
&= \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left\{4(1-\alpha)\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right) + \alpha^2\right\} > 0.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient von $\bar{A}(n)$ in (4.10) ist also tatsächlich negativ; man erhält daher aus (4.10):

$$\begin{aligned}
\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\frac{C(n)}{n} &> -\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha^2\varrho\right\}(1-\alpha) + \\
&\quad + \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}\varrho^2 - (1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho) \\
&= \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\alpha + \\
&\quad + \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} + 2\alpha\varrho + 2(1-\alpha)\varrho - (2-\alpha)\varrho^2\right\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \\
&= \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) + \{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\varrho^2\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2},
\end{aligned}$$

[10]) Siehe z.B. A. J. CHINTSCHIN: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin: Akad.-Verlag 1951.

[11]) Siehe [9], S. 7, Fußnote. Der Vollständigkeit halber soll der Beweis im folgenden ausgeführt werden.

also

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha + \frac{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\varrho^2}{2(1-\alpha+\alpha\varrho)} \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

$$= \alpha + \frac{1}{2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2} \left\{\sqrt{1-\alpha}\left(2-\alpha+2\sqrt{1-\alpha}\right) + 2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right) - \right.$$

$$\left. - (2-\alpha)\sqrt{1-\alpha}\right\} \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

$$= \alpha + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+1-\alpha}{\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2} \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} = \alpha\left(1+c_2\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Damit ist (1.9) bewiesen.

2. Beweis von c_2^*. Der Beweis der Ungleichung (1.12) mit der Konstanten c_2^* erfolgt analog zum finiten Fall. Die Voraussetzungen und die Grundformel werden in entsprechender Weise modifiziert, wie das beim Beweis von c_1^* im Bezug auf den Beweis von c_1 geschehen ist. Wir wollen daher den Beweis hier nicht im einzelnen ausführen, sondern lediglich darauf hinweisen, daß auch jetzt die im finiten Fall benutzten Hilfsmittel zur Verfügung stehen. Das ist einmal die SCHNIRELMANNsche Ungleichung, die bekanntlich auch im asymptotischen Fall richtig ist, und ferner die Abschätzung $\lambda^* \geq 2-\beta^*$, deren Beweis wir auch noch für den finiten Fall nachzuholen haben.

Hilfssatz 3. *Unter den in der Einleitung gemachten Voraussetzungen gilt:*

$$\lambda \geq 2-\beta, \tag{4.14}$$

$$\lambda^* \geq 2-\beta^*. \tag{4.15}$$

Beweis[12]). Für $m \in \mathfrak{B}$ gilt $l(m)=1$, sonst $l(m) \geq 2$. Daraus folgt

$$\lambda \geq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} l(m) \geq \frac{1}{n}\{B(n)+2(n-B(n))\} = 2-\frac{B(n)}{n},$$

also gilt (4.14). Da es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_ε gibt, so daß für alle $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung

$$\lambda^* + \varepsilon \geq 2 - \frac{B(n)}{n}$$

besteht, erhält man durch geeigneten Grenzübergang

$$\lambda^* + \varepsilon \geq 2-\beta^*;$$

da diese Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist, folgt schließlich (4.15).

§ 5. Differenzenmengen.

Es soll hier auf eine Verallgemeinerung der vorstehenden Überlegungen auf Differenzenmengen hingewiesen werden.

[12]) Im Anschluß an [9], S. 7, Fußnote.

Die bisher als $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ genannte Menge und die sich auf sie beziehenden Funktionen kennzeichnen wir durch ein hochgestelltes $+$, also: $\mathfrak{C}^+$, $C^+(n)$, $D^+(n)$, $E^+(n)$, ... Neben $\mathfrak{C}^+$ betraehten wir jetzt die Mengen

$$\mathfrak{C}^- = \{a-b\}_{a>b} \quad (a\in\mathfrak{A},\ b\in\mathfrak{B}),$$

also die positiven Zahlen aus $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$. Mit $C^-(n)$ werde die Anzahlfunktion von $\mathfrak{C}^-$ bezeichnet. Wir wollen nun auch zu $D^+(m)$, $E^+(m)$ bzw. $D'^+(m)$, $E'^+(m)$ analoge Funktionen einführen.

Definition 3. *$D^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$\bar{a}\in\bar{\mathfrak{A}} \quad \textit{mit} \quad \bar{a}+m\in\mathfrak{A}(n);$$

$E^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$\bar{a}\in\bar{\mathfrak{A}} \quad \textit{mit} \quad \bar{a}+m\in\bar{\mathfrak{A}}(n).$$

Definition 4. *$D'^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$a\in\mathfrak{A}(n) \quad \textit{mit} \quad a-m\in\bar{\mathfrak{A}};$$

$E'^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$a\in\mathfrak{A}(n) \quad \textit{mit} \quad a-m\in\mathfrak{A}.$$

Ein Vergleich zeigt, daß Definition 3 aus Definition 1 und Definition 4 aus Definition 2 durch Vertauschen von $\mathfrak{A}$ mit $\bar{\mathfrak{A}}$ und a mit $\bar{a}$ hervorgeht. Daraus folgt dann bereits, daß alle für $D^+(m)$ und $D'^+(m)$ hergeleiteten Beziehungen durch entsprechendes Vertauschen in solche für $D^-(m)$ und $D'^-(m)$ übergehen. Wie man sofort sieht, bleibt auch Hilfssatz 1 gültig. Schließlich gilt jetzt

$$D^-(b)\leq C^-(n)-A(n) \quad (b\in\mathfrak{B}),$$

denn in $D^-(b)$ werden die Elemente $\bar{a}\in\bar{\mathfrak{A}}$ mit $\bar{a}+b=a'\in\mathfrak{A}(n)$, d.h. mit $\bar{a}=a'-b$ gezählt; diese sind offenbar Elemente aus $\mathfrak{C}^-(n)$, die nicht in $\mathfrak{A}(n)$ liegen. Aus diesen Angaben folgt bereits, daß auch jetzt zwei komplementäre Grundformeln gelten und daß man diese aus (2.7) und (2.12) dadurch erhält, daß man darin $A(n)$ durch $\bar{A}(n)$ und $C^+(n)$ durch $C^-(n)$ ersetzt:

$$\text{(5.1)} \qquad \text{1. GF.}^-\text{:} \quad \lambda k\{C^-(n)-A(n)\}\geq\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(n-m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\Gamma(k);$$

$$\text{(5.2)} \qquad \text{2. GF.}^-\text{:} \quad \lambda k\{C^-(n)-A(n)\}\geq kA(n)-\sum_{m=1}^{k}A(m)-\binom{A(n)}{2}+\Gamma(k).$$

Aus diesen Formeln können nun ebenfalls verschiedene Folgerungen gezogen werden. Wir wollen uns hier auf zwei Bemerkungen beschränken. Zunächst soll eine Abschätzung bewiesen werden, die P. Erdös [3] ohne Beweis angegeben hat.

Sei $$\mathfrak{C}' = \{|a \pm b|\} \quad (a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B})$$

mit der Anzahlfunktion $C'(n)$, dann lautet die Ungleichung von P. ERDÖS[13]):

$$C'(n) \geq A(n) + \frac{A(n)\{n - A(n)\}}{2hn}.$$

Wir beweisen sogleich die entsprechende Ungleichung für die in $\mathfrak{C}'$ enthaltene Menge

$$\mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^- \equiv \mathfrak{C}^\pm$$

mit der Anzahlfunktion $C^\pm(n)$ und mit λ an Stelle von h. Addiert man zur 1. GF.$^+$ (2.7) die 2. GF.$^-$ (5.2), beide für $k = n-1$, dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda(n-1)\{C^+(n) + C^-(n) - 2A(n)\} &\geq (n-1)A(n) - 2\binom{A(n)}{2} \\ &= (n-1)A(n) - A^2(n) + A(n) \\ &= A(n)\{n - A(n)\}.\end{aligned}$$

Wegen

$$C^+(n) + C^-(n) \leq 2C^\pm(n)$$

erhält man daraus wie behauptet:

$$C^\pm(n) \geq A(n) + \frac{A(n)\{n - A(n)\}}{2\lambda n}.$$

Diese Abschätzung kann noch verbessert werden; wir wollen uns darauf beschränken, eine Verbesserung für gerade n und $A(n) = n/2$ anzugeben. Dazu werden die 1. GF.$^+$ (2.7) und die 1. GF.$^-$ (5.1) addiert, wobei $\Gamma(k)$ und $\Gamma(k)$ vernachlässigt werden und auf der linken Seite der Ungleichungen die vor der Berücksichtigung von $\mathfrak{B}$ vorhandenen Summen stehen bleiben; setzt man noch

$$\max_{m=1,\ldots,n} \left(D^+(m), D^-(m)\right) = D(m_0),$$

dann folgt

$$2kD(m_0) \geq \sum_{m=1}^{k} \{D^+(m) + D^-(m)\} \geq \frac{n^2}{4} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Mit den Werten

$$k_1 = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] = \frac{n}{\sqrt{2}} - \eta, \qquad k_2 = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] + 1 = \frac{n}{\sqrt{2}} + \delta,$$

wird nun vorstehende Ungleichung nach dem Schema aus § 3 gemittelt, d. h. sie wird einmal für $k = k_1$ und zum andern für $k = k_2$ genommen, im ersten Falle mit δ, im zweiten mit η multipliziert, und die so erhaltenen Ungleichungen werden addiert; man erhält dann

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,nD(m_0) &\geq \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}n^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}n - \frac{\delta\eta}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}n^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}n^2\end{aligned}$$

[13]) Die in [3] tatsächlich angegebene Formel enthält offensichtlich einen Druckfehler.

also

$$D(m_0) > \frac{2-\sqrt{2}}{4}\, n.$$

Auf Grund der Bedeutung von $\bar{D}^+(m)$ bzw. $D^-(m)$ ergibt sich aus dieser Abschätzung sofort die folgende Aussage:

Sind $a_1, \ldots, a_t$ beliebige natürliche Zahlen $\leq 2t$ $(t=1, 2, \ldots,)$ und $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_t$ die restlichen natürlichen Zahlen $\leq 2t$, dann gibt es eine ganze (nicht notwendig positive) Zahl m_0, so daß die Anzahl der $\bar{a}_i$ $(i=1, \ldots, t)$ in der Folge der Zahlen $a_i + m_0$ $(i=1, \ldots, t)$ größer als $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\, t$ ist[14].

Literatur.

[1] Brauer, A.: Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist. Math. Z. **44**, 212—232 (1939). — [2] Chintschin, A. J.: Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Mat. Sbornik **40**, 180—189 (1933). — [3] Erdös, P.: On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. Acta arithmetica **1**, 197—200 (1936). — [4] Erdös, P.: On the asymptotic density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. II. (Engl. mit russ. Auszug.) Trav. Inst. Math. Tbilissi **3**, 217—224 (1938). — [5] Klöter, H., u. A. Stöhr: Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte. J. reine angew. Math. (im Druck). — [6] Landau, E.: Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. 35, Cambridge 1937. — [7] Ostmann, H. H.: Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung für die Dichte der Summen zweier Zahlmengen. Dtsch. Math. **6**, 213—247 (1941/42). — [8] Rohrbach, H.: Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jber. dtsch. Math.-Ver.igg **48**, 201—236 (1938). — [9] Selberg, S.: Note on a metrical problem in the additive theory of numbers. Arch. Math. Naturvidensk. **47**, 11—118 (1944). — [10] Selberg, S.: A survey of some recent results in additive number theory. Mat. Tidsskr. A **1949**, 1—15. — [11] Stöhr, A.: Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. III. Neuer Beweis eines Satzes von A. Brauer. J. reine angew. Math. (im Druck).

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 25. Februar 1955.)

[14] Nach einer Mitteilung von P. Erdös, dem ich auch den Hinweis auf diese Frage verdanke, wurde dieses Ergebnis zuerst von P. Scherk aufgestellt.

NITSCHE, J.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 388—399 (1955)

Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke.

Von
JOACHIM NITSCHE.

Allgemein gesprochen ist ein einfach zusammenhängendes Flächenstück mit vorgeschriebener Metrik eindeutig bestimmt durch die Krümmung der Randkurve. Bei Vorgabe einer Funktion ϱ als Krümmung der Randkurve existiert aber nur dann ein Flächenstück mit gegebener Metrik, falls ϱ drei Integralbedingungen erfüllt. Anders werden die Verhältnisse, wenn der einfache Zusammenhang nicht mehr vorausgesetzt wird. Dann kann es sehr wohl noch Flächen geben, die sich stetig ineinander verbiegen lassen und die alle die gleiche Randkurvenkrümmung besitzen[1]). Dieser Sachverhalt soll hier untersucht werden.

Um zunächst die Verhältnisse an einem einfachen Beispiel zu diskutieren, werden Verbiegungen einer Kugelzone betrachtet. Sie entstehe durch den Schnitt zweier paralleler Ebenen mit der Einheitskugel. In der vorliegenden Arbeit wird der Sonderfall betrachtet, daß die Randkrümmung bzw. gleichbedeutend damit die Normalkrümmung auf den zwei Rändern S_1 und S_2 jeweils konstant ($=\varrho_1$ bzw. $=\varrho_2$) ist. Die Bestimmung von Biegeflächen mit der vorgeschriebenen Randeigenschaft wird wie in [1] auf das Auffinden von Lösungen einer Integralrelation zurückgeführt. Diese läßt sich als ein Verzweigungsproblem nichtlinearer Integrodifferentialgleichungen auffassen. Der wesentliche Grund für die besondere Durchführung konstanter Krümmungen liegt darin, daß sich dann die Verzweigungsgleichung vollständig diskutieren läßt. Bei allgemeiner Funktion ϱ ist das nur in beschränktem Maße möglich. Dieser Fall soll deshalb erst in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Die hier erzielten Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Mit R_1 bzw. R_2 wird der Radius des Schnittkreises S_1 bzw. S_2 bezeichnet. Die Aussagen sind für $R_1 = R_2$ und für $R_1 \neq R_2$ verschieden. Sie hängen also davon ab, ob die zwei Ebenen gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkt haben oder nicht. Im Falle der Gleichheit ergibt sich: Falls die zwei konstanten Normalkrümmungen ϱ_1, ϱ_2 von S_1, S_2 verschieden sind, existiert keine Biegefläche, für $\varrho_1 = \varrho_2$ existiert aber stets eine einparametrige Schar von Biegeflächen. Anders liegen die Verhältnisse bei $R_1 \neq R_2$. Hier kommt es auf das Vorzeichen von

$$A \equiv \frac{R_2^2 \varrho_2 - R_1^2 \varrho_1}{R_2^2 - R_1^2} - 1$$

[1]) Vgl. dazu auch E. REMBS [3]. Bei den bewiesenen Starrheitssätzen wird jedoch vorausgesetzt, daß die Randstreifen eben sind.

an. Für $A>0$ existieren genau zwei Biegeflächen, für $A<0$ hingegen keine der gewünschten Art. Die unverbogene Fläche ist die einzige unter der Gesamtheit ihrer Biegeflächen, für die der Ausdruck A Null ist. Insbesondere läßt sich also eine Kugelzone, deren Ränder symmetrisch zum Mittelpunkt liegen, unter Festhalten der Krümmungen ihrer Ränder stetig verbiegen, nicht verbiegbar bei dieser Randbedingung jedoch ist eine Zone mit unsymmetrisch zum Mittelpunkt verlaufenden Rändern.

Es wird allerdings vorausgesetzt, daß ϱ_1 und ϱ_2 nicht zu stark von 1 abweichen. Das entspricht der Forderung, nur Flächen in einer gewissen „Nachbarschaft" der unverbogenen Kugelzone zu betrachten.

I. Herleitung der Integralrelation.

Wir betrachten den durch zwei parallele Ebenen begrenzten Teil der Einheitskugel. Bilden wir wie in [1] die Kugel stereographisch auf die x, y-Ebene ab und legen die Schnitte parallel zu dieser, so entspricht der Zone ein Ringgebiet T, dessen zwei Ränder konzentrische Kreise S_1, S_2 vom Radius r_1, r_2 $(r_1<r_2)$ sind. Um Biegeflächen mit der geforderten Randeigenschaft zu gewinnen, müssen wir Lösungen L, M, N der Gauß-Codazzischen Gleichungen (vgl. [1], Formel (3)) bestimmen, für die auf $S=\{S_1+S_2\}$ die Beziehung

$$L\sin^2\varphi - 2M\sin\varphi\cos\varphi + N\cos^2\varphi = \sigma^2\varrho$$

gilt. ϱ ist die gegebene Normalkrümmung, σ der Abbildungsfaktor (vgl. [1], Formel (2))

$$\sigma = \frac{2}{1+r^2}, \tag{1}$$

und r, φ sind ebene Polarkoordinaten.

Durch die gleichen Überlegungen wie in [1, III] können wir folgendes beweisen:

1. U, V seien aus den Koeffizienten L, M, N der zweiten Grundform einer Biegefläche der Kugelzone vermöge

$$U = M, \qquad V = \tfrac{1}{2}(L-N)$$

gewonnen. Haben die Randkurven der Fläche die Normalkrümmungen ϱ_1 und ϱ_2, so gilt[2])

$$\left\{\iint_T \left[U(a_x - b_y) - V(a_y + b_x) + \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\sigma^4+U^2+V^2}\,\{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\}\right] dx\,dy = \oint_S R_{a,b}\,\sigma^2\varrho\,ds\right. \tag{2}$$

für alle stetig differenzierbaren Funktionen a, b mit

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0 \quad \text{auf} \quad S. \tag{3}$$

[2]) Dabei soll $\oint_S = \oint_{S_2} - \oint_{S_1}$ und $\varrho = \varrho_i$ auf S_i sein.

$R_{a,b}$ ist durch

$$R_{a,b} \equiv -a\sin\varphi + b\cos\varphi \tag{4}$$

definiert.

2. Erfüllen die stetig differenzierbaren Funktionen U, V die Integralrelation (2), so läßt sich durch Lösen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen eine Biegefläche der Kugelzone bestimmen, die

$$L = \sqrt{\sigma^4 + U^2 + V^2} + V, \qquad M = U, \qquad N = \sqrt{\sigma^4 + U^2 + V^2} - V$$

als Koeffizienten der zweiten Grundform und ϱ als Normalkrümmung des Randes besitzt.

Für die gestellte Aufgabe ist also die Lösbarkeit der Integralrelation (2) zu untersuchen. Wegen

$$\iint_T \{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\}\, dx\, dy = \oint_S R_{a,b}\sigma^2\, ds$$

kann (2) auch in der Form

$$\left\{\begin{aligned} &\iint_T [U(a_x - b_y) - V(a_y + b_x) + F(U,V)\{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\}]\, dx\, dy \\ &\qquad = \oint_S R_{a,b}\sigma^2(\varrho - 1)\, ds \end{aligned}\right. \tag{5}$$

geschrieben werden, wobei $F(U, V)$ für

$$F(U,V) = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\sigma^4 + U^2 + V^2} - 1 \tag{6}$$

steht.

II. Bestimmung von U, V bei gegebenen Funktionen ϱ und F.

Fassen wir F und ϱ als bekannte Funktionen der Klasse $E_{1,\lambda}$ in $T + S$ bzw. auf S auf, so stellt die Integralrelation (5) ein lineares Randwertproblem für U, V dar. Um dieses zu untersuchen, betrachten wir wie in $[I_{III}]$ das Hilfsproblem

$$\left\{\begin{aligned} a_x - b_y &= f(x,y) \\ a_y + b_x &= g(x,y) \end{aligned}\right\} \text{ in } T, \qquad a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0 \text{ auf } S \tag{7}$$

mit bekannten Funktionen f, g. Dieses Problem ist von Herrn I. N. VEKUA [5] behandelt, der folgendes beweist: Das zu (7) adjungierte Randwertproblem hat genau eine Nullösung[3])

$$\mathring{u} = k\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \mathring{v} = -k\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \tag{8}$$

---

[3]) Dabei sei k so gewählt, daß $\iint_T (\mathring{u}^2 + \mathring{v}^2)\, dx\, dy = 1$ gilt, d.h.

$$k = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\pi(r_2^2 - r_1^2)}}.$$

Die Gln. (7) besitzen eine Lösung, falls das Paar (f, g) die Bedingung

$$\iint_T (\mathring{u} f - \mathring{v} g)\, dx\, dy = 0 \tag{9}$$

erfüllt. Zu einer partikulären Lösung kann noch ein Vielfaches der Nullösung

$$\mathring{a} = -y, \quad \mathring{b} = x \tag{10}$$

addiert werden.

Soweit die Aussage von VEKUA. Da für $\mathring{a}, \mathring{b}$

$$\mathring{R}_{\mathring{a},\mathring{b}} \equiv -\mathring{a} \sin\varphi + \mathring{b} \cos\varphi = r \neq 0 \quad \text{auf} \quad S \tag{11}$$

gilt, läßt sich eine partikuläre Lösung von (7) durch

$$\oint_S \sigma^2 h(s)\, R_{a,b}\, ds = 0 \tag{12}$$

normieren, falls die stetige Funktion $h(s)$ nur die Bedingung

$$\oint_S \sigma^2 h(s)\, \mathring{R}_{\mathring{a},\mathring{b}}\, ds \neq 0 \tag{13}$$

erfüllt. Für die so eindeutig bestimmten Lösungen (a, b) von (7) existieren Auflösungsformeln der Gestalt[4])

$$\begin{cases} a(x,y) = \iint_T (K_{11} f + K_{12} g)\, d\xi\, d\eta, \\ b(x,y) = \iint_T (K_{21} f + K_{22} g)\, d\xi\, d\eta. \end{cases} \tag{14}$$

Die Kerne $K_{ij}(x, y; \xi, \eta)$ sind durch die Forderungen

$$\iint_T \{K_{i1}(x,y;\xi,\eta)\, \mathring{u} - K_{i2}(x,y;\xi,\eta)\, \mathring{v}\}\, d\xi\, d\eta = 0 \quad (i = 1,2;\ (x,y) \in T) \tag{15}$$

$$\begin{cases} \oint_S P_i(s,\xi,\eta)\, h(s)\, \sigma^2\, ds = 0 \quad (i = 1,2,\ (\xi,\eta) \in T) \\ \left(P_i(s,\xi,\eta) \equiv -\sin\varphi\, K_{1i}(x(s), y(s); \xi, \eta) + \cos\varphi\, K_{2i}(x(s), y(s); \xi, \eta)\right) \end{cases} \tag{16}$$

eindeutig bestimmt. Außerdem weisen sie die charakteristische Singularität auf, und es ist,

$$\left| K_{ij}(x,y;\xi,\eta) \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right|$$

für alle (x, y), $(\xi, \eta) \in T$ und $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ gleichmäßig beschränkt.

Die Integralrelation (5) muß für alle der Randbedingung (3) genügenden Funktionen a, b bestehen. Der Raum dieser Funktionenpaare ist die Summe der Vielfachen von $(\mathring{a}, \mathring{b})$ und des Raumes $\mathfrak{E}$ der durch die zwei Bedingungen

$$\begin{cases} & a \cos\varphi + b \sin\varphi = 0 \\ \mathfrak{E}: & \oint_S \sigma^2 h(s)\, (-a \sin\varphi + b \cos\varphi)\, ds = 0 \end{cases} \tag{17}$$

[4]) Sie lassen sich ebenso konstruieren wie in [I_{III}].

eingeschränkten Funktionenpaare. Durch

$$f = a_x - b_y, \qquad g = a_y + b_x \tag{18}$$

wird $\mathfrak{E}$ isomorph auf den durch

$$\mathfrak{F}: \quad \iint_T (\mathring{u} f - \mathring{v} g)\, dx\, dy = 0 \tag{19}$$

bestimmten Raum $\mathfrak{F}$ der Paare (f, g) abgebildet. Dabei wird wie in [I_{III}] vorausgesetzt: $a, b \in E_{1,\lambda}$, $f, g \in E_{0,\lambda}$.

Wir betrachten die Integralrelation für $(a, b) \in \mathfrak{E}$. Dazu lassen wir $(f, g) \in \mathfrak{F}$ beliebig variieren und setzen für a, b in (5) die Ausdrücke (14) ein. Vorher formen wir aber (5) durch partielle Integration (vgl. [I_{III}], Formel (22)) um:

$$\begin{cases} \iint_T \{U(a_x - b_y) - V(a_y + b_x)\}\, dx\, dy = \oint_S R_{a,b}\, \sigma^2 (\varrho - 1 - F)\, ds + \\ \qquad + \iint_T \sigma^2 (b F_x - a F_y)\, dx\, dy. \end{cases} \tag{20}$$

Wir erhalten

$$\iint_T (U f - V g)\, dx\, dy = \oint \sigma^2 (\varrho - 1 - F)\, ds \iint_T \{P_1(s; \xi, \eta)\, f + P_2(s; \xi, \eta)\, g\}\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \iint_T \sigma^2 F_x\, dx\, dy \iint_T (K_{21} f + K_{22} g)\, d\xi\, d\eta - \iint_T \sigma^2 F_y\, dx\, dy \iint_T (K_{11} f + K_{12} g)\, d\xi\, d\eta$$

und nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge die Gleichung

$$\iint_T d\xi\, d\eta \cdot f(\xi, \eta) \Big\{ U + \iint_T K_{11}\, \sigma^2 F_y\, dx\, dy - \iint_T K_{21}\, \sigma^2 F_x\, dx\, dy - \oint_S P_1 \sigma^2 (\varrho - 1 - F)\, ds \Big\}$$
$$- \iint_T d\xi\, d\eta\, g(\xi, \eta) \Big\{ V - \iint_T K_{12}\, \sigma^2 F_y\, dx\, dy + \iint_T K_{22}\, \sigma^2 F_x\, dx\, dy + \oint_S P_2 \sigma^2 (\varrho - 1 - F)\, ds \Big\} = 0.$$

Da (f, g) nur die Bedingung (19) erfüllen muß und sonst willkürlich ist, gilt also

$$\begin{cases} U(\xi, \eta) = \iint_T \{K_{21} F_x - K_{11} F_y\}\, \sigma^2\, dx\, dy - \oint_S P_1 \sigma^2 F\, ds + \oint_S P_1 \sigma^2 (\varrho - 1)\, ds + c \mathring{u} \\ V(\xi, \eta) = \iint_T \{-K_{22} F_x + K_{12} F_y\}\, \sigma^2\, dx\, dy + \oint_S P_2 \sigma^2 F\, ds - \oint_S P_2 \sigma^2 (\varrho - 1)\, ds + c \mathring{v} \end{cases} \tag{21}$$

mit einer beliebigen Konstanten c. Wegen (15) läßt sie sich in der Form

$$c = \iint (\mathring{u} U + \mathring{v} V)\, dx\, dy \tag{22}$$

darstellen. Für jede Wahl von c ist (U, V) (21) eine Lösung der Integralrelation mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$. Nun muß noch $(\mathring{a}, \mathring{b})$ eingesetzt werden (vgl. [I_I], Formel (18_I)):

$$\oint r\, \sigma^2 (\varrho - 1)\, ds = 8 \iint_T \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)^3} F\, dx\, dy. \tag{23}$$

Satz 1. *Die Integralrelation* (5) *bzw.* (20) *ist den Gln.* (21) *und* (23) *äquivalent.*

Satz 2. *Erfüllen* $\varrho \in E_{1,\lambda}$ *auf* S *und* $F \in E_{1,\lambda}$ *in* $T+S$ *die Bedingung* (23), *so besitzt die Integralrelation eine einparametrige Lösungsschar* $U(x,y;c)$, $V(x,y;c)$. *Ist der Parameter so gewählt, daß* (22) *gilt, so stellen* (21) *die Auflösungsformeln dar.*

Mit bekannten Abschätzungen der Potentialtheorie finden wir noch

Satz 3. *Für* U, V (21) *besteht eine Abschätzung der Gestalt*[5])

$$\|U,V\|_{h,\lambda} \leq C_1\{\|F\|_{h,\lambda} + \|\varrho - 1\|_{h,\lambda} + |c|\} \tag{24}$$

mit einer passenden Schranke C_1.

III. Die Integralrelation als System von Integrodifferentialgleichungen mit einer Nebenbedingung.

Setzen wir für F in (21) wieder den Ausdruck (6) ein, so erhalten wir ein System von nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen mit einem Parameter c, während (23) als Bedingungsgleichung für c anzusehen ist. Unsere Aufgabe ist die Untersuchung dieses Gleichungssystems auf Lösbarkeit bzw. Verträglichkeit, d.h. die Untersuchung, ob 1. die Integrodifferentialgleichungen eindeutig bestimmte Lösungen besitzen und 2. sich die Bedingungsgleichung (23) durch geeignete Wahl von c erfüllen läßt bzw. ob dabei und wann Verzweigungen auftreten. Wir setzen noch

$$\varrho = 1 + \varepsilon\bar{\varrho}.$$

Aus (6) folgt

$$\|F(U,V)\|_{h,\lambda} \leq C_2(\|U,V\|_{h,\lambda})^2$$

und

$$\|F(U,V) - F(\bar{U},\bar{V})\|_{h,\lambda} \leq C_2(\|U,V\|_{h,\lambda} + \|\bar{U},\bar{V}\|_{h,\lambda})\,\|U-\bar{U}, V-\bar{V}\|_{h,\lambda}$$

mit einer geeigneten Konstanten C_2. Zusammen mit (24) finden wir für Lösungen U, V bzw. $\bar{U}, \bar{V}$ der Integrodifferentialgleichungen

$$\begin{cases} \|U,V\|_{h,\lambda} \leq C_1\{C_2(\|U,V\|_{h,\lambda})^2 + |c| + |\varepsilon|\,\|\bar{\varrho}\|_{h,\lambda}\}, \\ \|U-\bar{U}, V-\bar{V}\|_{h,\lambda} \leq C_1 C_2\{\|U,V\|_{h,\lambda} + \|\bar{U},\bar{V}\|_{h,\lambda}\}\,\|U-\bar{U}, V-\bar{V}\|_{h,\lambda}. \end{cases} \tag{25}$$

Mit diesen Abschätzungen läßt sich die Konvergenz sukzessiver Approximationen, ausgehend von $U=V=0$, für alle ε, c mit

$$|c| < \Delta, \quad |\varepsilon|\,\|\bar{\varrho}\|_{h,\lambda} < \Delta, \quad \Delta = \frac{1}{16 C_1^2 C_2}$$

folgern. Die Grenzfunktionen U und V gehören in $T+S$ jedenfalls zur Klasse $E_{1,\lambda}$ und sind Lösungen der Integrodifferentialgleichungen (21). Außerdem gilt

$$\|U,V\|_{1,\lambda} \leq 2C_1(|c| + |\varepsilon|\,\|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda}) < \frac{1}{4C_1C_2}.$$

---

[5]) Dabei ist $\|U,V\| = \|U\| + \|V\|$ gesetzt und die Norm $\|F\|_{1,\lambda}$, $\|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda}$ in der üblichen Weise definiert; vgl. z.B. J. Schauder [4]. Der Beweis läßt sich so führen wie der von Hilfssatz 2 bei Joh. Nitsche [2].

Für zwei Lösungen U, V und $\bar{U}, \bar{V}$ der Integrodifferentialgleichungen (21) mit

$$\|U, V\|_{1,\lambda} < E, \quad \|\bar{U}, \bar{V}\|_{1,\lambda} < E, \quad E = \frac{1}{4 C_1 C_2}$$

würde aus (25_2)

$$\|U - \bar{U}, V - \bar{V}\|_{1,\lambda} < \|U - \bar{U}, V - \bar{V}\|_{1,\lambda}$$

folgen, was

$$U \equiv \bar{U}, \quad V = \bar{V}$$

bedingt. Damit haben wir die Gültigkeit der folgenden zwei Sätze bewiesen:

Satz 4. *Es existieren positive Schranken Δ, E, so daß das System* (21) *für*

$$|c| < \Delta, \quad |\varepsilon| \, \|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda} < \Delta$$

eine Lösung $U, V \in E_{1,\lambda}$ mit $\|U, V\|_{1,\lambda} < E$ besitzt.

Satz 5. *Das System* (21) *hat sicher nur eine Lösung $U, V \in E_{1,\lambda}$, für die $\|U, V\|_{1,\lambda}$ unterhalb E liegt.*

Während die Auflösungsformeln (21) zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen geeignet waren, werden wir im späteren ausschließlich mit der Integralrelation arbeiten. In Zusammenhang mit den am Schluß des Abschnittes II gemachten Bemerkungen können wir die zwei letzten Sätze auch folgendermaßen formulieren:

Satz 6. *Die Integralrelation* (5) *mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$ besitzt für $|\varepsilon| \, \|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda} < \Delta$ genau eine Lösung $U, V \in E_{1,\lambda}$, für die mit*

$$c = \iint_T (\mathring{u} U + \mathring{v} V) \, dx \, dy \tag{22}$$

die Ungleichungen $|c| < \Delta$ und $\|U, V\|_{1,\lambda} < E$ bestehen.

IV. Konstante Normalkrümmung auf S_1 und S_2.

Die Lösungen (U, V) der Integrodifferentialgleichungen bzw. der Integralrelation mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$ sind nur dann Lösungen des Problems, wenn noch

$$\varepsilon \oint_S \bar{\varrho} \, r \, \sigma^2 \, ds = 8 \iint_T \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)^2} F(U, V) \, dx \, dy \tag{26}$$

gilt. Wir werden U, V und F in eine Reihe nach Potenzen von $\varepsilon^k c^l$ entwickeln und nach Ausführen der Integration für (26) eine Gleichung

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} A_{kl} \frac{\varepsilon^k c^l}{k! \, l!} = 0$$

erhalten, die dann zu diskutieren ist. Während sich aber bei allgemeiner Funktion $\bar{\varrho}(s)$ nur in beschränktem Maße allgemeine Aussagen machen lassen, gelingt in einem Falle die vollständige Behandlung der Verzweigungsgleichung. Wir wollen annehmen, $\bar{\varrho}$ sei durch

$$\bar{\varrho} = \begin{cases} \bar{\varrho}_1 & \text{auf } S_1 \\ \bar{\varrho}_2 & \text{auf } S_2 \end{cases} \tag{27}$$

mit zwei Konstanten $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2$ gegeben. Die bislang willkürliche Normierungsfunktion $h(s)$ spezialisieren wir entsprechend

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{auf } S_1 \\ h_2 & \text{auf } S_2. \end{cases} \tag{28}$$

Die zwei Konstanten h_1, h_2 müssen gemäß (13) der Ungleichung

$$\frac{r_2^2}{(1+r_2^2)^2} h_2 - \frac{r_1^2}{(1+r_1^2)^2} h_1 \neq 0 \tag{29}$$

genügen. Für die gesuchten Lösungen U, V der Integralrelation (5) mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$ setzen wir

$$\begin{cases} U = c\,\mathring{u} + r^{-2}\alpha(r)\sin 2\varphi \\ V = c\,\mathring{v} + r^{-2}\alpha(r)\cos 2\varphi \end{cases} \tag{30}$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion $\alpha(r) = \alpha(r; \varepsilon, c)$ an. Durch (30) ist auf Grund $\mathring{u} \sim \cos 2\varphi$, $\mathring{v} \sim -\sin 2\varphi$ von vornherein die Bedingung (22) gesichert. Wir erhalten für F:

$$F = \sigma^{-2}\sqrt{\sigma^4 + r^{-4}(k^2 c^2 + \alpha^2)} - 1,$$

wofür wir bei Einführen von

$$\Sigma = \frac{1}{r^2\sigma^2} = \frac{(1+r^2)^2}{4r^2} \tag{31}$$

auch

$$F = \sqrt{1 + \Sigma^2(k^2 c^2 + \alpha^2)} - 1 \tag{32}$$

schreiben können. Die Integralrelation lautet jetzt

$$\begin{cases} \iint\limits_T \frac{\alpha(r)}{r^2}\{(a_x - b_y)\sin 2\varphi - (a_y + b_x)\cos 2\varphi\}\, r\, dr\, d\varphi + \\ + \iint\limits_T F\{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\}\, dx\, dy = \varepsilon \oint\limits_S R_{a,b}\sigma^2\bar{\varrho}\, ds. \end{cases} \tag{33}$$

Wegen der Rotationssymmetrie genügt es, für a, b nur Funktionen der Gestalt

$$a = -\lambda(r)\, y, \qquad b = \lambda(r)\, x \tag{34}$$

zu wählen. Denn dann wird

$$a_x - b_y = -r\lambda'\sin 2\varphi, \qquad a_y + b_x = r\lambda'\cos 2\varphi$$

$$(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y = \frac{1}{r}(\Sigma^{-1}\lambda)',$$

wobei die Differentiation nach r durch einen Strich angezeigt ist. Demnach sind die in (33) in geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke winkelunabhängig, fallen also bei der Integration über φ nicht heraus. (a, b) gehört zu $\mathfrak{E}$, falls λ der Bedingung

$$\frac{r_2^2}{(1+r_2^2)^2} h_2\lambda(r_2) - \frac{r_1^2}{(1+r_1^2)^2} h_1\lambda(r_1) = 0$$

bzw.

$$\Sigma_2^{-1} h_2 \lambda(r_2) - \Sigma_1^{-1} h_1 \lambda(r_1) = 0 \qquad (\Sigma_i = \Sigma(r_i)) \tag{35}$$

genügt.

Bei Einsetzen der Funktionen a, b (34) in (33) erhalten wir nach Integration bezüglich φ und Kürzen des Faktors 2π

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \{-\alpha \lambda' + F(\Sigma^{-1}\lambda)'\} = \varepsilon \{\Sigma_2^{-1} \bar{\varrho}_2 \lambda(r_2) - \Sigma_1^{-1} \bar{\varrho}_1 \lambda(r_1)\}$$

oder nach partieller Integration

$$\int_{r_1}^{r_2} (\alpha' - \Sigma^{-1} F') \lambda(r)\, dr = \{\alpha(r) - \Sigma^{-1}(F - \varepsilon \bar{\varrho})\} \lambda(r)\Big|_{r_1}^{r_2}.$$

Da $\lambda(r)$ an die einzige Gl. (35) gebunden ist, folgt

Satz 7. *Die Funktionen U, V (30) sind Lösungen der Integralrelation mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$, falls α der Differentialgleichung*

$$\Sigma \alpha' = \left(\sqrt{1 + \Sigma^2 (k^2 c^2 + \alpha^2)}\right)' \tag{36}$$

für $r_1 < r < r_2$ und den Randbedingungen

$$\begin{cases} \alpha(r_1) - \Sigma_1^{-1}\left(F(r_1) - \varepsilon \bar{\varrho}_1\right) = \varkappa \Sigma_1^{-1} h_1 \\ \alpha(r_2) - \Sigma_2^{-1}\left(F(r_2) - \varepsilon \bar{\varrho}_2\right) = \varkappa \Sigma_2^{-1} h_2 \end{cases} \tag{37}$$

mit einer Konstanten $\varkappa$ genügt.

Die Lösungen α und der Parameter $\varkappa$ besitzen folgende Eigenschaften:

Satz 8. 1. *Bei dem Ansatz $\alpha = \sum_{k,l=0}^{\infty} \alpha_{kl}(r) \frac{\varepsilon^k c^l}{k!\, l!}$ sind α_{kl} rekursiv durch Quadraturen bestimmbar.*

2. *Ist $\alpha(r)$ eine beliebige in der Umgebung von $r = 1$ definierte Lösung der Differentialgleichung (36), so gilt*

$$\alpha(r) = \alpha\left(\frac{1}{r}\right).$$

3. *Für $r_2 = r_1^{-1}$ hat $\varkappa$ den Wert*

$$\varkappa = \varepsilon \frac{\bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}_1}{h_2 - h_1}.$$

Die Aussage des Punktes 1. folgt daraus, daß α_{kl} einer Gleichung

$$\alpha'_{kl} = P(\alpha_{mn}, \alpha'_{\bar{m}\bar{n}})$$

genügt, wobei $P(\ldots)$ ein Polynom in den angegebenen Argumenten mit $m, \bar{m} < k$ bzw. $n, \bar{n} < l$ ist; die Randbedingung besitzt die Gestalt

$$\alpha_{kl}(r_i) - P(\alpha_{mn})\big|_{r=r_i} = \varkappa_{kl} \Sigma_i^{-1} h_i \qquad (i = 1, 2).$$

Zum Beweis von 2. nehmen wir an, $\alpha(r)$ sei für $r_0 < r < r_0^{-1}$ $(r_0 < 1)$ Lösung von (36). Da Σ (31) der Funktionalgleichung $\Sigma(r) = \Sigma\left(\frac{1}{r}\right)$ genügt und die

Differentialgleichung homogen in Ableitungen nach r ist, erfüllt somit auch $\hat{\alpha} \equiv \alpha\left(\frac{1}{r}\right)$ die Differentialgleichung. $\hat{\alpha}(r)$ und $\alpha(r)$ sind also Lösungen der Gleichung erster Ordnung und haben für $r=1$ die gleichen Anfangswerte. Somit stimmen sie überhaupt überein. Bei 3. ist die Voraussetzung von 2. erfüllt, d.h. die fragliche Lösung hat bei r_1 und r_2 den gleichen Wert. Da auch $\Sigma_1 = \Sigma_2$ gilt, finden wir durch Subtraktion der zwei Gln. (37)

$$\Sigma_1^{-1}(\varkappa h_1 - \varepsilon \bar{\varrho}_1) = \Sigma_1^{-1}(\varkappa h_2 - \varepsilon \bar{\varrho}_2)$$

oder für $\varkappa$ den angegebenen Wert.

V. Die Bedeutung des Parameters $\varkappa$.

Wie wir wissen, stellen die durch (30) definierten Funktionen U, V nur dann eine Lösung der Integralrelation dar, falls noch die Gl. (26), die jetzt

$$\varepsilon(\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2 - \Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1) = 8\int_{r_1}^{r_2} \frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} F r\, dr \tag{38}$$

lautet, besteht. Dabei ist für F der Ausdruck (32) einzusetzen, und α ist die Lösung des Randwertproblems (36), (37). Gl. (38) können wir umformen. Wegen

$$\frac{d}{dr}\Sigma^{-1} = 8\frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} r$$

wird

$$I \equiv 8\int_{r_1}^{r_2} \frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} F r\, dr = \Sigma^{-1} F\Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \Sigma^{-1} F'\, dr$$

und mit (36)

$$I = \Sigma^{-1} F\Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \alpha'\, dr = -(\alpha - \Sigma^{-1}F)\Big|_{r_1}^{r_2}.$$

Berücksichtigen wir nun (37), so wird

$$I = -\varkappa(\Sigma_2^{-1} h_2 - \Sigma_1^{-1} h_1) + \varepsilon(\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2 - \Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1).$$

Damit geht (38) in

$$\varkappa = 0 \tag{39}$$

über.

Satz 9. *Genau dann ist das durch* (30) *definierte Funktionenpaar* U, V *Lösung der Integralrelation* (5), *wenn der Parameter* $\varkappa$ *verschwindet.*

Beachten wir die Ergebnisse des Satzes 8, so finden wir

Hauptsatz 1. *Es sei* $r_1 r_2 = 1$ *und* $\bar{\varrho}$ *auf* S_1 *bzw.* S_2 *konstant und gleich* $\bar{\varrho}_1$ *bzw.* $\bar{\varrho}_2$. *Gilt dann*

1. $\bar{\varrho}_1 \neq \bar{\varrho}_2$, *so hat die Integralrelation nur für* $\varepsilon = 0$ *Lösungen, dann aber eine einparametrige Schar,*

2. $\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}_2$, *so hat die Integralrelation für jeden Wert von* ε $(|\varepsilon| < \varepsilon_0)$ *eine einparametrige Lösungsschar.*

VI. Diskussion bei $r_1 r_2 \neq 1$.

Aus der Differentialgleichung (36) und den Randbedingungen (37) folgt, daß α und damit auch $\varkappa$ analytische Funktionen von c^2 und ε sind. Wir bestimmen die ersten Entwicklungskoeffizienten. Zunächst ist wegen der Eindeutigkeit (Satz 6) $\alpha_{00}=0$ und damit auch $\varkappa_{00}=0$. $\alpha_{02}(r)$ genügt dem Problem

$$\Sigma \alpha'_{02} = \frac{d}{dr}\left\{\frac{\partial^2}{\partial c^2}\sqrt{1+\Sigma^2(k^2c^2+\alpha^2)}\right\}\Big|_{\varepsilon=c=0},$$

$$\alpha_{02}(r_i) - \Sigma_i^{-1}\frac{\partial^2}{\partial c^2}\sqrt{1+\Sigma^2(k^2c^2+\alpha^2)}\Big|_{\varepsilon=c=0} = \varkappa_{02}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2)$$

oder

$$\text{(40)} \qquad \begin{cases} \alpha'_{02} = 2k^2\Sigma' \\ \alpha_{02}(r_i) - k^2\Sigma_i = \varkappa_{02}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2). \end{cases}$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\alpha_{02} = 2k^2\Sigma + \mathring{\alpha}_{02}$$

mit einer Integrationskonstanten $\mathring{\alpha}_{02}$. Bei Subtraktion der zwei Gl. ($40_{2\,3}$) finden wir

$$\text{(41)} \qquad (\Sigma_2^{-1}h_2 - \Sigma_1^{-1}h_1)\varkappa_{02} = k^2(\Sigma_2 - \Sigma_1).$$

Weiter ist α_{10} durch

$$\text{(42)} \qquad \begin{cases} \alpha'_{10} = 0 \\ \alpha_{10}(r_i) + \Sigma_i^{-1}\bar{\varrho}_i = \varkappa_{10}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2) \end{cases}$$

gegeben, woraus wir

$$\text{(43)} \qquad (\Sigma_2^{-1}h_2 - \Sigma_1^{-1}h_1)\varkappa_{10} = \Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2 - \Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1$$

erhalten. Schließlich genügt α_{20} der Differentialgleichung

$$\alpha'_{20} = 2\alpha_{10}^2\Sigma',$$

d.h. es ist

$$\alpha_{20} = 2\alpha_{10}^2\Sigma + \mathring{\alpha}_{20}$$

wobei für α_{10} die Konstante

$$\varkappa_{10} = \frac{h_1\bar{\varrho}_2 - h_2\bar{\varrho}_1}{\Sigma_1 h_2 - \Sigma_2 h_1}$$

einzusetzen ist. Aus den Randbedingungen

$$\alpha_{20}(r_i) - \alpha_{10}^2\Sigma_i = \varkappa_{20}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2)$$

gewinnen wir

$$\text{(44)} \qquad (\Sigma_2^{-1}h_2 - \Sigma_1^{-1}h_1)\varkappa_{20} = \alpha_{10}^2(\Sigma_2 - \Sigma_1).$$

Auf Grund von (29) können $\varkappa_{10}$ und α_{10} und damit auch $\varkappa_{10}$ und $\varkappa_{20}$ nicht gleichzeitig verschwinden, es sei denn für $\bar{\varrho}_1=\bar{\varrho}_2=0$.

Hauptsatz 2. *Es sei* $r_1 r_2 \neq 1$. *Gilt dann*

1. $\Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1 \neq \Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2$, *so lautet die Verzweigungsgleichung* $\varkappa=0$:

$$\varkappa_{10}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varkappa_{02}c^2 + \cdots = 0.$$

Es existieren also zu jedem ε *mit*

$$\text{(45)} \qquad -\frac{\varkappa_{10}}{\varkappa_{02}}\varepsilon > 0$$

genau zwei Lösungen $c=c(\varepsilon)$ der Verzweigungsgleichung, zu ε mit

$$\frac{\varkappa_{10}}{\varkappa_{02}}\varepsilon>0 \tag{46}$$

jedoch keine ($\varepsilon=c=0$ ist Lösung).

2. *$\Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1=\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2$, aber $\bar{\varrho}_1^2+\bar{\varrho}_2^2\neq 0$, so lautet die Verzweigungsgleichung*

$$\alpha_{10}^2\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}k^2c^2+\cdots=0,$$

d.h. außer $\varepsilon=c=0$ existiert keine Lösung.

3. *$\bar{\varrho}_1=\bar{\varrho}_2=0$, so tritt ε nicht auf und die Verzweigungsgleichung heißt*

$$k^2c^2+\cdots=0,$$

d.h. $c=0$ ist die einzige Lösung.

Dabei sind die aufgeführten Konstanten k_{10} usw. sicher von Null verschieden.

Da der Radius R eines Kreises auf der Kugel, dessen Ebene parallel zur x, y-Ebene ist, mit dem Radius r in der Projektion vermöge

$$R=\frac{2r}{1+r^2} \tag{47}$$

verbunden ist, haben wir

$$\Sigma=R^{-2}. \tag{48}$$

Weiter ist mit (41), (43)

$$\frac{\varkappa_{10}}{\varkappa_{02}}=\frac{\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2-\Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1}{k^2(\Sigma_2-\Sigma_1)}=-\frac{R_1^2R_2^2}{k^2}\cdot\frac{R_2^2\bar{\varrho}_2-R_1^2\bar{\varrho}_1}{R_2^2-R_1^2}, \tag{49}$$

so daß für

$$\frac{R_2^2\bar{\varrho}_2-R_1^2\bar{\varrho}_1}{R_2^2-R_1^2}\varepsilon>0$$

Gl. (45) gilt. Dann muß aber

$$A\equiv\frac{R_2^2(\varrho_2-1)-R_1^2(\varrho_1-1)}{R_2^2-R_1^2}=\frac{R_2^2\varrho_2-R_1^2\varrho_1}{R_2^2-R_1^2}-1>0 \tag{50}$$

sein. Für $A<0$ besteht entsprechend (46). Aus diesen Überlegungen ist ersichtlich, daß die zwei Hauptsätze auch in der Formulierung der Einleitung ausgesprochen werden können.

Literatur.

[1] Nitsche, Joachim: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. Arch. Math. **4**, 331—336 (1953) (Teil I); **6**, 13—17 (1955) (Teil II); **6**, 145—150 (1955) (Teil III). — [2] Nitsche, Johannes: Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems. Math. Z. **61**, 336—347 (1954). — [3] Rembs, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. **1930**, 123—133. — [4] Schauder, J.: Über den Zusammenhang zwischen Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Ann. **106**, 661—721 (1932). — [5] Vekua, I. N.: Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typ und Randwertprobleme mit einer Anwendung auf die Theorie der Häute. Mat. Sbornik T 31 (72) **2**, 217—314 (1953).

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität.

(Eingegangen am 2. März 1955.)

Itô, N.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 400—401 (1955)

Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen.

Von
NOBORU ITÔ.

Kürzlich ist die Auflösbarkeit des Produkts von zwei abelschen Gruppen endlicher Ordnung bewiesen worden (AKIZUKI-SUZUKI [1] S. 124, HUPPERT [2], ITÔ [3]). Genauere Ergebnisse sind für das Produkt von zwei zyklischen Gruppen von WIELANDT [5] gefunden und von HUPPERT [2] und ITÔ [4] noch verschärft worden; dabei hat sich insbesondere ergeben, daß diese Gruppen metabelsch sind, d.h. eine abelsche Kommutatorgruppe besitzen. Die Beweise waren ziemlich schwierig. Hier geben wir einen sehr einfachen Beweis für den folgenden allgemeineren Satz:

Satz 1. *Jede (endliche oder unendliche) Gruppe, die sich als Produkt von zwei abelschen Untergruppen darstellen läßt, ist metabelsch.*

Beweis. Sei $G=AB$, worin A und B abelsch sind. Wir zeigen zunächst, daß die Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ mit $a\in A$, $b\in B$ die ganze Kommutatorgruppe G' von G erzeugen. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Gesamtheit dieser Kommutatoren invariant gegen Ähnlichkeitstransformation mit allen $a'\in A$ und $b'\in B$ ist. In der Tat ist nun

$$a'aba^{-1}b^{-1}a'^{-1}=ab^{*}a^{-1}b^{*-1}, \tag{1}$$

$$b'aba^{-1}b^{-1}b'^{-1}=a^{*}ba^{*-1}b^{-1}, \tag{2}$$

wenn $a'ba'^{-1}=b^{*}a''$ und $b'ab'^{-1}=a^{*}b''$ gesetzt wird, was wegen $G=AB=BA$ gestattet ist.

Als zweites zeigen wir, daß alle Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ miteinander vertauschbar sind. Dies folgt aus den Gleichungen

$$b'a'aba^{-1}b^{-1}a'^{-1}b'^{-1}=a^{*}b^{*}a^{*-1}b^{*-1}, \tag{3}$$

$$a'b'aba^{-1}b^{-1}b'^{-1}a'^{-1}=a^{*}b^{*}a^{*-1}b^{*-1}, \tag{4}$$

welche durch Transformation von (1) mit b' und von (2) mit a' entstehen. Damit ist der Beweis beendet. Wir fügen noch eine Bemerkung über den Fall endlicher Gruppen hinzu.

Satz 2. *Die endliche Gruppe G sei das Produkt zweier abelscher Untergruppen A und B. (I) Ist $A\neq B$, so enthält G einen Normalteiler $U\neq G$, der A oder B umfaßt. (II) Ist $G\neq 1$, so enthält A oder B einen Normalteiler $N\neq 1$ von G.*

Beweis durch Induktion nach der Ordnung von G.

(I) Es sei M ein minimaler Normalteiler von G. Seine Ordnung ist wegen der Auflösbarkeit von G eine Primzahlpotenz p^{α}.

(a) Ist $AM \neq BM$, so haben wir in $G/M = (AM/M)\,(BM/M)$ eine Zerlegung von G/M vor uns, die die Voraussetzungen von (I) erfüllt. Nach der Induktionsannahme gibt es in G/M einen eigentlichen Normalteiler U/M, welcher etwa AM/M umfaßt. Ihm entspricht in G ein eigentlicher Normalteiler U, welcher A umfaßt.

(b) Ist $AM = BM$, so ist beides gleich G. Wir dürfen $A \cap B = 1$ annehmen; sonst wäre nämlich $D = A \cap B$ ein Normalteiler von G mit $AD \neq BD$ und es läge der schon erledigte Fall (a) vor. Aus $AM = BM = AB$ und $A \cap B = 1$ folgt nun, daß die Ordnung von G eine Potenz der Primzahl p ist. Wegen $A \neq B$ ist mindestens eine der beiden Gruppen, etwa A, von G verschieden. Dann ist jede maximale Untergruppe U von G, welche A umfaßt, ein Normalteiler der gewünschten Art.

(II) Wir können annehmen, daß $A \neq 1$, $B \neq 1$ und $A \neq B$ ist; denn sonst leistet $N = A$ oder $N = B$ das Gewünschte. Wir zeigen zunächst: *G enthält einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Normalteiler U, welcher A oder B umfaßt und ein Zentrum $Z \neq 1$ besitzt.*

(a) Im Fall $A \cap G' \neq 1$ können wir für U den Zentralisator von $A \cap G'$ wählen. U umfaßt A und nach Satz 1 auch G', ist also normal in G, und das Zentrum von U umfaßt $A \cap G'$. Entsprechend können wir im Fall $B \cap G' \neq 1$ schließen.

(b) Im Fall $A \cap G' = B \cap G' = 1$ wählen wir für U nach (I) einen Normalteiler $\neq G$, der etwa A umfassen möge und daher $\neq 1$ ist. U ist von der Form AB^*, wo B^* eine Untergruppe von B ist. Nach der Induktionsannahme enthält A oder B^* einen Normalteiler $L \neq 1$ von U. Da die Kommutatorgruppe U' in G' enthalten ist, folgt $A \cap U' = B \cap U' = 1$, also $L \cap U' = 1$. Daher ist L im Zentrum von U enthalten.

Wir führen nun den Beweis von (II) zu Ende. Der gewählte Normalteiler U von G enthalte etwa A; dann hat U die Form AB^*, wo B^* eine Untergruppe von B ist. Das von 1 verschiedene Zentrum Z von U hat die Form $Z = A^*B^{**}$, mit geeigneten Untergruppen $A^* \subseteq A$ und $B^{**} \subseteq B^*$. Ist $B^{**} \neq 1$, so ist B^{**} im Zentrum von G enthalten und wir können $N = B^{**}$ setzen. Ist aber $B^{**} = 1$, so ist Z in A enthalten und außerdem charakteristisch in U, also normal in G; dann erfüllt $N = Z$ die Behauptung (II).

Bemerkung. Ist $A \cap G' \neq 1$ oder $B \cap G' \neq 1$, so gilt die Aussage (II) auch ohne die Endlichkeitsvoraussetzung, da diese im Fall (IIa) nicht benutzt worden ist.

Literatur.

[1] Akizuki, Y., u. M. Suzuki: Höhere Algebra. I. (Japanisch, 1952). — [2] Huppert, B.: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953). — [3] Itô, N.: Remarks on factorizable groups. Acta Sci. math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [4] Itô, N.: Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen. (Erscheint demnächst in Nagoya math. J.) — [5] Wielandt, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951).

Mathematisches Institut der Universität Nagoya (Japan).

(Eingegangen am 18. März 1955.)

Baer, R.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 402—437 (1955)

Nilgruppen.

Von
Reinhold Baer.

Unter einer Nilgruppe soll eine Gruppe verstanden werden, deren sämtliche zyklische Untergruppen nachinvariant im Sinne von H. Wielandt [*1*] sind. Es ist klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder von Nilgruppen wieder Nilgruppen sind. Tiefer liegt die Tatsache, daß eine Gruppe eine Nilgruppe ist, wenn sie Produkt von Normalteilern ist, die Nilgruppen sind [§ 3, Satz 1]; schärfer: eine Gruppe ist eine Nilgruppe, wenn sie von ihren nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt wird [§ 3, Zusatz 1]; und hieraus folgt, daß die Gesamtheit der nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugenden Elemente eine charakteristische Untergruppe ist, die sich als Verallgemeinerung der Fittingschen Untergruppe erweist.

Bringt man Endlichkeits- oder Kettenbedingungen ins Spiel, so erhält man überraschend scharfe Resultate: endlich viele nachinvariante zyklische Untergruppen erzeugen eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse, deren sämtliche Untergruppen ebenfalls nachinvariante, endlich erzeugbare Untergruppen sind [§ 3, Satz 3]; und endlich viele endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppen erzeugen eine endliche nilpotente nachinvariante Untergruppe [§ 3, Zusatz 2]. Daraus folgt insbesondere, daß die Elemente endlicher Ordnung in einer Nilgruppe eine charakteristische Untergruppe bilden, die direktes Produkt ihrer Primärkomponenten ist. — Andererseits ist die Zentrumsfaktorgruppe einer Nilgruppe endlich, wenn die Minimalbedingung von ihren nachinvarianten Untergruppen erfüllt wird [§ 6, Satz 2].

Enthält eine Gruppe eine von 1 verschiedene, Abelsche, nachinvariante Untergruppe, so ist die oben erwähnte umfassendste charakteristische Niluntergruppe auch von 1 verschieden; und es liegt nahe, diese Bemerkung bei der Untersuchung auflösbarer Gruppen zu benutzen. Dies geschieht in § 4 und § 7; und die so gewonnenen Resultate werden dann wieder zur Untersuchung der Nilgruppen benutzt; s. besonders § 5 und § 6.

Für vielerlei kritische Hinweise sind wir Herrn Dr. K. Gruenberg (London) dankbarst verpflichtet, der einen Entwurf dieser Arbeit gelesen hat.

Bezeichnungen.

$[a, b] = a^{-1} b^{-1} a b$.

$[A, B]$ ist die von den Kommutatoren $[a, b]$ mit a in A und b in B erzeugte Untergruppe.

$G' = [G, G]$, $G'' = [G', G']$, $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$.

${}^0G = G$, ${}^{n+1}G = [G, {}^nG]$.

$Z(G)$ = Zentrum von G.

$Z_0(G) = 1$, $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z[G/Z_n(G)]$.

$\{A, B\}$ ist die von den Elementen a in A und den Elementen b in B erzeugte Untergruppe.

1. Die Grundbegriffe.

In diesem Abschnitt wollen wir die einfachsten Eigenschaften der Nilgruppen, die ständig benötigt werden, herleiten und insbesondere den Begriff der Nilgruppe mit den übrigen für uns wichtigen Nilpotenzbegriffen in Beziehung setzen.

Definition. *Die kanonische zu der Teilmenge T der Gruppe G gehörige Normalkette $N_i(T) = N_i(T; G)$ wird induktiv folgendermaßen definiert:*

$N_0(T) = G$ und $N_{i+1}(T)$ ist der kleinste T enthaltende Normalteiler von $N_i(T)$.

Ist T etwa die leere Menge, so sind alle $N_i(T) = 1$. Allgemein bilden die $N_i(T)$ eine absteigende Normalkette, die mit G beginnt und deren Glieder sämtlich T enthalten. Daß dies sogar die kürzeste Normalkette dieser Art ist, ist der Inhalt des folgenden

Lemma 1. *Ist T eine Teilmenge der Gruppe G, $U_0 = G$, U_{i+1} ein T enthaltender Normalteiler von U_i für $0 \leq i$, so gilt $N_i(T) \leq U_i$ für $0 \leq i$.*

Beweis. Unsere Behauptung ist wegen $N_0(T) = G = U_0$ sicher für $i = 0$ wahr. Ist etwa schon $N_i(T) \leq U_i$ für ein gewisses i nachgewiesen, so ist $N_i(T) \cap U_{i+1}$ ein T enthaltender Normalteiler von $N_i(T)$, da ja U_{i+1} ein Normalteiler der $N_i(T)$ umfassenden Untergruppe U_i ist. Der kleinste T enthaltende Normalteiler $N_{i+1}(T)$ von $N_i(T)$ ist also auch in $N_i(T) \cap U_{i+1}$ enthalten; und daraus folgt $N_{i+1}(T) \leq U_{i+1}$, womit der induktive Beweis von Lemma 1 vollständig erbracht ist.

Lemma 2. *Ist T eine Teilmenge der Gruppe G und i positiv, so ist $N_i(T)$ das Produkt der zu $N_{i+1}(T)$ in $N_{i-1}(T)$ konjugierten Untergruppen.*

Denn jede zu $N_{i+1}(T)$ in $N_{i-1}(T)$ konjugierte Untergruppe ist ein Normalteiler von $N_i(T)$ und das Produkt dieser Normalteiler ist ein Normalteiler von $N_{i-1}(T)$.

Lemma 3. *Ist T eine nicht leere Teilmenge der Gruppe G, so ist $[G, T]$ ein Normalteiler von G, und $\{T, [G, T]\}$ ist der kleinste T enthaltende Normalteiler von G.*

Beweis. Sind x, y Elemente in G, ist t ein Element in T, so ist

$$x^{-1}[y, t]\, x = x^{-1} y^{-1} t^{-1} y t x = x^{-1} y^{-1} t^{-1} y x t t^{-1} x^{-1} t x = [y x, t]\,[x, t]^{-1}$$

ein Element in $[G, T]$, so daß also $x^{-1}[G, T]\, x \leq [G, T]$ für jedes x in G gilt. Folglich ist $[G, T]$ ein Normalteiler von G. — Es ist klar, daß jeder T enthaltende Normalteiler von G auch $\{T, [G, T]\}$ enthält. Da aber $[G, T]$ ein Normalteiler von G ist, so ist sicher auch $\{T, [G, T]\}$ ein Normalteiler von G; und folglich ist $\{T, [G, T]\}$ der kleinste T enthaltende Normalteiler von G.

Definition. *Ist T eine nicht leere Teilmenge der Gruppe G, so wird die zu T gehörige Kommutatorenkette $K_i(T) = K_i(T; G)$ induktiv folgendermaßen definiert:*

$$K_0(T) = G, \quad K_{i+1}(T) = [K_i(T), T].$$

Man überzeugt sich durch eine naheliegende Induktion, daß $K_{i+1}(T) \leq K_i(T)$ für jedes nichtnegative i gilt.

Folgerung 1. *Ist T eine nicht leere Teilmenge der Gruppe G und $0 \leq i$, so ist $N_i(T) = \{T, K_i(T)\}$.*

Beweis. Da unsere Behauptung sicher für $i = 0$ gilt, so können wir annehmen, daß unsere Behauptung schon für ein gewisses nicht negatives i erwiesen ist. Es folgt aus Lemma 3, daß der kleinste T enthaltende Normalteiler von $N_i(T)$ die Form

$$N_{i+1}(T) = \{T, [N_i(T), T]\}$$

hat. Nun ist wegen unserer Induktionsannahme $N_i(T) = \{T, K_i(T)\}$ und wegen

$$[K_i(T), K_i(T)]\,[K_i(T), T] \leq K_i(T)\,K_{i+1}(T) = K_i(T)$$

ist $K_i(T)$ ein Normalteiler von $N_i(T)$ und also $N_i(T) = \{T\}\,K_i(T)$. Dann wird aber

$$[N_i(T), T] = [K_i(T), T]\,[T, T] = K_{i+1}(T)\,[T, T];$$

und hieraus folgt sofort, daß

$$N_{i+1}(T) = \{T, [N_i(T), T]\} = \{T, K_{i+1}(T)\}$$

wird, womit unser Induktionsbeweis zu Ende geführt ist.

Definition. *Nachinvariante Untergruppen sind die Glieder der [endlichen] Normalketten.*

Man kann diesen — auf H. WIELANDT [1] zurückgehenden — Begriff auch folgendermaßen erklären: Die Klasse der nachinvarianten Untergruppen der Gruppe G ist die kleinste G enthaltende Klasse von Untergruppen von G, die mit irgendeiner Untergruppe auch alle ihre Normalteiler enthält. Die Wichtigkeit dieses Begriffes beruht auf seiner Transitivität; nachinvariante Untergruppen nachinvarianter Untergruppen sind nachinvariante Untergruppen.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften der nicht leeren Teilmenge T der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *T erzeugt eine nachinvariante Untergruppe von G.*

(2) *$\{T\} = N_j(T; G)$ für geeignetes j.*

(3) *$K_j(T; G) \leq \{T\}$ für geeignetes j.*

Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus Lemma 1, während die Äquivalenz von (2) und (3) sich aus Folgerung 1 ergibt.

Ist U eine nachinvariante Untergruppe der Gruppe G, so gibt es wegen Satz 1 ganze Zahlen j derart, daß $U = N_j(U; G)$ ist; und unter diesen Zahlen

gibt es eine kleinste $d = d(U; G)$, die wir als den *Defekt der nachinvarianten Untergruppe U in der Gruppe G* bezeichnen werden. Wir bemerken, daß G die einzige nachinvariante Untergruppe vom Defekt 0 in G ist, und daß die von G verschiedenen Normalteiler von G unter den nachinvarianten Untergruppen dadurch ausgezeichnet sind, daß sie den Defekt 1 haben.

Zusatz. *Jede nachinvariante Torsionsuntergruppe liegt in einem Normalteiler ohne Elemente unendlicher Ordnung.*

Beweis. Ist T eine nachinvariante Torsionsuntergruppe von G, so folgt aus Satz 1, daß $N_j(T; G) = T$ [für geeignetes j] eine Torsionsgruppe ist. Sei nun $1 < i \leq j$ und bereits gezeigt, daß $N_i(T; G)$ eine Torsionsgruppe ist. Nach Lemma 2 ist $N_{i-1}(T; G)$ ein Produkt von Normalteilern, die in $N_{i-2}(T; G)$ zu der Torsionsgruppe $N_i(T; G)$ konjugiert sind. Produkte von Normalteilern ohne Elemente unendlicher Ordnung sind aber Torsionsgruppen. Also ist auch $N_{i-1}(T; G)$ eine Torsionsgruppe. Durch vollständige Induktion folgt nun, daß der [kleinste] T enthaltende Normalteiler $N_1(T; G)$ von G eine Torsionsgruppe ist.

Aus diesem Zusatz folgt insbesondere, daß *das Erzeugnis aller nachinvarianten Torsionsuntergruppen eine charakteristische Torsionsuntergruppe* ist. Siehe auch § 3, Zusatz 2, 3.

Definition. *G ist eine Gruppe endlicher Klasse, wenn ${}^cG = 1$ für geeignetes c gilt.*

Nilpotenz wird häufig mit endlicher Klasse identifiziert; wir werden jedoch den Ausdruck „Nilpotenz" für den umfassendsten zulässigen Begriff dieser Art reservieren; s. unten.

Folgerung 2. *Die nichtleere Teilmenge T der Gruppe G erzeugt dann und nur dann eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse, wenn $K_t(T; G) = 1$ für geeignetes t gilt.*

Beweis. Ist zunächst $\{T\}$ nachinvariant, so existiert wegen Satz 1 eine $K_j(T; G) \leq \{T\}$ erfüllende ganze Zahl j. Ist überdies $\{T\}$ von endlicher Klasse, so existiert auch noch eine ${}^i\{T\} = 1$ erfüllende ganze Zahl i. Durch vollständige Induktion folgert man aber $K_{j+k}(T; G) \leq {}^k\{T\}$ aus $K_j(T; G) \leq \{T\}$, sodaß sich $K_{j+i}(T; G) = 1$ aus ${}^i\{T\} = 1$ ergibt. — Gibt es umgekehrt eine $K_t(T; G) = 1$ erfüllende ganze Zahl t, so ist $\{T\}$ nach Satz 1 eine nachinvariante Untergruppe von G. Durch vollständige Induktion zeigt man weiter ${}^n\{T\} \leq K_n(T; G)$, so daß insbesondere ${}^t\{T\} = 1$ aus $K_t(T; G) = 1$ folgt. Also ist $\{T\}$ eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse von G.

Folgerung 3. *Jede Untergruppe einer Gruppe endlicher Klasse ist eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse.*

Diese wohlbekannte Tatsache kann man etwa aus Folgerung 2 und der durch vollständige Induktion beweisbaren Ungleichung

$$K_n(T; G) \leq {}^nG$$

erschließen.

Hilfssatz 1. *Sind A und B Normalteiler der Gruppe G, so gilt*

$$^n(AB) \leq {}^nA \prod_{i+j=n-1} ({}^iA \cap {}^jB)\, {}^nB \quad \text{für} \quad 0 < n.$$

Dies folgt durch vollständige Induktion, wenn man nur die Ungleichungen

$$[A, {}^kB] \leq A \cap {}^kB,$$

$$[A, {}^iA \cap {}^jB] \leq [A, {}^iA] \cap [A, {}^jB] \leq {}^{i+1}A \cap {}^jB$$

bedenkt.

Lemma 4. *Produkte endlich vieler Normalteiler endlicher Klasse sind Normalteiler endlicher Klasse.*

Es genügt offenbar, dies für zwei Normalteiler A und B von endlicher Klasse nachzuweisen. Ist aber ${}^aA = 1 = {}^bB$, so ist auch ${}^{a+b}(AB) = 1$, wie sich aus Hilfssatz 1 ergibt, wenn man nur bedenkt, daß aus $i < a$ und $i + j = a + b - 1$ sofort $b - 1 < j$ oder $b \leq j$ folgt.

Hilfssatz 1 und Lemma 4 finden sich schon bei HIRSCH [1] und sind nur der Bequemlichkeit des Lesers wegen eingefügt.

Definition. *Die Gruppe G ist eine Nilgruppe, wenn jedes Element aus G eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt.*

Es ist ziemlich klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder von Nilgruppen wieder Nilgruppen sind. Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und ist sowohl G/N wie auch jede Untergruppe $\{N, g\}$ für g aus G eine Nilgruppe, so überzeugt man sich ohne Mühe, daß G selbst eine Nilgruppe ist. Dagegen kann man natürlich nicht zeigen, daß Erweiterungen von Nilgruppen durch Nilgruppen wieder Nilgruppen sind.

Aus Folgerung 2 ergibt sich weiter, daß G dann und nur dann eine Nilgruppe ist, wenn es zu jedem Element g aus G eine $K_n(g; G) = 1$ erfüllende Zahl $n = n(g; G)$ gibt.

Satz 2. *Produkte von Normalteilern endlicher Klasse sind Nilgruppen.*

Beweis. Ist G ein Produkt von Normalteilern endlicher Klasse, so ergibt sich aus Lemma 4, daß jedes Element aus G in einem Normalteiler endlicher Klasse enthalten ist. Da aber alle Untergruppen von Gruppen endlicher Klasse nachinvariant sind [Folgerung 3], und da die Nachinvarianz eine transitive Beziehung ist, so erzeugt jedes Element aus G eine nachinvariante Untergruppe von G, q. e. d.

In wesentlicher Verschärfung dieses Satzes 2 werden wir später [§ 3, Satz 1] zeigen, daß eine Gruppe eine Nilgruppe ist, wenn sie ein Produkt von Normalteilern ist, die ebenfalls Nilgruppen sind.

Aus dem Zusatz zu Satz 1 folgert man, daß die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in einer Nilgruppe eine charakteristische Torsionsuntergruppe ist. Man vgl. § 3, Zusatz 2, 3, wo dieses Resultat wesentlich verschärft wird.

Definition. *Bricht für jedes Elementepaar x, y aus der Gruppe G die durch die Formeln $x_0 = x$, $x_{i+1} = [x_i, y]$ induktiv abgeleitete Kommutatorenfolge nach endlich vielen Schritten mit 1 ab, so ist G eine* ENGELsche *Gruppe.*

ENGELsche Gruppen sind von GRUENBERG [1] und PLOTKIN [1] untersucht worden — der Name stammt von GRUENBERG, während PLOTKIN diese Gruppen als Nilgruppen bezeichnet.

Satz 3. *Nilgruppen sind* ENGELsche *Gruppen.*

In Nilgruppen existiert zu jedem g ein n derart, daß $K_n(G)=1$ ist [Folgerung 2]; und dies ist eine viel schärfere Eigenschaft als die definierende Eigenschaft der ENGELschen Gruppen.

Definition. *Die Gruppe G ist nilpotent, wenn jedes endliche homomorphe Bild einer Untergruppe von G [im üblichen Sinne] nilpotent ist.*

Für eine Diskussion dieses Begriffs vgl. BAER [3], [4].

Satz 4. (a) ENGELsche *Gruppen sind nilpotent.*

(b) *Jede* ENGELsche *Gruppe G hat folgende Eigenschaft:*

(b.E) *Ist $N\neq 1$ ein Normalteiler des homomorphen Bildes H einer Untergruppe von G, und ist h ein Element in H, so gibt es ein von 1 verschiedenes, mit h vertauschbares Element in N.*

(c) *Die Gruppe G ist dann und nur dann nilpotent, wenn sie folgende Eigenschaft hat:*

(c.N) *Sind x und y von 1 verschiedene Elemente teilerfremder Ordnung in dem endlichen homomorphen Bilde H einer Untergruppe von G, so enthält der kleinste x enthaltende Normalteiler von H ein von 1 verschiedenes, mit y vertauschbares Element.*

Bemerkung. ZASSENHAUS [1; p. 5] und ZORN [1] haben bereits auf die Nilpotenz endlicher ENGELscher Gruppen hingewiesen; s. auch KONTOROVIČ [1] und SCHENKMAN [1].

Beweis. Da die Eigenschaft (c.N) offenbar ein Spezialfall der Eigenschaft (b.E) ist, so ergibt sich aus (b) und (c) die Nilpotenz ENGELscher Gruppen, d.h. (a).

Ist H ein homomorphes Bild einer Untergruppe der ENGELschen Gruppe G, so ist auch H engelsch, da ja Untergruppen und homomorphe Bilder ENGELscher Gruppen ebenfalls engelsch sind. Ist $N\neq 1$ ein Normalteiler von H und h irgendein Element in H, so sei x_0 irgendein von 1 verschiedenes Element in N und die Elementenfolge x_i werde induktiv durch die Regel $x_{i+1}=[x_i, h]$ definiert. Da x_0 in dem Normalteiler N von H liegt, und da h zu H gehört, so sind alle x_i in N enthalten. Da H engelsch ist, so wird $x_i=1$ für alle hinreichend großen i. Da aber $x_0\neq 1$ ist, so existiert ein kleinstes positives k derart, daß $x_k=1$ ist. Dann ist aber x_{k-1} ein von 1 verschiedenes, in N enthaltenes Element, das wegen $1=x_k=[x_{k-1}, h]$ mit h vertauschbar ist; und damit ist die Gültigkeit von (b.E) nachgewiesen.

Elemente teilerfremder Ordnung in endlichen nilpotenten Gruppen sind bekanntlich miteinander vertauschbar; und daraus folgt die Notwendigkeit der Bedingung (c.N). — Es ist klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder von Gruppen mit der Eigenschaft (c.N) ebenfalls diese Eigenschaft (c.N) haben. Wäre Nilpotenz keine Folge von (c.N), so müßte es endliche,

nichtnilpotente Gruppen mit der Eigenschaft (c.N) geben; und unter diesen gibt es dann eine Gruppe W von minimaler Ordnung m. Jede echte Untergruppe von W hat dann kleinere Ordnung als W und hat die Eigenschaft (c.N), ist also nilpotent. Eine endliche Gruppe, deren sämtliche echte Untergruppen nilpotent sind, ist aber bekanntlich auflösbar; s. O. SCHMIDT [*1*] oder IWASAWA [*1*]. Ist M ein minimaler Normalteiler von W, so ist also M abelsch; und daraus folgt die Existenz einer $M^p=1$ erfüllenden Primzahl p. Da die Ordnung von W/M kleiner als m ist, und da W/M auch die Eigenschaft (c.N) hat, so ist W/M nilpotent. Sei nun w ein Element aus W, dessen Ordnung zu p teilerfremd ist. Ist $S=\{M, w\}$, so besteht $M\cap Z(S)$ genau aus den mit w vertauschbaren Elementen in M, da ja M abelsch ist. Aus (c.N) folgt also $M\cap Z(S)\neq 1$, so daß die Ordnung von $S/Z(S)$ kleiner als die von S und W ist. Da die Eigenschaft (c.N) nicht nur von W, sondern auch von der Untergruppe S von W und von dem homomorphen Bild $S/Z(S)$ von S erfüllt wird, so ergibt sich aus der Minimalität von m, daß $S/Z(S)$ nilpotent ist; und daraus folgt die Nilpotenz von S. Da $M^p=1$ und die Ordnung von w zu p teilerfremd ist, so folgt aus der Nilpotenz von $S=\{M, w\}$, daß w mit jedem Element aus M vertauschbar ist. Damit haben wir gezeigt, daß die Elemente in M mit allen Elementen teilerfremder Ordnung aus W vertauschbar sind; uns daraus folgt bekanntlich $M\leq Z(W)$, da ja M ein minimaler Normalteiler der endlichen Gruppe W ist; s. etwa BAER [*2*; § 4, Proposition 1]. Aus der bereits erwähnten Nilpotenz von W/M folgt nun die Nilpotenz von W; und dies ist der gesuchte Widerspruch. Also sind alle Gruppen mit der Eigenschaft (c.N) nilpotent, q. e. d.

Definition. *Die Gruppe G ist obernilpotent, wenn $Z(H)\neq 1$ für jedes homomorphe Bild $H\neq 1$ von G gilt.*

Für eine Diskussion dieses Begriffs vgl. etwa BAER [*2*], [*3*], [*4*] oder KUROŠ [*1*; Chapter XV, 63]. Es ist in unserem Zusammenhang nicht ohne Interesse, daß obernilpotente Gruppen G durch die folgende Eigenschaft charakterisiert werden können:

(0) *Sind x_i, y_i Elemente aus G derart, daß $x_{i+1}=[x_i, y_i]$ für jedes positive i gilt, so ist $x_i=1$ für wenigstens ein [und also für fast alle] i.*

Für den einfachen Beweis vgl. KUROŠ [*1*, p. 404, Lemma].

Weiter läßt sich ohne große Mühe zeigen, daß Untergruppen und homomorphe Bilder obernilpotenter Gruppen ebenfalls obernilpotent sind, daß Gruppen endlicher Klasse obernilpotent sind, und daß jede obernilpotente Gruppe auch engelsch ist. Dagegen gilt:

Nicht jede obernilpotente Gruppe ist eine Nilgruppe.

Ist nämlich A eine ABELsche Gruppe vom PRÜFERschen Typus p^∞ [die also von Elementen a_i erzeugt wird, die den Bedingungen $1=a_0^p$, $a_i=a_{i+1}^p$ genügen], so entstehe die Gruppe G aus A durch Adjunktion eines Elementes b, das die Bedingung $b^{-1}ab=a^{1+p}$ für jedes a aus A erfüllt. Diese Gruppe G

ist offenbar obernilpotent, aber keine Nilgruppe, da ja G der kleinste b enthaltende Normalteiler von G ist.

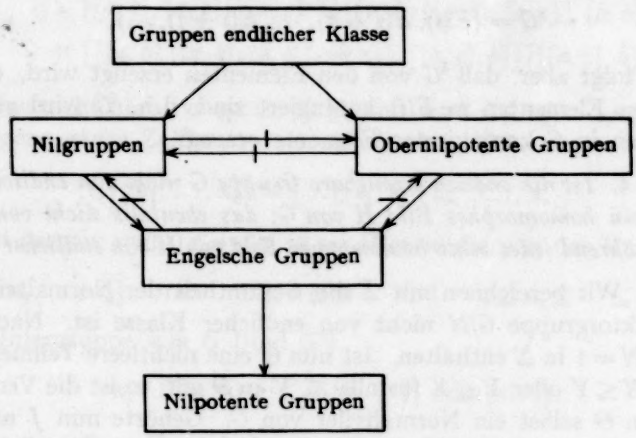
Nicht jede Nilgruppe ist obernilpotent.

Es gibt nämlich unendliche Gruppen G, die den Bedingungen

$$1 = Z(G) = G'' = G'^{p} = (G/G')^{p} \quad \text{für eine Primzahl } p$$

genügen; s. etwa BAER [*1*; p. 412, Example 3.4]. Solche Gruppen G sind natürlich nicht obernilpotent; aber sie sind Produkte von Normalteilern, die G' als Untergruppe von endlichem Index enthalten und von endlicher Klasse sind. Derartige Gruppen sind aber nach Satz 2 Nilgruppen.

Das folgende Diagramm möge diese Beziehungen zwischen den verschiedenen hier auftretenden Begriffen verdeutlichen.



2. Endlich erzeugbare Gruppen.

In diesem Abschnitt stellen wir die im folgenden benötigten Hilfsmittel aus der Theorie der endlich erzeugbaren Gruppen zusammen. Einige der Resultate sind neu und von unabhängigem Interesse.

Lemma 1. *Ist G eine endlich erzeugbare Gruppe und S eine Untergruppe von endlichem Index $[G:S]$ in G, so ist auch S endlich erzeugbar.*

Die Konstruktion eines endlichen Erzeugendensystems von S erfolgt mit Hilfe der Methode von SCHREIER-REIDEMEISTER. Für Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe haben wir dies an anderer Stelle ausgeführt; siehe BAER [*1*, p. 396, (1.3)]. Der allgemeine Fall wird dann auf diesen Spezialfall zurückgeführt, indem man bemerkt, daß nach dem POINCARÉschen Satz der Durchschnitt der zu S konjugierten Untergruppen ein in S enthaltener Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe ist.

Lemma 2. *Eine endlich erzeugbare, unendliche Gruppe besitzt ein unendliches homomorphes Bild, dessen echte homomorphe Bilder sämtlich endlich sind.*

Siehe BAER [*2*, § 1, Lemma 1].

Lemma 3. *Ist G eine endlich erzeugbare Gruppe, so läßt sich jedes ${}^iG$ von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugen.*

Einen Beweis dieses Satzes haben wir implizite an anderer Stelle gegeben; s. BAER [2; § 8, Theorem, insbesondere (1) bis (4)]. Wir deuten die Hauptpunkte dieses Beweises kurz an, der im wesentlichen eine Anwendung von PH. HALLS Kommutatorsammelprozeß ist. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G ergibt sich zunächst die Existenz eines endlichen Erzeugendensystems E von G, das mit e auch stets e^{-1} enthält. Man definiere dann die Teilmengen $E(i)$ von G induktiv durch die folgenden Regeln:

$E(0)=E$ und $E(i+1)$ besteht aus allen Kommutatoren $[f, e]$ mit f in $E(i)$ und e in E.

Es ist klar, daß mit E auch jedes $E(i)$ endlich ist; und man zeigt, daß

$$ {}^iG = \{E(i), E(i+1), \ldots, E(i+j), \ldots\} $$

ist. Daraus folgt aber, daß ${}^iG$ von den Elementen erzeugt wird, die zu den endlich vielen Elementen in $E(i)$ konjugiert sind, d.h. ${}^iG$ wird von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.

Lemma 4. *Ist die endlich erzeugbare Gruppe G nicht von endlicher Klasse, so existiert ein homomorphes Bild H von G, das ebenfalls nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von H von endlicher Klasse ist.*

Beweis. Wir bezeichnen mit Σ die Gesamtheit der Normalteiler N von G, deren Faktorgruppe G/N nicht von endlicher Klasse ist. Nach Voraussetzung ist $N=1$ in Σ enthalten. Ist nun Θ eine nichtleere Teilmenge von Σ derart, daß $X \leq Y$ oder $Y \leq X$ für alle X, Y in Θ gilt, so ist die Vereinigungsmenge J von Θ selbst ein Normalteiler von G. Gehörte nun J nicht zu Σ, so wäre G/J von endlicher Klasse und es existierte eine positive Zahl j derart, daß ${}^j(G/J)=1$ oder ${}^jG \leq J$ ist. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G und Lemma 3 folgern wir die Existenz endlich vieler Klassen $K_1, \ldots, K_n$ in G konjugierter Elemente, die zusammen ${}^jG$ erzeugen, d.h. ${}^jG=\{K_1, \ldots, K_n\}$. Ist g ein Element in K_i, so ist g ein Element in ${}^jG \leq J$; und es gibt also einen g enthaltenden Normalteiler N_i in Θ. Dieser Normalteiler N_i enthält aber mit g die ganze Klasse K_i zu g in G konjugierter Elemente. Unter den endlich vielen Normalteilern $N_1, \ldots, N_n$ aus Θ gibt es aber einen umfassendsten N, da ja Θ natürlich geordnet ist. Dann enthält aber N alle N_i und also auch alle K_i, so daß ${}^jG \leq N$ und G/N von endlicher Klasse ist. Das widerspricht aber unserer Konstruktion der Menge Σ, der ja N angehört. Damit haben wir gezeigt, daß auch J zu Σ gehört; und wir sehen, daß das Maximumprinzip der Mengenlehre auf Σ angewandt werden kann. Ist aber M ein maximaler Normalteiler in Σ, so ist $H=G/M$ nicht von endlicher Klasse, während jedes echte homomorphe Bild von H von endlicher Klasse ist, q. e. d.

Lemma 5. *Enthält das endliche Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_e$ der Gruppe G mit x_i auch stets x_i^{-1}, so wird die Kommutatorgruppe G' von G von den Kommutatoren $[\ldots[[x_i, x_j], x_{n_1}], \ldots, x_{n_k}]$ mit $0 \leq k$ und $1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k \leq e$ erzeugt.*

Beweis. Wir beginnen mit der Zusammenstellung einer Reihe wohlbekannter Formeln, die wir ständig benützen werden. Sind a, b, c Gruppenelemente, so ist

$$(1) \qquad [a, bc] = [a, c]\,[a, b]\,[[a, b], c],$$

$$(2) \qquad [ab, c] = [a, c]\,[[a, c], b]\,[b, c],$$

$$(3) \qquad c^{-1}[a, b]\,c = [a, b]\,[[a, b], c] = [a, c]^{-1}[a, bc].$$

Die nächste Formel folgt aus (1) und (2) durch eine einfache Rechnung, deren Hauptschritt wir andeuten:

$$(4) \quad \begin{cases} c^{-1}[a, b]\,c = [c^{-1}ac, c^{-1}bc] = [a[a, c], b[b, c]] \\ \quad = [a, [b, c]]\,[[a, [b, c]], [a, c]]\,[[a, c], [b, c]]\,[a, b] \times \\ \quad \times [[a, b], [a, c]]\,[[a, c], b]\,[[a, b]\,[[a, b], [a, c]], [b, c]] \times \\ \quad \times [[[a, b]\,[[a, b], [a, c]], [b, c]], [[a, c], b]]\,[[[a, c], b], [b, c]]. \end{cases}$$

Ist k eine nicht negative ganze Zahl und sind $i, j, n_1, \ldots, n_k$ zwischen 1 und e gelegene ganze Zahlen, so setzen wir zur Abkürzung:

$$[i, j; n_1, \ldots, n_k] = [\ldots[[x_i, x_j], x_{n_1}], \ldots, x_{n_k}].$$

Ist m nicht negativ und $0 \leq n \leq e$, so sei $H(m, n)$ die von den Kommutatoren

$$[i, j; n_1, \ldots, n_k] \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq m \quad \text{und} \quad 1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k \leq n$$

erzeugte Untergruppe von G [und G'].

$$(5) \qquad x_r^{-1} H(m, n)\, x_r \leq H\big(m + 1,\ \max(n, r)\big).$$

Wir werden diese Formel durch vollständige Induktion hinsichtlich m beweisen. Ist zunächst $m = 0$, so ist $H(0, n)$ unabhängig von der Wahl von n die von den sämtlichen Kommutatoren $[i, j] = [x_i, x_j]$ erzeugte Untergruppe von G. Wegen (3) ist aber

$$x_r^{-1}[i, j]\, x_r = [i, j]\,[[i, j], x_r] = [i, j]\,[i, j; r]$$

sicher in $H(1, r)$ enthalten, so daß

$$x_r^{-1} H(0, n)\, x_r \leq H(1, r) \leq H\big(1, \max(n, r)\big)$$

gilt, womit (5) für $m = 0$ bewiesen ist. Wir können und wollen also die Induktionsannahme machen, daß (5) bereits für ein gewisses nicht negatives m bewiesen ist. Aus dieser Induktionsannahme wollen wir die Ungleichung

$$(m + 1, r) \qquad x_r^{-1} H(m + 1, n)\, x_r \leq H\big(m + 2, \max(n, r)\big)$$

durch vollständige Induktion hinsichtlich $e - r$ herleiten. Die Gültigkeit von $(m + 1, e)$ ergibt sich mühelos aus der wegen (3) geltenden Identität

$$x_e^{-1}[i, j; n_1, \ldots, n_k]\, x_e = [i, j; n_1, \ldots, n_k]\,[i, j; n_1, \ldots, n_k, e],$$

wenn man nur $n_k \leq n \leq e$ bedenkt. Wir können und wollen also die Gültigkeit von $(m+1, s)$ für jedes $r < s \leq e$ erfüllende s annehmen, um daraus die Gültigkeit von $(m+1, r)$ herzuleiten. Zu diesem Zweck betrachten wir eine der „kanonischen" Erzeugenden

$$t = [i, j; n_1, \ldots, n_k] \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq m+1 \quad \text{und} \quad 1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k \leq n$$

von $H(m+1, n)$; und wir erinnern an die aus (3) folgende Gleichung

$$x_r^{-1} t x_r = t[t, x_r] = t[i, j; n_1, \ldots, n_k, r].$$

Ist $k < m+1$, so gehört t zu $H(m, n)$ und es folgt aus der ersten Induktionsannahme, daß $x_r^{-1} t x_r$ zu

$$x_r^{-1} H(m, n)\, x_r \leq H\big(m+1, \max(n, r)\big) \leq H\big(m+2, \max(n, r)\big)$$

gehört. Wir werden also im folgenden annehmen, daß $k = m+1$ ist. Ist weiter $n_{m+1} \leq r$, so ist $[i, j; n_1, \ldots, n_k, r]$ — wie auch t — eine der „kanonischen" Erzeugenden von $H(m+2, r) \leq H\big(m+2, \max(n, r)\big)$. Wir können also im folgenden auch annehmen, daß $r < n_{m+1}$ ist.

Wir erinnern daran, daß $t = [i, j; n_1, \ldots, n_{m+1}]$ ist; und setzen zur Abkürzung $a = [i, j; n_1, \ldots, n_m]$, $b = x_{n_{m+1}}$ und $c = x_r$. Dann wird

$$t = [a, b] \quad \text{und} \quad x_r^{-1} t x_r = c^{-1}[a, b]\, c.$$

Um nachzuweisen, daß dieses letzte Element in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$ enthalten ist, wollen wir verifizieren, daß jeder der in (4) auftretenden Faktoren in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$ liegt.

$[a, b] = t$ ist eine der „kanonischen" Erzeugenden von $H(m+1, n)$ und $[b, c] = [n_{m+1}, r]$ liegt in $H(0, n)$. Da a eine der „kanonischen" Erzeugenden von $H(m, n)$ ist, so folgt aus der ersten Induktionsannahme, daß $x_r^{-1} a x_r$ zu $x_r^{-1} H(m, n)\, x_r \leq H\big(m+1, \max(n, r)\big)$ gehört; und folglich liegt auch $[a, c] = a^{-1} x_r^{-1} a x_r$ in $H\big(m+1, \max(n, r)\big)$. Die drei Kommutatoren $[a, b]$, $[b, c]$ und $[a, c]$ liegen also insbesondere in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$.

Da a eine „kanonische" Erzeugende von $H(m, n)$ ist und $[b, c]$ in $H(0, n)$ liegt, so gehört $[a, [b, c]]$ zu $H(m, n) \leq H\big(m+2, \max(n, r)\big)$.

Aus $r < n_{m+1} \leq n$ folgern wir weiter, daß $\max(n, r) = n$ ist, und daß aus der zweiten Induktionsannahme die Gültigkeit von $(m+1, n_{m+1})$ folgt. Da aber $[a, c]$ in $H(m+1, n)$ liegt, so gehört $b^{-1}[a, c]\, b$ zu

$$x_{n_{m+1}}^{-1} H(m+1, n)\, x_{n_{m+1}} \leq H\big(m+2, \max(n, n_{m+1})\big) = H(m+2, n);$$

und $\big[[a, c], b\big] = [a, c]^{-1} b^{-1} [a, c]\, b$ ist folglich auch in $H(m+2, n)$ enthalten.

Da die Kommutatoren zweier zu einer Untergruppe gehörenden Elemente ebenfalls dieser Untergruppe angehören, so ergibt sich aus dem eben gezeigten, daß jeder der in Formel (4) auftretenden Faktoren zu $H(m+2, n) = H\big(m+2, \max(n, r)\big)$ gehört; und folglich liegt auch $c^{-1}[a, b]\, c = x_r^{-1} t x_r$ in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$. Da aber die Elemente t die „kanonischen" Erzeugenden von $H(m+1, n)$ sind, so haben wir die Gültigkeit

der Ungleichung $(m+1, r)$ dargetan. Damit ist der induktive Nachweis aller Ungleichungen $(m+1, i)$ mit $1 \leq i \leq e$ voll erbracht; und damit haben wir auch (5) für $m+1$ erwiesen. Die Ungleichungen (5) sind also induktiv voll bewiesen.

Unter H wollen wir nun die von den Kommutatoren

$$[i, j; n_1, \ldots, n_k] \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \quad \text{und} \quad 1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k \leq e$$

erzeugte Untergruppe von G [und G'] verstehen. Es ist klar, daß H das Erzeugnis der vorher betrachteten Untergruppen $H(m, n)$ ist. Aus (5) folgt also

$$x_i^{-1} H x_i \leq H$$

für jedes i. Da aber $x_i^{-1} = x_j$ für geeignetes j [nach Voraussetzung] ist, so gilt entsprechend

$$x_i H x_i^{-1} = x_j^{-1} H x_j \leq H \quad \text{oder} \quad H \leq x_i^{-1} H x_i.$$

Also ist sogar $H = x_i^{-1} H x_i$ für jedes i. Da die Gruppe G von den Elementen x_i erzeugt wird, so ist also H ein in G' enthaltener Normalteiler von G. Da jeder der Kommutatoren $[x_i, x_j]$ in H liegt, so ist G/H abelsch, so daß $G' \leq H \leq G'$ oder $H = G'$ gilt, q. e. d.

GRUENBERG [1] weist darauf hin, daß sich Lemma 5 auch durch den PH. HALLschen Kommutatorsammelprozeß beweisen ließe.

3. Nachinvariante Niluntergruppen.

Die Frage, ob die von zwei nachinvarianten Untergruppen erzeugte Untergruppe ebenfalls nachinvariant ist, ist bekanntlich noch unentschieden. WIELANDT hat in seiner grundlegenden Arbeit [1] zeigen können, daß dies wenigstens in Gruppen gilt, von deren nachinvarianten Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird. Wir wollen hier einige Beiträge zu dieser Frage liefern, die für die Theorie der Nilgruppen wichtig sind.

Wir beginnen mit einer vorläufigen Diskussion der Gruppen endlicher Klasse mit Maximalbedingung.

Lemma 1. *Die folgenden Eigenschaften der obernilpotenten Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist endlich erzeugbar.*

(2) *Jede Untergruppe von G ist endlich erzeugbar.*

(3) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern von G erfüllt.*

Für einen Beweis dieses Satzes vgl. BAER [4; p. 322, § 5, Satz 1].

Es ist wohlbekannt, daß dann und nur dann jede Untergruppe von G endlich erzeugbar ist, wenn die Maximalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt wird; und wir wollen Gruppen mit dieser Eigenschaft als NOETHERsche *Gruppen* bezeichnen.

Lemma 2. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist eine* NOETHERsche *Gruppe endlicher Klasse.*

(2) *G ist eine endlich erzeugbare Nilgruppe.*

(3) *G wird von seinen nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt und jedes ${}^iG$ ist endlich erzeugbar.*

Bemerkung 1. Wir werden später zeigen, daß G eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse ist, wenn G von endlich vielen zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird. Dieses Resultat macht natürlich das Lemma 2 überflüssig; doch wird beim Beweis dieses schärferen Resultats — und auch an anderen Stellen — von Lemma 2 wesentlicher Gebrauch gemacht.

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt [§ 1, Satz 2]. — Ist G eine endlich erzeugbare Nilgruppe, so wird G selbstverständlich von den zyklischen nachinvarianten Untergruppen von G erzeugt. Wir zeigen weiter durch vollständige Induktion die endliche Erzeugbarkeit einer jeden Ableitung $G^{(n)}$. Für $n=0$ ist dies genau unsere Voraussetzung. Haben wir etwa schon die endliche Erzeugbarkeit von $H=G^{(n)}$ dargetan, so besitzt H ein endliches Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_\varepsilon$, das mit h_i auch h_i^{-1} enthält. Jedes der h_i erzeugt eine zyklische nachinvariante Untergruppe von G [und H]; und wir folgern aus § 1, Folgerung 2 [oder § 1, Satz 3], daß jedes h_i die ENGELsche Eigenschaft hat:

(E) Zu jedem Element h in H gibt es eine positive ganze Zahl $m=m(h)=m(h, h_i)$ derart, daß $[\ldots[h, h_i], \ldots, h_i]=1$ ist, wo das Element h_i genau m mal auftritt.

Durch eine einfache Anwendung von § 2, Lemma 5 ergibt sich nun die endliche Erzeugbarkeit der Kommutatorgruppe $G^{(n+1)}$ von $G^{(n)}$, womit der induktive Nachweis der endlichen Erzeugbarkeit aller Ableitungen $G^{(i)}$ von G voll erbracht ist. Also ist insbesondere jede Faktorgruppe $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ als endlich erzeugbare ABELsche Gruppe noethersch; und hieraus folgt durch vollständige Induktion, daß jede Faktorgruppe $G/G^{(n)}$ der Maximalbedingung für Untergruppen genügt. Da aber $G^{(n)} \leq {}^nG$ ist, so ist auch ${}^nG/G^{(n)}$ endlich erzeugbar; und die endliche Erzeugbarkeit von ${}^nG$ folgt aus der von $G^{(n)}$ und ${}^nG/G^{(n)}$. Also ist (3) eine Folge von (2). — Für dieses Resultat und seine Herleitung vgl. GRUENBERG [*1*; Theorem 2].

Ist G endlich erzeugbar, so ist $G/{}^nG$ eine endlich erzeugbare Gruppe endlicher Klasse; und es folgt aus Lemma 1, daß jede Untergruppe von $G/{}^nG$ endlich erzeugbar ist. Ist überdies ${}^nG$ endlich erzeugbar, so ergibt sich hieraus die endliche Erzeugbarkeit einer jeden ${}^nG$ enthaltenden Untergruppe von G. Aus (3) können wir also die folgende Eigenschaft erschließen:

(a) *Jede ein ${}^iG$ enthaltende Untergruppe von G ist endlich erzeugbar.*

Eine endlich erzeugbare Gruppe, die von ihren zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird, wird bereits von endlich vielen zyklischen nach-

invarianten Untergruppen erzeugt; und die Defekte dieser endlich vielen zyklischen nachinvarianten Untergruppen sind beschränkt. Also existiert zu jeder (3) erfüllenden Gruppe G eine Zahl n mit folgender Eigenschaft:

(b.n) *G wird von den zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt, deren Defekt in G höchstens gleich n ist.*

Wir wollen nun Gruppen mit den Eigenschaften (a) und (b.n), die nicht von endlicher Klasse sind, als *$c-n$-Gruppen* bezeichnen. Endlich erzeugbare Gruppen endlicher Klasse sind NOETHERsch [Lemma 1]. Wäre also (1) keine Folge von (3), so gäbe es $c-n$-Gruppen für wenigstens ein [positives] n; und unter diesen Zahlen n existiert auch eine kleinste, die wir mit m bezeichnen wollen. Da G die einzige nachinvariante Untergruppe vom Defekt 0 in G ist, so ist m sicher positiv; und wir bemerken weiter, daß es eine $c-m$-Gruppe T gibt, während es keine $c-i$-Gruppen mit $i<m$ gibt.

Da die endlich erzeugbare Gruppe T nicht von endlicher Klasse ist, so existiert nach § 2, Lemma 4 ein homomorphes Bild H von T, das gleichfalls nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von H eine Gruppe endlicher Klasse ist. Da jeder Homomorphismus von T auf H die Untergruppe ${}^{i}T$ auf die Untergruppe ${}^{i}H$ abbildet, so hat H die Eigenschaft (a); und da nachinvariante zyklische Untergruppen, deren Defekt m nicht überschreitet, durch Homomorphismen auf nachinvariante zyklische Untergruppen abgebildet werden, deren Defekt in der Bildgruppe m nicht überschreitet, so hat H auch die Eigenschaft (b.m). Folglich ist H eine $c-m$-Gruppe.

Aus (b.m) ergibt sich die Existenz endlich vieler Elemente h_i mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$H=\{h_1,\ldots,h_k\};$$

jedes $\{h_i\}$ ist eine nachinvariante Untergruppe von H, deren Defekt in H höchstens gleich m ist.

Ist $H_i=N_1(h_i;H)$ der kleinste h_i enthaltende Normalteiler von H, so ist H das Produkt dieser endlich vielen Normalteiler H_i. Wäre jedes H_i von endlicher Klasse, so folgte aus § 1, Lemma 4, daß die $c-m$-Gruppe H von endlicher Klasse ist, was natürlich unmöglich ist. Also gibt es ein j derart, daß H_j nicht von endlicher Klasse ist. Dann ist H_j insbesondere nicht zyklisch, so daß $\{h_j\}<H_j$ wird und $\{h_j\}$ kein Normalteiler von H ist. Für den Defekt d von $\{h_j\}$ in H gilt also $1<d\leq m$. Es ist klar, daß $\{h_j\}$ eine nachinvariante Untergruppe von H_j ist, deren Defekt in H_j höchstens $d-1$ ist; s. § 1, Satz 1. Anwendung von § 1, Lemma 2 ergibt dann, daß H_j die Eigenschaft (b.$d-1$) hat.

Sei U eine ${}^{i}H_j$ enthaltende Untergruppe von H_j. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers H_j von H ist ${}^{i}H_j$ ein Normalteiler von H. Da H_j nicht von endlicher Klasse ist, so ist ${}^{i}H_j\neq 1$. Also ist $H/{}^{i}H_j$ ein echtes homomorphes Bild von H und als solches ist $H/{}^{i}H_j$ von endlicher Klasse. Mithin existiert eine ${}^{r}(H/{}^{i}H_j)=1$ erfüllende ganze Zahl r. Dann wird aber

$${}^{r}H\leq {}^{i}H_j\leq U;$$

und wir können aus (a) die endliche Erzeugbarkeit von U erschließen. Also hat H_j auch die Eigenschaft (a), so daß H_j eine $c-(d-1)$-Gruppe ist. Wegen $1 \leq d-1 < m$ widerspricht dies der minimalen Wahl von m. Unsere Annahme, daß (1) keine Folge von (3) ist, hat uns zu einem Widerspruch geführt, q. e. d.

Lemma 3. *Wenn N eine nachinvariante Untergruppe der Gruppe G ist, und wenn das Element g aus dem Normalisator von N in G eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt, dann ist $\{N, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G.*

Beweis. Aus der Nachinvarianz von N in G folgt die Existenz von Untergruppen U_i von G derart, daß $U_0 = N$, U_i ein Normalteiler von U_{i+1} und $U_n = G$ ist. Wir setzen

$$D_i = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} g^{-j} U_i g^j.$$

Da g im Normalisator von $N = U_0$ liegt, so ist auch

$$N = U_0 = D_0.$$

Weiter ist klar, daß $D_i \leq D_{i+1}$ und $D_n = G$ ist. Weiter liegt g im Normalisator aller D_i. Ist t ein Element in D_{i+1}, so liegt auch $g^j t g^{-j}$ in $D_{i+1} \leq U_{i+1}$. Da aber U_i ein Normalteiler von U_{i+1} ist, so ist also jedes $g^j t g^{-j}$ im Normalisator von U_i enthalten. Folglich wird

$$\begin{aligned} t^{-1} D_i t &= \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} t^{-1} g^{-j} U_i g^j t \\ &= \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} g^{-j} (g^j t g^{-j})^{-1} U_i (g^j t g^{-j}) g^j \\ &= \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} g^{-j} U_i g^j = D_i. \end{aligned}$$

Da folglich g und D_{i+1} im Normalisator von D_i enthalten sind, so ist D_i ein Normalteiler von $\{D_{i+1}, g\}$. Da $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G ist, so ist $\{g\}$ auch eine nachinvariante Untergruppe von $\{D_{i+1}, g\}$ und $\{D_i, g\}/D_i$ ist folglich eine nachinvariante Untergruppe von $\{D_{i+1}, g\}/D_i$. Mithin ist $\{D_i, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von $\{D_{i+1}, g\}$ und aus der Transitivität der Nachinvarianz folgern wir schließlich, daß $\{N, g\} = \{D_0, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von $G = \{D_n, g\}$ ist, q. e. d.

Lemma 4. *Wenn der Normalteiler N der Gruppe G eine Nilgruppe ist, und wenn es ein $G = \{N, g\}$ erfüllendes Element g in G gibt, das eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt, dann ist G eine Nilgruppe.*

Beweis. Ist x ein Element in G, so hat x die Form $x = y g^i$ mit y in N, da ja N ein Normalteiler von G ist und die zyklische Faktorgruppe G/N von der Restklasse Ng erzeugt wird. Die Untergruppe $X = \{x, g\}$ wird also auch von den vier Elementen y, y^{-1}, g, g^{-1} erzeugt. Da N eine Nilgruppe ist, so ist $\{y\}$ eine nachinvariante Untergruppe von N und also auch von G. Da $\{y\}$ und $\{g\}$ nachinvariante Untergruppen von G sind, so folgt aus § 1,

Folgerung 2 [oder § 1, Satz 3], daß jedes der Elemente y, y^{-1}, g, g^{-1} die ENGELsche Eigenschaft hat; und [wie beim ersten Teil des Beweises von Lemma 2] folgern wir nun aus § 2, Lemma 5, daß die Kommutatorgruppe X' von X ebenfalls endlich erzeugbar ist. Aus $X/(N\cap X) \simeq NX/N \leq G/N$ folgt, daß $X/(N\cap X)$ mit G/N eine zyklische Gruppe ist, so daß insbesondere $X' \leq N\cap X \leq N$ ist. Also ist X' eine endlich erzeugbare Nilgruppe, da N nach Voraussetzung eine Nilgruppe ist; und nun folgt aus Lemma 2, daß X' eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse ist. Da X endlich erzeugbar ist, so ist X/X' als endlich erzeugbare ABELsche Gruppe NOETHERsch und folglich ist die Erweiterung X der NOETHERschen Gruppe X' durch die NOETHERsche Gruppe X/X' ebenfalls NOETHERsch. Da aber X von den nachinvarianten Untergruppen $\{y\}$ und $\{g\}$ von G erzeugt wird, so ist X eine Gruppe, deren sämtliche Untergruppen endlich erzeugbar sind, und die von ihren zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird. Aus Lemma 2 ergibt sich, daß X eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse ist.

Wir bemerken, daß y in $N\cap X$ liegt, und daß also $X = \{N\cap X, g\}$ ist. Da $N\cap X$ ein Normalteiler der NOETHERschen Gruppe X endlicher Klasse ist, so existieren Untergruppen X_i von X mit folgenden Eigenschaften:

$1 = X_0$, X_i ist ein Normalteiler von X_{i+1} und X_{i+1}/X_i ist zyklisch, $X_n = N\cap X$.

Es gibt also Elemente x_i derart, daß $X_{i+1} = \{X_i, x_i\}$ ist. Da jedes x_i in dem Normalteiler N von G liegt, der eine Nilgruppe ist, so erzeugt jedes x_i eine nachinvariante Untergruppe von G; und da X_i ein Normalteiler von X_{i+1} ist, so liegt x_i im Normalisator von X_i. Aus Lemma 3 folgt nun durch eine naheliegende Induktion, daß jedes X_i eine nachinvariante Untergruppe von G ist. Also ist auch $X\cap N$ eine nachinvariante Untergruppe von G. Da $X = \{X\cap N, g\}$ ist, da g eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt und im Normalisator von $X\cap N$ liegt, so ist X nach Lemma 3 eine nachinvariante Untergruppe von G. Da X von endlicher Klasse ist, so ist jede Untergruppe von X eine nachinvariante Untergruppe von X [§ 1, Folgerung 3]. Aus der Transitivität der Nachinvarianz folgt schließlich, daß $\{x\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G ist. Also ist G eine Nilgruppe, q. e. d.

Satz 1. *Produkte von Normalteilern, die Nilgruppen sind, sind ebenfalls Nilgruppen.*

Beweis. Ist jeder der Normalteiler A und B der Gruppe G eine Nilgruppe, so wollen wir zunächst zeigen, daß auch der Normalteiler AB von G eine Nilgruppe ist. Ist g ein Element aus AB, so gibt es Elemente a und b in A bzw. B derart, daß $g = ab$. Da $\{b\}$ eine nachinvariante Untergruppe des Normalteilers B von G ist, so ist $\{b\}$ auch eine nachinvariante Untergruppe von AB und $\{Ab\} = \{A, b\}/A$ ist eine nachinvariante zyklische Untergruppe von AB/A. Folglich ist auch $\{A, b\} = \{A, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von AB [und G]. Da der Normalteiler A von $\{A, g\}$ eine Nilgruppe ist, und da $\{b\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G und also auch von $\{A, b\} = \{A, g\}$ ist, so ergibt sich aus Lemma 4, daß $\{A, b\} = \{A, g\}$ eine

Nilgruppe ist. Also ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe der nachinvarianten Untergruppe $\{A, g\}$ von AB; und aus der Transitivität der Nachinvarianz folgt, daß $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von AB ist. Also ist AB eine Nilgruppe.

Sind $N_1, \ldots, N_k$ endlich viele Normalteiler von G und ist jedes N_i eine Nilgruppe, so folgern wir durch eine naheliegende Induktion aus dem Ergebnis des ersten Abschnitts dieses Beweises, daß auch das Produkt $N_1 \ldots N_k$ eine Nilgruppe ist.

Sei schließlich Θ eine Menge von Normalteilern der Gruppe G und sei jeder Normalteiler in Θ eine Nilgruppe. Ist g ein Element im Produkt P aller Normalteiler in Θ, so gibt es endlich viele Normalteiler $T_1, \ldots, T_k$ in Θ derart, daß g bereits dem Produkt $T = T_1 \ldots T_k$ angehört. Wir haben aber im vorigen Abschnitt dieses Beweises gezeigt daß ein solches Produkt T eine Nilgruppe ist. Also ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe des Normalteilers T von G und mithin auch eine nachinvariante Untergruppe von G und von P. Folglich ist P eine Nilgruppe, q. e. d.

Definition. *$R(G)$ ist die Gesamtheit der nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugenden Elemente in der Gruppe G.*

Satz 2. *$R(G)$ ist eine charakteristische Niluntergruppe von G.*

Bemerkung 2. Da $R(G)$ offenbar das Erzeugnis aller nachinvarianten Niluntergruppen von G ist, so ist $R(G)$ *eine Verallgemeinerung der* FITTING*schen Untergruppe*, die für endliche Gruppen als Produkt aller nilpotenten Normalteiler definiert wird, und mit der $R(G)$ im endlichen Falle [wegen § 1, Satz 3, 4] übereinstimmt.

Bemerkung 3. Satz 1 und Lemma 4 sind als Spezialfälle in Satz 2 enthalten.

Beweis. Ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G, so ist $\{g\} = N_n(g; G)$ für geeignetes positives n [§ 1, Satz 1]. Also ist $N_n(g; G)$ insbesondere eine Nilgruppe. Ist $1 < i \leq n$, und haben wir bereits gezeigt, daß $N_i(g; G)$ eine Nilgruppe ist, so bemerken wir, daß $N_{i-1}(g; G)$ das Produkt der zu $N_i(g; G)$ in $N_{i-2}(g; G)$ konjugierten Normalteiler ist [§ 1, Lemma 2]. Als Produkt von Normalteilern, die sämtlich Nilgruppen sind, ist $N_{i-1}(g; G)$ ebenfalls eine Nilgruppe [Satz 1]. Aus diesem induktiven Beweis folgt insbesondere, daß der kleinste g enthaltende Normalteiler $N_1(g; G)$ von G eine Nilgruppe ist.

Das Produkt aller $N_1(g; G)$ mit g in $R(G)$ ist also ein Produkt P von Normalteilern, die Nilgruppen sind; und als solches ist P ebenfalls eine Nilgruppe [Satz 1]. Nach Definition ist $R(G) \leq P$. Ist aber x ein Element in P, so ist $\{x\}$ eine nachinvariante Untergruppe der Nilgruppe P; und da P ein Normalteiler ist, so ist $\{x\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G, so daß x zu $R(G)$ gehört und $P \leq R(G)$ ist. Damit ist $P = R(G)$ gezeigt, q. e. d.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Untergruppe U von G sind untereinander äquivalent:*

(1) *U ist eine nachinvariante* NOETHERsche *Untergruppe endlicher Klasse.*

(2) *U ist das Erzeugnis endlich vieler, endlich erzeugbarer, nachinvarianter Niluntergruppen.*

(3) *U ist endlich erzeugbar und in $R(G)$ enthalten.*

Beweis. Gruppen endlicher Klasse sind Nilgruppen [§ 1, Satz 2]; und also folgt (2) aus (1). — Daß (3) aus (2) folgt, ergibt sich aus der Transitivität der Nachinvarianz und der Definition von $R(G)$, sowie der Tatsache, daß $R(G)$ eine Untergruppe ist [Satz 2].

Ist U endlich erzeugbar und in $R(G)$ enthalten, dann ist U eine endlich erzeugbare Nilgruppe und also eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse [Lemma 2]. Mithin existieren endlich viele Untergruppen U_i von U mit folgenden Eigenschaften:

$1 = U_0$, U_i ist ein Normalteiler von U_{i+1} und U_{i+1}/U_i ist zyklisch, $U_n = U$.

Es gibt also Elemente r_i derart, daß $U_{i+1} = \{U_i, r_i\}$ ist. Da U_i ein Normalteiler von U_{i+1} ist, so liegt r_i im Normalisator von U_i; und da r_i der Untergruppe U von $R(G)$ angehört, so erzeugt r_i eine nachinvariante Untergruppe von G. Durch eine naheliegende Induktion erschließt man nun aus Lemma 3, daß jedes U_i und also auch $U_n = U$ eine nachinvariante Untergruppe von G ist. Also ist (1) eine Folge von (3), q. e. d.

Bemerkung 4. Die Unentbehrlichkeit der Endlichkeitsannahmen in Satz 3, (2) ergibt sich aus folgender Betrachtung, die auch zeigen wird, daß die Vereinigung einer aufsteigenden Folge nachinvarianter Untergruppen nicht nachinvariant zu sein braucht:

Es sei F_n eine Gruppe der Klasse n, die eine zyklische Untergruppe T_n vom genauen Defekt n besitzt — man kann etwa $F_n = F/F^{n!}$ wählen, wo F eine nichtkommutative freie Gruppe ist. Weiter sei G das direkte Produkt aller F_n, $U_n = T_1 \ldots T_n$ und U die Vereinigung der aufsteigenden Kette der U_n. Jedes U_n und auch U ist abelsch. Weiter ist jedes U_n eine nachinvariante Untergruppe vom genauen Defekt n, so daß U nicht nachinvariant sein kann. Andererseits ist $U \leq R(G)$ und jedes Element in U erzeugt eine nachinvariante Untergruppe von G. Schließlich sei erwähnt, daß $G = R(G)$ obernilpotent ist.

Zusatz 1. *G ist dann und nur dann eine Nilgruppe, wenn G von seinen nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt wird.*

Folgt ohne weiteres aus Satz 2.

Zusatz 2. *Endlich viele Elemente endlicher Ordnung, die nachinvariante zyklische Untergruppen erzeugen, erzeugen eine endliche, nilpotente, nachinvariante Untergruppe.*

Dies folgt leicht aus Satz 3, wenn man sich nur daran erinnert, daß endlich viel Elemente endlicher Ordnung in einer obernilpotenten Gruppe — also auch in einer Gruppe endlicher Klasse — eine endliche nilpotente Gruppe erzeugen; s. etwa BAER [2; § 6, Theorem 1, (v)].

Zusatz 3. *Die Elemente endlicher Ordnung in einer Nilgruppe bilden eine charakteristische Untergruppe, die direktes Produkt von Primärgruppen ist.*

Dies ergibt sich sofort aus Zusatz 2 und den wohlbekannten Eigenschaften endlicher nilpotenter Gruppen, da ja Untergruppen von Nilgruppen ebenfalls Nilgruppen sind.

Nilgruppen ohne torsionsfreie Faktorgruppen sind [wegen Zusatz 3] stets Torsionsgruppen.

4. Auflösbarkeit.

Es ist klar, daß bei der Diskussion nilpotenter Gruppen allerlei Auflösbarkeitsbegriffe eine Rolle spielen werden. Die verschiedenen für unsere Anwendungen wichtigen Möglichkeiten sollen hier aufgezählt und erörtert werden.

Definition. *Die Gruppe G ist auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen, ABELschen Normalteiler besitzt.*

Es ist klar, daß G sicher dann auflösbar ist, wenn $G^{(k)}=1$ für geeignetes positives k gilt, während aus der bloßen Auflösbarkeit von G noch nicht auf die Existenz einer solchen ganzen Zahl k geschlossen werden kann. — Weiter macht man sich klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder auflösbarer Gruppen ebenfalls auflösbar sind.

Satz 1. *Die Gruppe G ist dann und nur dann auflösbar, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:*

(A) *Sind x_i, y_i Elemente aus G derart, daß $x_{i+1}=[x_i,[x_i,y_i]]$ für jedes positive i gilt, so ist $x_i=1$ für wenigstens ein [und also für fast alle] i.*

Man vergleiche dieses Kriterium mit § 1, (0).

Beweis. Enthielte die auflösbare Gruppe G von 1 verschiedene Elemente x_i, y_i derart, daß $x_{i+1}=[x_i,[x_i,y_i]]$ für $i=1,2,\ldots$ gilt, so gibt es einen maximalen, keines der x_i enthaltenden Normalteiler M von G. Dann ist sicher G/M ein von 1 verschiedenes homomorphes Bild von G; und aus der Auflösbarkeit von G folgt die Existenz eines

$$N' \leq M < N$$

erfüllenden Normalteilers N von G. Wegen der Maximalität von M liegt x_n in N für wenigstens ein n. Da N ein Normalteiler von G ist, so enthält N auch den Kommutator $[x_n,y_n]$, so daß $x_{n+1}=[x_n,[x_n,y_n]]$ in $N'\leq M$ liegt, was unserer Wahl von M widerspricht. Also folgt (A) aus der Auflösbarkeit von G.

Erfüllt umgekehrt G die Bedingung (A), so gilt dasselbe von allen homomorphen Bildern von G. Angenommen nun es gäbe ein homomorphes Bild $H\neq 1$ von G, das keinen ABELschen Normalteiler besitzt. Ist $h\neq 1$ ein Element in H, so wird der kleinste, h enthaltende Normalteiler $N=N_1(h;H)$ von H von h und den Kommutatoren $[h,x]$ mit x in H erzeugt [§ 1, Lemma 3]. Da N nicht abelsch ist, so gibt es ein h' derart, daß $[h,[h,h']]=[h,h'^{-1}hh']\neq 1$ ist; und nun ist es klar, wie man eine die Bedingung (A) verletzende Elementenfolge h_i, h_i' in H konstruieren kann. Also folgt die Auflösbarkeit von G aus (A), q. e. d.

Definition. *Die Gruppe G ist charakteristisch-auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G eine von 1 verschiedene,* ABELsche *charakteristische Untergruppe besitzt.*

Es ist klar, daß charakteristisch-auflösbare Gruppen auch auflösbar sind, daß aus $G^{(k)}=1$ auf die charakteristische Auflösbarkeit von G geschlossen werden kann, während man aus der charakteristischen Auflösbarkeit von G nicht auf die Existenz einer $G^{(k)}=1$ erfüllenden Zahl k schließen kann.

Die eventuelle Wichtigkeit dieses Begriffs ergibt sich aus folgenden leicht verifizierbaren Bemerkungen: Ist G/N auflösbar und N charakteristisch-auflösbar, so ist G auflösbar; und Produkte charakteristisch-auflösbarer Normalteiler sind auflösbar.

Wichtiger für uns ist die folgende Abschwächung des Auflösbarkeitsbegriffs.

Definition. *Die Gruppe G ist nachauflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G eine von 1 verschiedene,* ABELsche, *nachinvariante Untergruppe besitzt.*

Es ist klar, daß auflösbare Gruppen auch nachauflösbar sind, und daß homomorphe Bilder nachauflösbarer Gruppen ebenfalls nachauflösbar sind. Die Wichtigkeit des Begriffs der Nachauflösbarkeit für unsere Zwecke beruht auf der [trivialen] Bemerkung, daß Nilgruppen stets nachauflösbar sind.

Aus der Transitivität der Nachinvarianz folgert man ohne große Mühe, daß Erweiterungen nachauflösbarer Gruppen durch nachauflösbare Gruppen wieder nachauflösbar sind; und ebenso sieht man leicht, daß Produkte nachauflösbarer Normalteiler nachauflösbar sind. Etwas tiefer liegt die folgende Tatsache:

Untergruppen nachauflösbarer Gruppen sind nachauflösbar.

Beweis. Sei nämlich N ein Normalteiler der Untergruppe S der nachauflösbaren Gruppe G und $N \neq S$. Dann existiert ein maximaler, $M \cap S \leq N$ erfüllender Normalteiler M von G; und wir folgern $M<G$ aus $N<S$. Die Gesamtheit $R(G/M)$ der nachinvariante [zyklische] Untergruppen von G/M erzeugenden Elemente in G/M ist eine charakteristische Untergruppe von G/M [§ 3, Satz 2]; und aus $G/M \neq 1$ und der Nachauflösbarkeit von G folgt $R(G/M) \neq 1$. Ist Q die eindeutig bestimmte, $Q/M = R(G/M)$ erfüllende Untergruppe von G, so ist Q ein Normalteiler von G und $M<Q$. Aus der Maximalität von M folgt also $Q \cap S \not\leq N$ oder $N<N(Q \cap S)$. Mithin ist $N(Q \cap S)/N$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von S/N. Weiter ist

$$N(Q \cap S)/N \simeq (Q \cap S)/(N \cap Q \cap S) = (Q \cap S)/(Q \cap N)$$
$$\simeq [(Q \cap S)/(M \cap S)]/[(Q \cap N)/(M \cap S)],$$

da ja $M \cap S$ ein in N enthaltener Normalteiler von S und $M<Q$ ist; und

$$(Q \cap S)/(M \cap S) = (Q \cap S)/(M \cap Q \cap S) \simeq M(Q \cap S)/M \leq Q/M = R(G/M).$$

Da aber $R(G/M)$ eine Nilgruppe ist [§ 3, Satz 2], so ist auch das homomorphe Bild $N(Q \cap S)/N$ der Untergruppe $M(Q \cap S)/M$ von $R(G/M)$ eine Nilgruppe,

so daß jedes Element aus dem Normalteiler $N(Q \cap S)/N$ von S/N eine nachinvariante Untergruppe von S/N erzeugt. Da aber $N(Q \cap S)/N \neq 1$ ist, so ist damit die Existenz von von 1 verschiedenen, zyklischen, nachinvarianten Untergruppen von S/N dargetan, so daß also S nachauflösbar ist, q. e. d.

Lemma 1. *Jede von 1 verschiedene,* ABELsche, *nachinvariante Untergruppe von minimalem Defekt in der Gruppe G ist ein Normalteiler von G, wenn jede nachinvariante Untergruppe $U \neq 1$ von G, die ein Produkt* ABELscher *Normalteiler von U ist, eine von 1 verschiedene,* ABELsche, *charakteristische Untergruppe [von U] besitzt.*

Bemerkung 1. Ob von 1 verschiedene Produkte ABELscher Normalteiler stets von 1 verschiedene, ABELsche, charakteristische Untergruppen besitzen, scheint eine offene Frage zu sein. Wir geben zwei für unsere Anwendungen wichtige hinreichende Bedingungen an:

A. Ist $U \neq 1$ ein Produkt endlich vieler ABELscher Normalteiler, so ist U von endlicher Klasse [§ 1, Lemma 4] und also $Z(U) \neq 1$.

B. Enthält das Produkt U ABELscher Normalteiler einen minimalen ABELschen Normalteiler M, so ist M in jedem maximalen ABELschen Normalteiler von U enthalten. Da aber U auch das Produkt seiner maximalen ABELschen Normalteiler ist, so ist $1 < M \leq Z(U)$.

Beweis. Es sei A eine von 1 verschiedene, ABELsche, nachinvariante Untergruppe von G, deren Defekt d minimal ist. Wäre nun A kein Normalteiler von G, so wäre $1 < d$; und wir folgerten aus § 1, Satz 1, daß $A = N_d(A; G)$ ist, und daß $N_{d-1}(A; G)$ nach § 1, Lemma 2 das Produkt der zu A in $N_{d-2}(A; G)$ konjugierten ABELschen Normalteiler von $N_{d-1}(A; G)$ ist. Aus $A \neq 1$ und unserer Voraussetzung folgern wir weiter die Existenz einer von 1 verschiedenen, ABELschen, charakteristischen Untergruppe C von $N_{d-1}(A; G)$, da ja die $N_i(A; G)$ nachinvariante Untergruppen sind. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers N_{d-1} von N_{d-2} ist C ein Normalteiler von $N_{d-2}(A; G)$; und nun folgt aus § 1, Lemma 1, daß der Defekt der nachinvarianten Untergruppe C von G höchstens $d-1$ ist. Da aber $C \neq 1$ abelsch ist, so widerspricht dies der Minimalität von d. Folglich ist A ein Normalteiler von G, q. e. d.

Satz 2. *Die Begriffe nachauflösbar, auflösbar und charakteristisch-auflösbar decken sich für Gruppen G mit der folgenden Eigenschaft:*

(+) *Ist die nachinvariante Untergruppe $U \neq 1$ eines homomorphen Bildes von G ein Produkt* ABELscher *Normalteiler [von U], so existiert eine von 1 verschiedene,* ABELsche, *charakteristische Untergruppe von U.*

Beweis. Ist zunächst G eine (+) erfüllende nachauflösbare Gruppe und $H \neq 1$ ein homomorphes Bild von G, so existieren von 1 verschiedene, ABELsche [sogar zyklische] nachinvariante Untergruppen von H und unter diesen ABELschen nachinvarianten Untergruppen $\neq 1$ gibt es eine A von minimalem Defekt. Anwendung von (+) und Lemma 1 zeigt, daß A ein Normalteiler von H ist. Also ist G auflösbar.

Sei zweitens G eine (+) erfüllende auflösbare Gruppe und $H \neq 1$ ein homomorphes Bild von G. Das Produkt P aller ABELschen Normalteiler von H ist

eine charakteristische Untergruppe von H und $P \neq 1$ folgt aus der Auflösbarkeit von G. Aus (+) erschließen wir weiter die Existenz einer von 1 verschiedenen, ABELschen, charakteristischen Untergruppe C von P. Als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe ist C eine charakteristische Untergruppe von H; und damit ist gezeigt, daß G charakteristisch auflösbar ist.

Schließlich ist jede charakteristisch-auflösbare Gruppe auch nachauflösbar, womit die Äquivalenz unserer drei Begriffe für (+) erfüllende Gruppen dargetan ist.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist* NOETHERsch *und $G^{(n)} = 1$ für geeignetes n.*

(2) *Die Maximalbedingung wird von den* ABELschen *Untergruppen von G erfüllt und G ist nachauflösbar.*

(3) *Ist N eine nachinvariante Untergruppe eines homomorphen Bildes von G, so wird die Maximalbedingung von den Normalteilern von N erfüllt; und G ist nachauflösbar.*

(4) *Jedes $G^{(i)}$ ist endlich erzeugbar und G ist nachauflösbar.*

Bemerkung 2. Das Hinreichen der Bedingung (2) ist eine Verschärfung eines schönen Satzes von MALCEW [1], von dem wir auch beim Beweise Gebrauch machen werden; s. unten.

Beweis. Es ist klar, daß jede der Bedingungen (2), (3), (4) eine Folge von (1) ist. — Beim Beweise, daß (1) aus (2) folgt, werden wir den folgenden MALCEWschen Satz wiederholt anwenden:

MALCEWscher Satz. *Ist G eine auflösbare Gruppe, von deren* ABELschen *Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird, so ist G* NOETHERsch *und $G^{(n)} = 1$ für geeignetes n.*

Einen Beweis dieses MALCEWschen Satzes in der hier angegebenen Form findet man etwa bei BAER [5]; dort auch weitere Literaturangaben.

Ist nun G eine (2) erfüllende Gruppe, so bilden wir zunächst das Produkt P aller auflösbaren Normalteiler von G. Ist weiter A irgendeine auflösbare Untergruppe von G, so wird [nach Voraussetzung (2)] die Maximalbedingung von den ABELschen Untergruppen von A erfüllt; und aus dem MALCEWschen Satz ergibt sich die folgende Verschärfung der Bedingung (2).

(2.a) Ist A eine auflösbare Untergruppe von G, so ist A NOETHERsch und es gibt eine ganze Zahl $n = n(A)$ derart, daß $A^{(n)} = 1$ ist.

Ist N ein von P verschiedener Normalteiler von P, so ergibt sich aus der Definition von P die Existenz eines nicht in N enthaltenen, auflösbaren Normalteilers X von G. Natürlich ist dann $N < NX \leq P$; und aus (2.a) erschließen wir die Existenz einer $X^{(i)} = 1$ erfüllenden ganzen Zahl i. Da $X = X^{(0)}$ nicht in N enthalten ist, während $1 = X^{(i)}$ in N liegt, so gibt es eine positive Zahl j derart, daß

$$X^{(j)} \leq N < NX^{(j-1)} \leq P$$

gilt; und aus den Isomorphiesätzen folgern wir

$$NX^{(j-1)}/N \simeq X^{(j-1)}/(X^{(j-1)} \cap N) \simeq [X^{(j-1)}/X^{(j)}]/[(X^{(j-1)} \cap N)/X^{(j)}].$$

Da die $X^{(k)}$ als charakteristische Untergruppen des Normalteilers X von G selbst Normalteiler von G sind, so ist $NX^{(j-1)}/N$ ein von 1 verschiedener, ABELscher Normalteiler von P/N. Damit haben wir gezeigt:

(2.b) P ist auflösbar.

Wir wenden (2.a) auf (2.b) an und finden:

(2.c) P ist NOETHERsch und $P^{(n)}=1$ für geeignetes n.

Ist A/P eine ABELsche Untergruppe von G/P, so ist $A' \leq P$ und $A^{(n+1)}=1$ wegen (2.c). Also ist A auflösbar und wegen (2.a) NOETHERsch. Daraus folgt:

(2.d) Jede ABELsche Untergruppe von G/P ist endlich erzeugbar.

Um Lemma 1 anwenden zu können, beweisen wir:

(2.e) Ist die Untergruppe $U \neq 1$ von G/P ein Produkt ABELscher Normalteiler [von U], so existiert eine von 1 verschiedene, ABELsche, charakteristische Untergruppe von U.

Um dies einzusehen, verifiziert man zunächst, daß U auflösbar ist. Wegen (2.d) können wir dann den MALCEWschen Satz auf U anwenden. Also gibt es eine ganze Zahl i derart, daß $U^{(i)}=1$ ist. Wir wählen i minimal; und bemerken, daß i positiv ist, da $1 \neq U = U^{(0)}$ ist. Dann ist aber $U^{(i-1)}$ die gesuchte von 1 verschiedene, ABELsche, charakteristische Untergruppe von U.

Bisher haben wir noch keinen Gebrauch von der Nachauflösbarkeit von G gemacht. Wäre etwa $P<G$, so folgte aus der Nachauflösbarkeit von G die Existenz von 1 verschiedener, ABELscher [sogar zyklischer] nachinvarianter Untergruppen von $G/P \neq 1$; und unter diesen gibt es eine J von minimalem Defekt. Aus (2.e) und Lemma 1 folgt, daß J ein Normalteiler von G/P ist. Dann gibt es einen $J=W/P$ erfüllenden Normalteiler W von G; und dieser genügt den Ungleichungen

$$W' \leq P < W \leq G.$$

Aus (2.c) folgt weiter $W^{(n+1)}=1$, so daß W ein auflösbarer Normalteiler von G ist. Also wird $P<W \leq P$, ein Widerspruch aus dem wir $P=G$ erschließen. Wegen (2.c) besagt dies, daß G der Bedingung (1) genügt.

Als nächstes nehmen wir an, daß G der Bedingung (3) genügt. Wären alle $G^{(i)} \neq 1$, so wäre die Menge Σ der kein $G^{(i)}$ enthaltenden Normalteiler von G nicht leer — 1 wäre ja sicher in Σ enthalten. Aus (3) folgt insbesondere, daß die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird; und folglich gibt es einen maximalen Normalteiler M in Σ. Es ist klar, daß $M<G$ ist; und aus der Nachauflösbarkeit von G folgern wir die Existenz einer von 1 verschiedenen, ABELschen, nachinvarianten Untergruppe N/M von minimalem Defekt in G/M. Aus (3) und Bemerkung 1, A erschließen wir die Anwendbarkeit von Lemma 1, so daß N/M ein Normalteiler von G/M ist. Also ist N ein

$$N' \leq M < N \leq G$$

erfüllender Normalteiler von G. Aus der Maximalität von M ergibt sich die Existenz einer $G^{(k)} \leq N$ erfüllenden ganzen Zahl k. Dann ist aber

$$G^{(k+1)} \leq N' \leq M;$$

und dies widerspricht der Tatsache, daß M als Normalteiler in Σ keine der Ableitungen von G enthalten kann. Aus diesem Widerspruch folgt die Existenz einer $G^{(n)} = 1$ erfüllenden ganzen Zahl n.

Aus (3) ergibt sich, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen der ABELschen charakteristischen Untergruppe $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ von $G/G^{(i)}$ erfüllt wird; und nun sieht man sofort, daß G NOETHERsch und (1) eine Folge von (3) ist.

Schließlich wollen wir annehmen, daß Bedingung (4) von G erfüllt wird. Wäre keine der Ableitungen $G^{(i)} = 1$, so bilden wir wieder die dann nicht leere Menge Σ aller keine Ableitung $G^{(i)}$ enthaltenden Normalteiler von G. Es sei nun Θ eine nicht leere Teilmenge von Σ derart, daß $X \leq Y$ oder $Y \leq X$ für jedes Paar X, Y in Θ gilt. Die Vereinigungsmenge J der Normalteiler in Θ ist dann sicher auch ein Normalteiler von G. Wäre J nicht in Σ enthalten, so gäbe es eine $G^{(j)} \leq J$ erfüllende ganze Zahl j. Wegen (4) ist $G^{(j)}$ endlich erzeugbar. Ist etwa $e_1, \ldots, e_k$ ein endliches Erzeugendensystem von $G^{(j)}$, so liegt jedes e_i in J und es gibt also ein E_i in Θ, das e_i enthält. Dann sind aber alle E_i in einem von ihnen enthalten, das wir E nennen wollen; und es ergibt sich, daß $G^{(j)}$ in E enthalten ist, was unmöglich ist, da E in Σ liegt. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß J zu Σ gehört, und daß also das Maximumprinzip der Mengenlehre auf Σ angewandt werden kann. Folglich gibt es einen maximalen Normalteiler M in Σ.

Natürlich ist $M < G$; und wir folgern aus der Nachauflösbarkeit von G, daß die Menge $R(G/M)$ aller zyklische nachinvariante Untergruppen von G/M erzeugenden Elemente nicht nur aus 1 besteht. Wegen § 3, Satz 2 ist $R(G/M)$ nicht nur eine Teilmenge, sondern sogar eine charakteristische Untergruppe von G/M. Es gibt also einen $M < N$ und $N/M = R(G/M)$ erfüllenden Normalteiler N von G. Aus der Maximalität von M erschließen wir die Existenz einer $G^{(i)} \leq N$ erfüllenden ganzen Zahl i. Nach Voraussetzung (4) ist $G^{(i)}$ und also auch $MG^{(i)}/M = S$ endlich erzeugbar. Als Untergruppe der Nilgruppe $R(G/M)$ ist S eine endlich erzeugbare Nilgruppe; und es folgt aus § 3, Lemma 2, daß S von endlicher Klasse ist. Dann existiert insbesondere eine $S^{(j)} = 1$ erfüllende ganze Zahl j; und daraus erschließen wir $G^{(i+j)} \leq M$, ein Widerspruch. Es gibt also eine $G^{(n)} = 1$ erfüllende ganze Zahl n. Da nach Voraussetzung (4) jede der ABELschen Gruppen $G^{(i+1)}/G^{(i)}$ endlich erzeugbar und also noethersch ist, so ist G selbst NOETHERsch; und wir haben (1) aus (4) hergeleitet, q. e. d.

Bemerkung 3. Es gibt bekanntlich Gruppen G, die von zwei Elementen erzeugt werden, $G'' = 1$ erfüllen, und deren Kommutatorgruppe G' nicht endlich erzeugbar ist. Also ist es unmöglich, (4) wesentlich abzuschwächen.

Lemma 2. *Wenn G auflösbar ist und die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird, dann ist G endlich erzeugbar und $G^{(n)} = 1$ für geeignetes n.*

Beweis. Wäre $G^{(n)} \neq 1$ für jedes n, so gäbe es einen maximalen Normalteiler M, der keines der $G^{(n)}$ enthielte. Da dann sicher $G/M \neq 1$ ist, so folgt aus der Auflösbarkeit von G die Existenz eines $N' \leq M < N$ erfüllenden Normalteilers N von G. Aus der Maximalität von M erschließen wir die Existenz einer $G^{(j)} \leq N$ erfüllenden ganzen Zahl j. Dann wird aber $G^{(j+1)} \leq N' \leq M$ im Widerspruch zu unserer Wahl von M. Also existiert eine $G^{(n)} = 1$ erfüllende ganze Zahl n. Wäre G nicht endlich erzeugbar, so gäbe es einen maximalen Normalteiler W mit nicht endlich erzeugbarer Faktorgruppe G/W. Da sicher $H = G/W \neq 1$ ist, so folgt aus der Auflösbarkeit von G die Existenz eines von 1 verschiedenen ABELschen Normalteilers A von H. Ist $b \neq 1$ ein Element in A, so ist der kleinste b enthaltende Normalteiler $N_1(b; H)$ von H in A enthalten und also abelsch. Aus $N_1(b; H) \neq 1$ und der Maximalität von W folgt die endliche Erzeugbarkeit von $H/N_1(b; H)$. Daraus entnehmen wir die Existenz einer endlich erzeugbaren, $H = N_1(b; H)\,E$ erfüllenden Untergruppe E von H. Aus der Kommutativität des Normalteilers $N_1(b; H)$ von H ergibt sich, daß jeder von einem inneren Automorphismus von H in $N_1(b; H)$ induzierte Automorphismus bereits von einem Element in E induziert wird, so daß insbesondere die zu b konjugierten Elemente aus H die Form $e^{-1}be$ mit e in E haben. Dann ist insbesondere $N_1(b; H) \leq \{E, b\}$, so daß $H = \{E, b\}$ endlich erzeugbar ist. Dies widerspricht unserer Wahl von W, woraus die endliche Erzeugbarkeit von G folgt, q. e. d.

Lemma 3. *G ist [dann und nur dann] eine nachauflösbare Torsionsgruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G eine von 1 verschiedene, endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppe besitzt.*

Beweis. Es genügt offenbar nachzuweisen, daß G eine Torsionsgruppe ist, wenn G die in Lemma 3 angegebene Bedingung erfüllt. Unter den Normalteilern von G, die Torsionsgruppen sind, gibt es natürlich einen maximalen M. Die Gesamtheit R der Elemente in G/M, die nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugen ist eine charakteristische Untergruppe von G [§ 3, Satz 2]. Da R eine Nilgruppe ist, so bilden die Elemente endlicher Ordnung in R eine charakteristische Untergruppe von R und G/M [§ 3, Zusatz 3]. Dann existiert ein M enthaltender Normalteiler T von G derart, daß T/M die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung aus R ist. Da M und T/M Torsionsgruppen sind, ist auch T eine Torsionsgruppe. Aus der Maximalität von M folgt also $T = M$. Folglich enthält G/M keine Elemente endlicher Ordnung, die nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugen; und aus unserer Voraussetzung folgt $G/M = 1$, so daß $G = M$ eine Torsionsgruppe ist, q. e. d.

5. NOETHERsche Gruppen endlicher Klasse.

Auf Grund der bisherigen Untersuchungen können wir jetzt eine Reihe interessanter Charakterisierungen dieser Gruppenklasse gewinnen.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist eine* NOETHERsche *Gruppe endlicher Klasse.*

(2) *G ist eine Nilgruppe; ist N eine nachinvariante Untergruppe eines homomorphen Bildes von G, so wird die Maximalbedingung von den Normalteilern von N erfüllt.*

(3) *G ist eine nilpotente und auflösbare Gruppe, von deren Normalteilern die Maximalbedingung erfüllt wird.*

(4) *G ist eine nilpotente, auflösbare und endlich erzeugbare Gruppe.*

(5) *G ist eine obernilpotente und endlich erzeugbare Gruppe.*

(6) *G ist eine* ENGELsche, *nachauflösbare und endlich erzeugbare Gruppe.*

(7) *G ist eine nilpotente und nachauflösbare Gruppe, deren Ableitungen* $G^{(i)}$ *sämtlich endlich erzeugbar sind.*

(8) *G ist eine Nilgruppe, von deren* ABELschen *Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird.*

(9) *G ist eine nilpotente und nachauflösbare Gruppe, von deren* ABELschen *Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird.*

(10) *G ist eine endlich erzeugbare Nilgruppe.*

Bemerkung 1. Die Äquivalenz der Bedingungen (1), (5) und (10) ist schon in früheren Resultaten [§ 3, Lemma 1, 2] enthalten und hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Bemerkung 2. Wegen § 3, Zusatz 1 kann das Wort „Nilgruppe" überall durch „von zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugbare Gruppe" ersetzt werden.

Bemerkung 3. Wegen § 4, Satz 2 kann man Auflösbarkeit überall durch Nachauflösbarkeit zusammen mit einer Zusatzbedingung ersetzen.

Bemerkung 4. GRUENBERG [*1*] und PLOTKIN [*1*] haben gezeigt, daß ENGELsche endlich erzeugbare Gruppen sicher dann NOETHERsche Gruppen endlicher Klasse sind, wenn sie eine [möglicherweise transfinite] aufsteigende Normalkette mit ABELschen Faktoren besitzen. Diese Voraussetzung ist schwächer als Auflösbarkeit und ihre Beziehung zur Nachauflösbarkeit noch ungeklärt. — Daß unser Resultat etwa BAER [*4*, § 2, Satz 2] verschärft, sei erwähnt.

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt [§ 1; Satz 2]. Wird Bedingung (2) von G erfüllt, so ist G nachauflösbar und wegen § 4, Satz 3, (3) ist G auflösbar. G ist nilpotent wegen § 1, Satz 3, 4; und nun ist es klar, daß (3) aus (2) folgt. Wegen § 4, Lemma 2 folgt (4) aus (3).

Angenommen die Gruppe G erfüllte (4), aber nicht (1). Dann ergäbe sich aus § 3, Lemma 1, daß G nicht von endlicher Klasse ist; und wegen § 2, Lemma 4 existiert dann ein homomorphes Bild H von G, das nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von H von endlicher Klasse ist. Aus der Auflösbarkeit von H folgt die Existenz eines ABELschen Normalteilers $A \neq 1$ von H. Dann ist H/A von endlicher Klasse als echtes homomorphes Bild von H. Da H endlich erzeugbar und nilpotent und eine Erweiterung des ABELschen Normalteilers A durch die Gruppe H/A endlicher Klasse ist, so ist H obernilpotent; s. BAER [*4*; § 2, Satz 1]. Also ist $Z(H) \neq 1$ und $H/Z(H)$ ist als echtes homomorphes Bild von H von endlicher Klasse.

Mithin existiert eine $i[H/Z(H)]=1$ erfüllende ganze Zahl i, so daß ${}^iH \leq Z(H)$ und ${}^{i+1}H=1$ wird. Das ist ein Widerspruch, aus dem sich ergibt, daß (1) eine Folge von (4) ist und also (1) bis (4) äquivalente Bedingungen sind.

Es ist klar, daß (5) aus (1) und (6) aus (5) folgt [§ 1, (0)]. Ist G eine endlich erzeugbare ENGELsche Gruppe, so ist G nilpotent [§ 1, Satz 4]; und die endliche Erzeugbarkeit aller Ableitungen $G^{(i)}$ folgt durch eine naheliegende Induktion aus § 2, Lemma 5. Also ist (7) eine Folge von (6). Aus (7) folgt die Auflösbarkeit von G wegen § 4, Satz 3, so daß (4) eine Folge von (7) ist; und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (7) dargetan.

Es ist klar, daß (8) eine Folge der äquivalenten Bedingungen (1) bis (7) ist, und daß (9) aus (8) folgt [§ 1, Satz 3, 4]. Aus (9) ergibt sich durch Anwendung von § 4, Satz 3, (2), daß G eine NOETHERsche auflösbare Gruppe ist. Also folgt (4) aus (9); und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (9) dargetan.

Wir haben schon auf die Äquivalenz von (10) und (1) [wegen § 3, Lemma 2] hingewiesen.

Für die folgenden Betrachtungen müssen wir an den Begriff der Hyperzentralität eines Normalteilers erinnern. Dieser Begriff kann durch eine Reihe äquivalenter Eigenschaften definiert werden; s. BAER [3; Definition 1 und Satz 3]. Die von uns hier gewählte Definition empfiehlt sich durch ihre Kürze.

Definition. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist ein hyperzentraler Normalteiler der Gruppe G, wenn $\{x, g\}$ für jedes x aus N und jedes g aus G nilpotent ist.*

Insbesondere sind also alle Normalteiler nilpotenter Gruppen hyperzentral. Da weiter das Zentrum stets hyperzentral ist, so folgt durch eine naheliegende Induktion aus BAER [3; Satz 1] die Hyperzentralität aller $Z_i(G)$.

Satz 2. *Der endlich erzeugbare Normalteiler N der Gruppe G ist dann und nur dann in einem $Z_i(G)$ enthalten, wenn N eine Nilgruppe und hyperzentral ist.*

Beweis. Daß $Z_i(G)$ hyperzentral ist, haben wir schon erwähnt; und also sind alle in $Z_i(G)$ enthaltenen Normalteiler von G hyperzentral. Untergruppen von $Z_i(G)$ sind von endlicher Klasse und also Nilgruppen [§ 1, Satz 2]. Damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingung dargetan.

Ist der endlich erzeugbare Normalteiler N von G eine Nilgruppe und hyperzentral, so ist N eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse [Satz 1]. Ist weiter M ein N nicht enthaltender Normalteiler von G, so ist $N^*=MN/M$ ein von 1 verschiedener, NOETHERscher, hyperzentraler Normalteiler endlicher Klasse von $G^*=G/M$. Insbesondere ist also $Z(N^*)\neq 1$. Als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers ist $Z(N^*)$ ein Normalteiler von G^*. Mit N^* ist auch $Z(N^*)$ hyperzentral in G^*. Schließlich ist $Z(N^*)$ eine endlich erzeugbare ABELsche Gruppe, da ja N^* noethersch ist. Daraus folgt aber $Z(N^*)\cap Z(G^*)\neq 1$, wie sich etwa aus BAER [3, Satz 4] in Verbindung mit BAER [2; § 1, Lemma 4] ergibt. Insbesondere ist also $N^*\cap Z(G^*)\neq 1$.

Wäre nun N nicht in der Vereinigung V aller $Z_i(G)$ enthalten [die ja ebenfalls eine charakteristische Untergruppe von G ist], so folgte

$$1 \neq (VN/V) \cap Z(G/V)$$

aus dem Resultat des vorigen Absatzes; und es existierte ein nicht in V enthaltenes Element w in N, dessen Restklasse Vw zu $Z(G/V)$ gehört, so daß insbesondere $[w, G] \leq V \cap N$ ist. Da N NOETHERsch ist, so ist $V \cap N$ eine endlich erzeugbare Untergruppe der Vereinigung V aller $Z_i(G)$; und daraus folgt die Existenz einer

$$[w, G] \leq V \cap N \leq Z_k(G)$$

erfüllenden Zahl k. Aus dieser Ungleichung ergibt sich aber, daß w zu $Z_{k+1}(G) \leq V$ gehört, ein Widerspruch. Folglich ist N in der Vereinigung V aller $Z_i(G)$ enthalten; und aus der endlichen Erzeugbarkeit von N erschließen wir die Existenz einer $N \leq Z_n(G)$ erfüllenden Zahl n, q. e. d.

Zusatz 1. *Wenn jedes Element aus der Gruppe G in einem endlich erzeugbaren Normalteiler von G enthalten ist, dann sind die folgenden Eigenschaften von G miteinander äquivalent:*

(1) *G ist die Vereinigung aller $Z_i(G)$.*

(2) *G ist obernilpotent.*

(3) *G ist eine Nilgruppe.*

Bemerkung 5. Man kann leicht Gruppen der Klasse 2 konstruieren, deren Elemente nicht sämtlich in endlich erzeugbaren Normalteilern enthalten sind.

Bemerkung 6. Es ist klar, daß die Gruppen G mit Eigenschaft (1) sämtlich obernilpotente Nilgruppen sind. Es ist eine offene Frage, wie die obernilpotenten Nilgruppen zu charakterisieren sind.

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt. Ist G obernilpotent, so liegt jedes Element aus G in einem endlich erzeugbaren Normalteiler von G, der obernilpotent und also nach Satz 1 eine Nilgruppe ist. Folglich ist G eine Nilgruppe und (3) eine Folge von (2). Daß schließlich (1) aus (3) folgt, ergibt sich sofort aus Satz 2, q. e. d.

6. Gruppen endlicher Klasse mit Minimalbedingung.

Die in diesem Abschnitt zu behandelnden Gruppen sind insbesondere obernilpotente Torsionsgruppen; und wir beginnen deshalb mit einer Charakterisierung dieser Gruppenklasse.

Satz 1. *G ist dann und nur dann eine obernilpotente Torsionsgruppe, wenn*

(a) *G nilpotent ist,*

(b) *G nachauflösbar ist und*

(c) *jedes unendliche homomorphe Bild von G einen minimalen Normalteiler besitzt, von dessen Normalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird.*

Bemerkung 1. Man sieht leicht ein, daß Nilgruppen die Eigenschaften (a) und (b) haben; jedoch ist nicht jede obernilpotente Torsionsgruppe eine Nilgruppe; s. § 1.

Beweis. Es ist ziemlich klar, daß die Bedingungen (a), (b), (c) notwendig sind. Wir nehmen also an, daß G die Eigenschaften (a), (b), (c) hat. Um die Obernilpotenz von G nachzuweisen, betrachten wir ein homomorphes Bild $H \neq 1$ von G. Ist H endlich, so ist H wegen (a) eine endliche nilpotente Gruppe und also $Z(H) \neq 1$. Ist aber H unendlich, so existiert wegen (c) ein minimaler Normalteiler M von H, von dessen Normalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird. Da M frei von eigentlichen charakteristischen Untergruppen ist, so ist M sicher das Produkt seiner minimalen Normalteiler. Folglich ist jeder minimale Normalteiler von M direkter Faktor von M; und M ist direktes Produkt einiger seiner minimalen Normalteiler. Aus der Minimalbedingung [für Normalteiler von M] folgt dann sogar, daß M direktes Produkt endlich vieler minimaler Normalteiler von M ist. Ist X irgendein minimaler Normalteiler von M, so ist X direkter Faktor von M; und jeder Normalteiler von X ist Normalteiler von M. Aus der Minimalität von X ergibt sich also die Einfachheit der Gruppe X. Da X ein homomorphes Bild einer Untergruppe von G ist, so folgt aus (b) die Nachauflösbarkeit von X, wenn wir uns nur daran erinnern, daß Untergruppen und homomorphe Bilder nach auflösbarer Gruppen ebenfalls nachauflösbar sind [§ 4]. Einfache nachauflösbare Gruppen sind sicher abelsch und also sogar zyklisch von Primzahlordnung. Da M direktes Produkt endlich vieler minimaler Normalteiler von M ist, von denen wir gerade gezeigt haben, daß sie zyklisch von Primzahlordnung sind, so ist M eine endliche ABELsche Gruppe. Endliche minimale Normalteiler nilpotenter Gruppen liegen aber im Zentrum; s. BAER [3; Lemma 2]. Folglich ist $1 < M \leq Z(H)$. Damit ist die Obernilpotenz von G voll bewiesen.

Die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in G bildet eine Torsionsuntergruppe T von G, da G obernilpotent ist; s. BAER [2; § 6, Theorem 1, 2]. Wäre $T \neq G$, so enthielte G/T einen minimalen Normalteiler M/T [wegen (c)]. Wegen der Obernilpotenz von G und der Minimalität von M/T ist $M/T \leq Z(G/T)$ und also M/T zyklisch von Primzahlordnung. Dann ist aber auch M eine Torsionsuntergruppe von G, so daß $M \leq T < M$ wird, ein Widerspruch. Folglich ist $G = T$ eine obernilpotente Torsionsgruppe.

Lemma 1. *Ist N ein Normalteiler endlicher Klasse und $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe der Gruppe G, so ist $\{N, g\}$ von endlicher Klasse.*

Bemerkung 2. Es genügt nicht anzunehmen, daß g die ENGELsche Eigenschaft hat [oder $\{N, g\}$ engelsch ist] wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei N ein direktes Produkt von abzählbar vielen isomorphen zyklischen Gruppen und $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ eine Basis von N. Die Gruppe G entstehe aus N durch Adjunktion eines Elements g, das den folgenden Bedingungen genügt:

$$g^{-1} a_1 g = a_1, \qquad g^{-1} a_i g = a_i a_{i-1} \quad \text{für} \quad 1 < i.$$

Man überzeugt sich sofort, daß N ein ABELscher Normalteiler von G ist, und daß jede der Untergruppen $\{a_1, \ldots, a_i, g\}$ von endlicher Klasse ist. Also ist G als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Untergruppen endlicher Klasse selbst eine ENGELsche Gruppe. Aber G kann nicht von endlicher

Klasse sein, da die Klassen der Untergruppen $\{a_1, \ldots, a_i, g\}$ mit i gegen unendlich streben.

Beweis. Wir werden durch vollständige Induktion zeigen, daß jede der Faktorgruppen $\{N, g\}/{}^iN$ von endlicher Klasse ist. Dies ist für $i=0$ trivialerweise richtig, da ja $\{N, g\}/N$ zyklisch ist. Wir nehmen also an, daß $\{N, g\}/{}^iN$ von endlicher Klasse ist. Um daraus herzuleiten, daß auch $\{N, g\}/{}^{i+1}N$ von endlicher Klasse ist, setzen wir $H=\{N, g\}/{}^{i+1}N$ und $K={}^iN/{}^{i+1}N$. Dann ist $K \leq Z(N/{}^{i+1}N)$, so daß K ein ABELscher Normalteiler von H ist; und $H/K \simeq \{N, g\}/{}^iN$ ist von endlicher Klasse. Da g eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt, so erzeugt $h={}^{i+1}Ng$ eine nachinvariante Untergruppe von H; und in dem ABELschen Normalteiler K von H induziert h einen Automorphismus σ. Das Element h erzeugt auch eine nachinvariante Untergruppe von $\{K, h\}$; und aus der Kommutativität des Normalteilers K von $U=\{K, h\}$ folgert man, daß $K_i(h; U)=K^{(\sigma-1)^i}$ ist. Aus § 1, Folgerung 2 ergibt sich dann die Existenz einer ganzen Zahl n derart, daß $K^{(\sigma-1)^n}=1$ ist. Da H/K von endlicher Klasse ist, so gibt es eine ganze Zahl k derart, daß ${}^k(H/K)=1$ ist. Also wird ${}^kH \leq K \leq Z(N/{}^{i+1}N)$. Da aber $H=\{N/{}^{i+1}N, h\}$ ist, und da der von h in K induzierte Automorphismus σ der Gleichung $(\sigma-1)^n=0$ genügt, so folgt ${}^{n+k}H=1$, so daß also auch $\{N, g\}/{}^{i+1}N$ von endlicher Klasse ist. Damit ist unser induktiver Beweis beendet. Da N von endlicher Klasse ist, so existiert eine Zahl c derart, daß ${}^cN=1$ und $\{N, g\}=\{N, g\}/{}^cN$ von endlicher Klasse ist, q. e. d.

Lemma 2. *Wenn N ein Normalteiler endlicher Klasse mit endlich erzeugbarer Faktorgruppe G/N der Nilgruppe G ist, dann ist G von endlicher Klasse.*

Beweis. Da G/N nach Voraussetzung eine endlich erzeugbare Nilgruppe ist, so ist G/N nach § 5, Satz 1 [oder § 3, Lemma 2] eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse. Es gibt also [endlich viele] Normalteiler N_i von G derart, daß $N=N_0$, $N_i<N_{i+1}$, N_{i+1}/N_i zyklisch und $N_k=G$ ist. Weiter existieren Elemente g_i in G derart, daß $N_{i+1}=\{N_i, g_i\}$ ist. Da G eine Nilgruppe ist, so erzeugt jedes g_i eine nachinvariante Untergruppe von G. Durch eine naheliegende Induktion folgt nun aus Lemma 1, daß jedes N_i und also auch G von endlicher Klasse ist.

Lemma 3. *Besitzt die Gruppe G einen* ABELschen *Normalteiler von endlichem Index, von dessen Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, dann ist $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ für jedes positive i endlich.*

Bemerkung 3. Unsere Behauptung wird falsch für $i=0$, da es unendliche ABELsche Gruppen gibt, von deren Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird.

Beweis. Wegen $0<i$ können wir $H=G/Z_{i-1}(G)$ bilden. Dann ist $Z(H)=Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ und $Z_2(H)=Z_{i+1}(G)/Z_{i-1}(G)$, so daß

$$Z_2(H)/Z(H) \simeq Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$$

wird. Es genügt also, die Endlichkeit von $Z_2(H)/Z(H)$ zu erweisen.

Da G einen ABELschen Normalteiler von endlichem Index besitzt, von dessen Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, so wird die Minimalbedingung von den Untergruppen von G und also auch von H erfüllt. Weiter besitzt H einen ABELschen Normalteiler A von endlichem Index $[H:A]$. Dann ist auch $N=Z(H)A$ ein ABELscher Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe H/N; und $M=N\cap Z_2(H)$ ist ein $Z(H)$ enthaltender Normalteiler von H. Aus

$$Z_2(H)/M \simeq NZ_2(H)/N \leq H/N$$

folgt die Endlichkeit von $Z_2(H)/M$; und es genügt also, die Endlichkeit von $M/Z(H)$ zu beweisen.

Ist s ein Element in H, so induziert s in dem ABELschen Normalteiler M von H einen Automorphismus σ. Da M in dem ABELschen Normalteiler N von H enthalten ist, und da $[H:N]=n$ endlich ist so, liegt s^n in N und $\sigma^n=1$. Aus $M\leq Z_2(H)$ folgt $M^{\sigma-1}\leq Z(H)$, so daß σ jedes Element aus $M^{\sigma-1}$ invariant läßt. Ist also x irgendein Element aus M, so wird

$$1=x^{\sigma^n-1}=x^{(\sigma-1)(\sigma^{n-1}+\cdots+1)}=x^{(\sigma-1)n};$$

und damit ist $[M^{\sigma-1}]^n=1$ gezeigt. Da die Minimalbedingung von den Untergruppen der ABELschen Gruppe M erfüllt wird, so enthält M nur endlich viele Lösungen der Gleichung $y^n=1$; und damit ist insbesondere die Endlichkeit von $M^{\sigma-1}$ gezeigt. Da $\sigma-1$ ein Endomorphismus der ABELschen Gruppe M ist, so hat der Kern dieses Endomorphismus endlichen Index in M. Der Kern von $\sigma-1$ besteht aber genau aus der Gesamtheit der Elemente aus M, die mit s vertauschbar sind. Bezeichnen wir nun mit $M(s)$ diesen Durchschnitt von M mit dem Zentralisator von s, so haben wir also die Endlichkeit des Index $[M:M(s)]$ dargetan.

Sei schließlich R irgendein [endliches] Repräsentantensystem der endlichen Faktorgruppe H/N. Da M eine $Z(H)$ enthaltende Untergruppe der ABELschen Gruppe N ist, so gehört ein Element aus M dann und nur dann zu $Z(H)$, wenn es mit jedem Element aus R vertauschbar ist. Also wird

$$Z(H)=\bigcap_{r \text{ in } R} M(r).$$

Aus der Endlichkeit von R und der Endlichkeit aller Indizes $[M:M(r)]$ folgt nach dem POINCARÉschen Satz nun auch die Endlichkeit von $[M:Z(H)]$; und damit ist, wie früher bemerkt, unser Lemma vollständig bewiesen.

Satz 2. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *$G/Z(G)$ ist eine endliche nilpotente Gruppe; und die Minimalbedingung wird von den Untergruppen von $Z(G)$ erfüllt.*

(2) *G ist eine Gruppe endlicher Klasse, von deren Normalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird.*

(3) *G ist eine Nilgruppe, von deren nachinvarianten Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird.*

(4) { (a) *G ist eine nilpotente, nachauflösbare Gruppe.*
(b) *Jede endliche Faktorgruppe von G besitzt ein Repräsentantensystem, dessen Elemente nachinvariante* [*zyklische*] *Untergruppen erzeugen.*
(c) *Die Minimalbedingung wird von den nachinvarianten Untergruppen von G erfüllt.*

(5) *G ist eine Nilgruppe, von deren* ABELschen *Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird.*

Bemerkung 4. Sowohl aus Bedingung (1) wie aus Bedingung (2) ergibt sich mühelos, daß die Minimalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt wird.

Beweis. Daß (2) aus (1), (3) aus (2) und (4) aus (3) folgt, sieht man ohne große Mühe ein.

Ist G eine der Bedingung (4) genügende Gruppe, so folgt aus Satz 1, daß G eine obernilpotente Torsionsgruppe ist. Wir bilden den Durchschnitt D aller Untergruppen von endlichem Index in G. Da jede Untergruppe von endlichem Index in G einen Normalteiler von endlichem Index in G enthält — wie etwa aus dem POINCARÉschen Satz folgt —, so ist D der Durchschnitt aller Normalteiler X mit endlicher Faktorgruppe G/X. Da aber die Minimalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird, so ist D sogar der Durchschnitt endlich vieler Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe; und daraus folgt die Endlichkeit von G/D.

Wäre D nicht abelsch, so wäre $Z(D) < D$. Als Untergruppe einer obernilpotenten Torsionsgruppe ist D eine obernilpotente Torsionsgruppe, so daß insbesondere $Z_2(D)/Z(D)$ ein Element $Z(D)g$ von Primzahlordnung p enthält. Man bestätigt durch eine einfache [und wohlbekannte] Rechnung, daß $[g, x]^p = 1$ für jedes x aus D gilt, und daß die Abbildung von x auf $[g, x]$ ein Homomorphismus von D nach $Z(D)$ ist. Der Kern dieses Homomorphismus ist der Zentralisator C von g in D. Folglich ist C ein Normalteiler von D und D/C eine ABELsche Gruppe, deren von 1 verschiedene Elemente die Primzahlordnung p haben. Wäre $D/C \neq 1$, so besäße diese ABELsche Gruppe Untergruppen vom Index p, so daß D selbst Untergruppen vom Index p besäße. Diese wären dann echte Untergruppen von D, deren Index in G endlich wäre, was der Definition von D widerspräche. Folglich ist $D/C = 1$ oder $D = C$, so daß g dem Zentrum von D angehörte und also das Element $Z(D)g$ der Ordnung p gleich 1 wäre. Aus diesem Widerspruch folgt die Kommutativität von D.

Aus der Endlichkeit von G/D und (4.b) folgt die Existenz eines Repräsentantensystems R von G modulo D, dessen Elemente nachinvariante [zyklische] Untergruppen von G erzeugen. Da D ein ABELscher Normalteiler von G ist, so erzeugt jedes Element in D eine nachinvariante Untergruppe von G. Also wird G von seinen nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt; und es folgt aus § 3, Zusatz 1, daß G eine Nilgruppe ist. Da also D ein ABELscher Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe G/D und G eine Nilgruppe ist, so folgt aus Lemma 2, daß G von endlicher Klasse ist.

Aus der Minimalbedingung für nachinvariante Untergruppen ergibt sich die Minimalbedingung für die Untergruppen des ABELschen Normalteilers D; und aus der Endlichkeit von G/D folgt die Gültigkeit der Minimalbedingung für die Untergruppen von G. Aus Lemma 3 folgt dann die Endlichkeit aller $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ mit $0<i$. Da G von endlicher Klasse ist, so ist bekanntlich $G=Z_c(G)$ für ein gewisses positives c. Folglich ist $G/Z(G)$ endlich; und damit ist die Äquivalenz der ersten vier Bedingungen bewiesen.

Es ist klar, daß (5) aus den äquivalenten Bedingungen (1) bis (4) folgt. Ist G eine Nilgruppe, von deren ABELschen Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, so ist G insbesondere eine Torsionsgruppe. Ist g irgendein Element in G, so ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G und es gibt eine $\{g\}=N_n(g;G)$ erfüllende ganze Zahl n [§ 1, Satz 1]. Wir wollen die Endlichkeit aller $N_i(g;G)$ mit $0<i\leq n$ beweisen. Da G eine Torsionsgruppe ist, so ist $\{g\}=N_n(g;G)$ sicher endlich. Sei also $1<i\leq n$ und die Endlichkeit von $N_i(g;G)$ bereits bewiesen. Dann ist $N_{i-1}(g;G)$ das Produkt der zu $N_i(g;G)$ in $N_{i-2}(g;G)$ konjugierten Untergruppen [§ 1, Lemma 2], so daß also insbesondere $N_{i-1}(g;G)$ ein Produkt von isomorphen endlichen Normalteilern ist. Daraus folgt erstens, daß die Ordnungen der Elemente in $N_{i-1}(g;G)$ beschränkt sind, und zweitens, daß jedes Element aus $N_{i-1}(g;G)$ nur endlich viele konjugierte in $N_{i-1}(g;G)$ besitzt. Bedingung (iv) von BAER [6; § 0, Theorem] wird also von $N_{i-1}(g;G)$ erfüllt, so daß die Zentrumsfaktorgruppe von $N_{i-1}(g;G)$ endlich ist und die Minimalbedingung von den Untergruppen von $N_{i-1}(g;G)$ erfüllt wird. Da die Ordnungen der Elemente in $N_{i-1}(g;G)$ beschränkt sind, so ist $Z[N_{i-1}(g;G)]$ endlich; und also ist auch $N_{i-1}(g;G)$ endlich. Durch vollständige Induktion folgt nun die Endlichkeit von $N_1(g;G)$. — Damit ist gezeigt, daß jedes Element aus G in einem endlichen Normalteiler von G enthalten ist und also nur endlich viele konjugierte in G besitzt. Bedingung (iv) von BAER [6; § 0, Theorem] wird also von G erfüllt, so daß die Minimalbedingung von den Untergruppen der Nilgruppe G erfüllt wird. Also ist (3) eine Folge von (5); und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (5) erwiesen, q. e. d.

Bemerkung 5. Man kann leicht Beispiele unendlicher obernilpotenter Gruppen mit Minimalbedingung und endlichem Zentrum konstruieren. Diese können nach Satz 2 nicht Nilgruppen sein. Da Nilgruppen mit Minimalbedingung nach Satz 2 von endlicher Klasse sind, so ist die Klasse der Nilgruppen mit Minimalbedingung kleiner als die Klasse der obernilpotenten Gruppen mit Minimalbedingung.

7. Endlichkeitskriterien.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Herleitung von Kriterien dafür, daß eine Gruppe endlich und auflösbar ist. Doch gestatten unsere bisherigen Untersuchungen die Ableitung allgemeinerer Endlichkeitskriterien, die auch an sich von Interesse sind.

Lemma 1. *Eine Gruppe ist [dann und nur dann] endlich, wenn sie endlich erzeugbar ist, und wenn jedes ihrer unendlichen homomorphen Bilder eine von 1 verschiedene, endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppe besitzt.*

Beweis. Es sei G eine endlich erzeugbare Gruppe, deren sämtliche unendliche homomorphen Bilder von 1 verschiedene, endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppen besitzen. Wäre G unendlich, so existierte [wegen § 2, Lemma 2] ein unendliches homomorphes Bild H von G, dessen sämtliche echte homomorphe Bilder endlich sind. Es sei T die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in H, die nachinvariante [zyklische] Untergruppen von H erzeugen. Aus der Unendlichkeit von H und unserer zweiten Voraussetzung folgt $T \neq 1$. Aus § 3, Satz 2 und § 3, Zusatz 3 ergibt sich, daß T eine charakteristische Untergruppe von H ist. Das echte homomorphe Bild H/T von H ist also endlich. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G und H und der Endlichkeit von H/T folgt die endliche Erzeugbarkeit von T [§ 2, Lemma 1]. Also ist T eine von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugte Nilgruppe und als solche ist T endlich [§ 3, Zusatz 2]. Aus der Endlichkeit von T und H/T folgt die Endlichkeit der unendlichen Gruppe H. Aus diesem Widerspruch ergibt sich die Endlichkeit von G, q. e. d.

Lemma 2. *Die Gruppe G ist endlich, wenn jedes echte homomorphe Bild von G endlich ist, und wenn sowohl minimale Normalteiler wie auch von 1 verschiedene, zyklische, nachinvariante Untergruppen von G existieren.*

Bemerkung 1. Aus der Existenz unendlicher einfacher Gruppen folgt die Unentbehrlichkeit der dritten Voraussetzung.

Beweis. Die Gesamtheit $R = R(G)$ der nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugenden Elemente aus G ist eine charakteristische Untergruppe von G [§ 3, Satz 2]. Aus unserer dritten Voraussetzung ergibt sich $R \neq 1$. Weiter existiert ein minimaler Normalteiler M von G; und aus unserer ersten Voraussetzung erschließen wir die Endlichkeit von G/R und G/M.

Ist $R \cap M = 1$, so ist R einer Untergruppe von G/M isomorph. Aus der Endlichkeit von G/M folgt die von R und aus der Endlichkeit von R und G/R folgt die von G.

Ist zweitens $R \cap M \neq 1$, so folgt aus der Minimalität des Normalteilers M von G, daß $M = R \cap M$ oder $M \leq R$ ist. M ist also eine Nilgruppe. Ist $g \neq 1$ irgendein Element aus M, so ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von M [und G]. Ist $N = N_1(g; M)$ der kleinste g enthaltende Normalteiler von M, so folgt aus der Endlichkeit von G/M, daß N nur endlich viele konjugierte in G besitzt, deren Produkt ein von 1 verschiedener, in M enthaltener Normalteiler von G ist. Aus der Minimalität von M ergibt sich dann, daß M das Produkt der zu N in G konjugierten Untergruppen ist. Da es nur endlich viel zu N konjugierte Untergruppen gibt, so existieren zu N konjugierte Untergruppen $N = N_1, N_2, \ldots, N_n$ mit $0 < n$, $N_2 \ldots N_n < M = N_1 N_2 \ldots N_n$ — im Falle $n = 1$ ist $N_2 \ldots N_n = 1$. Dann ist $M/N_2 \ldots N_n$ der kleinste $N_2 \ldots N_n g$ enthaltende Normalteiler von $M/N_2 \ldots N_n$. Da aber $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von M ist, so ist $M/N_2 \ldots N_n$ eine von 1 verschiedene zyklische

Gruppe. Also ist $M' < M$. Als minimaler Normalteiler ist M frei von charakteristischen Untergruppen, so daß insbesondere $M' = 1$ und M abelsch ist. Dann besitzt aber das Element $g \neq 1$ aus dem ABELschen Normalteiler M mit endlicher Faktorgruppe G/M nur endlich viele konjugierte, die M erzeugen, da M ein minimaler Normalteiler ist. Damit ist gezeigt, daß M eine endlich erzeugbare ABELsche Gruppe ohne charakteristische Untergruppen ist; und es ist wohlbekannt und trivial einzusehen, daß daraus die Endlichkeit von M folgt. Aus der Endlichkeit von M und G/M ergibt sich aber wieder die Endlichkeit von G, q. e. d.

Satz 1. *Die nachauflösbare Gruppe G ist endlich, wenn sie wenigstens eine der folgenden fünf Bedingungen erfüllt:*

(1) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern von G erfüllt; und von 1 verschiedene homomorphe Bilder von G besitzen minimale Normalteiler.*

(2) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern von G erfüllt; und die Ordnungen der endlichen homomorphen Bilder von G sind beschränkt.*

(3) *G ist endlich erzeugbar; und von 1 verschiedene homomorphe Bilder von G besitzen minimale Normalteiler.*

(4) *G ist endlich erzeugbar; und die Indizes $[G:C]$ der charakteristischen Untergruppen C von G mit endlicher Faktorgruppe G/C sind beschränkt.*

(5) *G ist eine endlich erzeugbare Torsionsgruppe.*

Bemerkung 2. Wird die Minimalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt, so sind die zweiten Teile der Bedingungen (1) bis (4) automatisch erfüllt.

Bemerkung 3. Zu (5) vgl. § 4, Lemma 3.

Bemerkung 4. Endliche nachauflösbare Gruppen sind auflösbar [§ 4, Satz 2].

Beweis. Wäre die Gruppe G unendlich, so existierte ein unendliches homomorphes Bild H von G, dessen echte homomorphe Bilder endlich sind — dies ist klar, wenn die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird; und es folgt aus § 2, Lemma 2, wenn G endlich erzeugbar ist.

Aus Lemma 2 folgt dann, daß die unendliche, nachauflösbare Gruppe H keinen minimalen Normalteiler besitzen kann; und G erfüllt also weder (1) noch (3).

Wären weiter die Ordnungen der endlichen homomorphen Bilder von G beschränkt, so existierte ein Normalteiler M von H mit maximalem Index $[H:M]$. Ist $N \neq 1$ irgendein Normalteiler von H, so ist H/N als echtes homomorphes Bild von H endlich. Also sind auch $[H:N]$ und $[H:M \cap N]$ endlich; und aus der Maximalität von $[H:M]$ folgt dann $M = M \cap N$ oder $M \leq N$, so daß M ein minimaler Normalteiler von H wäre. Dies ist aber wegen Lemma 2 unmöglich; und G erfüllt also auch nicht Bedingung (2).

Ist G endlich erzeugbar, so enthält jeder Normalteiler N mit endlicher Faktorgruppe G/N eine charakteristische Untergruppe C von G mit endlicher Faktorgruppe G/C; s. BAER [4; p. 331, § 5, Folgerung 3]. Aus der Beschränktheit der Indizes $[G:C]$ folgt also die Beschränktheit der Ordnungen endlicher

homomorpher Bilder von G [und H]; und wir haben bereits die Unmöglichkeit dieser Eigenschaft erkannt. G genügt also auch nicht der Bedingung (4).

Schließlich folgt aus Lemma 1, daß H nicht eine endlich erzeugbare Torsionsgruppe sein kann; und damit ist auch die Unmöglichkeit von (5) dargetan. Die Annahme der Unendlichkeit von G hat uns also zu einem Widerspruch geführt, aus dem die Endlichkeit von G folgt, q. e. d.

Bemerkung 5. Da alle Nilgruppen nachauflösbar und nilpotent sind, so ist *eine Nilgruppe eine endliche und nilpotente Gruppe, wenn sie wenigstens eine der fünf Bedingungen* (1) *bis* (5) *des Satzes 1 erfüllt.* Da eine Gruppe sicher dann eine Nilgruppe ist, wenn sie von ihren zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird [§ 3, Zusatz 1], so genügt es sogar, diese letzte Annahme [zusammen mit einer der fünf Bedingungen] zu machen.

Literatur.

Baer, Reinhold: [*1*] Nilpotent groups and their generalizations. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 393—434 (1940). — [*2*] The hypercenter of a group. Acta Math. **89**, 165—208 (1953). — [*3*] Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. Arch. Math. **1**, 86—96 (1953). — [*4*] Das Hyperzentrum einer Gruppe. III. Math. Z. **59**, 299—338 (1953). — [*5*] Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Math. Ann. **129**, 139—173 (1955). — [*6*] Finite extensions of abelian groups with minimum condition. Trans. Amer. Math. Soc. (erscheint demnächst).

Gruenberg, K. W.: [*1*] Two theorems on Engel groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 377—380 (1953).

Hirsch, K.: [*1*] On infinite soluble groups. III. Proc. Lond. Math. Soc. **49**, 184—194 (1946).

Iwasawa, K.: [*1*] Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **23** (III), 1—4 (1941).

Kontorovič, P. G.: [*1*] Invariant überdeckte Gruppen. Mat. Sbornik **28**, 79—88 (1951). [Russisch.]

Kuroš, A.: [*1*] Gruppentheorie, 2. Aufl. Moskau 1953. [Russisch.]

Malcew, I. A.: [*1*] Unendliche auflösbare Gruppen. Mat. Sbornik **28**, 567—588 (1951). [Russisch.]

Plotkin, B.: [*1*] Über Nilgruppen. Dokl. Akad. Nauk SSSR. **94**, 999—1001 (1954). [Russisch.]

Schenkman, E.: [*1*] A generalization of the central elements of a group. Pacific J. Math. **3**, 501—504 (1953).

Schmidt, O.: [*1*] Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind. Rec. Math. Moscou **31**, 366—372 (1924).

Wielandt, H.: [*1*] Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209—244 (1939).

Zassenhaus, H.: [*1*] Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik. Abh. Math. Sem. Hamburg **13**, 1—100 (1940).

Zorn, M.: [*1*] Nilpotency of finite groups. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 485—486 (1936).

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Ill. (USA.).

(Eingegangen am 14. März 1955.)

BRAFMAN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 438—442 (1955)

Series of Products of Gegenbauer Polynomials.

By
FRED BRAFMAN.

1. *Statement of result.* Results on Legendre polynomials $P_n(x)$ which are essentially due to the structure of the polynomials permit extension to the more general Gegenbauer polynomials $C_n^{(\alpha)}(x)$ or ultraspherical polynomials $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$. This note is to extend the recent result by VINTI [5] that

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})\,P_n(x)\,P_n(y)\,P_n(z)=\begin{cases}\pi^{-1}g^{-\frac{1}{2}}, & g>0\\ 0, & g<0\end{cases} \tag{1}$$

for

$$-1<x<1,\quad -1<y<1,\quad -1<z<1,$$

$$g(x,y,z)=1-x^2-y^2-z^2+2xyz.$$

THEOREM. *Let $(a)_n$ denote the usual factorial notation*

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1). \tag{2}$$

Then

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha[\Gamma(\alpha)]^4[(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\Gamma(2\alpha)]^2\pi\,2^{2-4\alpha}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,n!\,(1+\alpha)_n\,C_n^{(\alpha)}(x)\,C_n^{(\alpha)}(y)\,C_n^{(\alpha)}(z)}{(2\alpha)_n\,(2\alpha)_n\,(\alpha)_n}\\ \qquad=\begin{cases}g^{\alpha-1}, & g>0\\ 0, & g<0.\end{cases}\end{cases} \tag{3}$$

The definition of $g(x,y,z)$ in (3) *and the restrictions on x, y, z are the same as for* (1), *and in addition*

$$\alpha>0. \tag{4}$$

The ultraspherical polynomials $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ are related to the Gegenbauer polynomials by the formula

$$C_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(2\alpha)_n}{(\alpha+\frac{1}{2})_n}P_n^{(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2})}(x). \tag{5}$$

The substitution of (5) in (3) and the replacing of α by $\alpha+\frac{1}{2}$ leads to

$$\begin{cases}\dfrac{(\alpha+\frac{1}{2})[(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha}}{[\Gamma(2\alpha+1)]^2\pi\,2^{-4\alpha}[\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})]^{-4}}\times\\ \qquad\times\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\alpha+1)_n(\alpha+\frac{3}{2})_n\,n!\,n!\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(y)\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(z)}{(\alpha+1)_n(\alpha+1)_n(\alpha+1)_n(\alpha+\frac{1}{2})_n}\\ \qquad=\begin{cases}g^{\alpha-\frac{1}{2}}, & g>0\\ 0, & g<0\end{cases}\end{cases} \tag{6}$$

for $\alpha>-\frac{1}{2}$.

Placing $\alpha=\frac{1}{2}$ in (3) or $\alpha=0$ in (6) yields (1) as a special case.

2. *Formal derivation.* The result will first be formally presented in this section. Assume an expansion of the form

$$(7)\qquad (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} g^{\alpha-1}, & g>0 \\ 0, & g<0. \end{cases}$$

Use Vinti's notation of

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = yz-(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}} \\ x_2 = yz+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \cos\varphi = (x-yz)(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

and the standard normalization factor ([4], p. 81, formula 4.7.15)

$$(9)\qquad \frac{\Gamma(2\alpha)\,2^{1-2\alpha}\pi(2\alpha)_n(\alpha)_n}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)\,n!\,(\alpha+1)_n} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}[C_n^{(\alpha)}(x)]^2\,dx.$$

This yields

$$(10)\qquad a_n = \frac{\alpha[\Gamma(\alpha)]^2 n!\,(1+\alpha)_n}{\Gamma(2\alpha)\,2^{1-2\alpha}\pi(2\alpha)_n(\alpha)_n}\int_{x_1}^{x_2} g^{\alpha-1}C_n^{(\alpha)}(x)\,dx.$$

But

$$(11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} g^{\alpha-1}C_n^{(\alpha)}(x)\,dx \\ \displaystyle = \int_0^{\pi} C_n^{(\alpha)}[yz+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi][(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}[(\sin\varphi)]^{2\alpha-1}\,d\varphi. \end{cases}$$

Using the result ([2] vol. 1, p. 177; [6], p. 369)

$$(12)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} C_n^{(\alpha)}[yz+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi](\sin\varphi)^{2\alpha-1}\,d\varphi \\ \qquad\qquad = \dfrac{2^{2\alpha-1}n!\,[\Gamma(\alpha)]^2 C_n^{(\alpha)}(y)\,C_n^{(\alpha)}(z)}{\Gamma(2\alpha)\,(2\alpha)_n} \end{cases}$$

it follows that

$$(13)\qquad a_n = \frac{\alpha[\Gamma(\alpha)]^4[n!]^2(1+\alpha)_n[(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}C_n^{(\alpha)}(y)\,C_n^{(\alpha)}(z)}{\pi\cdot(2\alpha)_n\cdot(2\alpha)_n\cdot[\Gamma(2\alpha)]^2(\alpha)_n 2^{2-4\alpha}}$$

from which (3) is obtained.

3. *Proof for* $\alpha>2$. It must now be shown that the expansion (7) is valid or hence that $f(x)$ permits a Gegenbauer expansion, where $f(x)$ is defined by

$$(14a)\qquad f(x) = \frac{g^{\alpha-1}}{(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}, \qquad g>0,$$

$$(14b)\qquad f(x) = 0, \qquad g<0.$$

If one assumes the rather severe restriction that $\alpha>2$, then the result follows quickly from a theorem by RAU [3], and it seems desirable to

demonstrate this here. By Rau's theorem, as quoted in [2] vol. 2, p. 211, it is sufficient to show that $f(x)$ is continuous with a sectionally continuous derivative. By noting that,

$$g = (x_1 - x)(x - x_2), \tag{15}$$

the reader can easily see that Rau's conditions are satisfied for $\alpha > 2$ provided

$$x_1 \neq -1 \quad \text{and} \quad x_2 \neq +1 \tag{16}$$

are both satisfied. Condition (16) is equivalent to

$$y^2 \neq z^2. \tag{17}$$

If $y^2 = z^2$ but $x^2 \neq y^2$, then by treating the problem in the variable y, a completely analogous result follows in y for $x^2 \neq z^2$. Hence for $\alpha > 2$, the expansion is justified except possibly for $x^2 = y^2 = z^2$, or thus the expansion is justified by Rau's theorem for all points of the cube $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, $-1 < z < 1$ except the diagonal lines.

4. A general proof.

LEMMA 1.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \text{ exists for } \alpha > 0, \quad -1 < y < 1, \ -1 < z < 1.$$

PROOF. First,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{g^{\alpha-1}\,dx}{(1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}}.$$

For $y^2 \neq z^2$, it easily follows that $-1 < x_1$ and $x_2 < 1$ and hence the factor $(1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ will not affect existence. Likewise $g^{\alpha-1} = (x_1 - x)^{\alpha-1}(x - x_2)^{\alpha-1}$ and thus for $\alpha > 0$, the integral exists.

For $y = z$, the integral becomes

$$\int_{(2y^2-1)}^{1} \frac{[(1 - x)(1 + x - 2y^2)]^{\alpha-1}\,dx}{(1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}} = \int_{2y^2-1}^{1} \frac{(1 + x - 2y^2)^{\alpha-1}}{(1 - x)^{\frac{1}{2}}(1 + x)^{\alpha - \frac{1}{2}}}\,dx$$

which exists under the restriction $\alpha > 0$, $-1 < y < 1$. A similar treatment shows existence for $y = -z$ and thus Lemma 1 is proven.

LEMMA 2. *For $\alpha > 0$, $-1 < y < 1$, $-1 < z < 1$, the integrals*

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} |f(x)|\,dx, \quad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} |f(x)|\,dx$$

exist.

PROOF. First,

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} |f(x)|\,dx = \int_{x_1}^{x_2} g^{\alpha-1}\,dx,$$

which exists for the reasons pointed out in Lemma 1.

Next,

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}|f(x)|\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(1-x^2)^{-\alpha/2}g^{\alpha-1}\,dx.$$

For $y^2\neq z^2$, $-1<x_1$ and $x_2<1$ and hence the integral exists. For $y=z$, the integral becomes

$$\int_{2y^2-1}^{1}(1-x^2)^{-\alpha/2}(1-x)^{\alpha-1}(1+x-2y^2)^{\alpha-1}\,dx$$

which equals

$$\int_{(2y^2-1)}^{1}(1+x)^{-\alpha/2}(1-x)^{\alpha/2-1}(1+x-2y^2)^{\alpha-1}\,dx,$$

which exists for $\alpha>0$. A similar argument applies for $y=-z$, and Lemma 2 is proven.

The following theorem is a special case of one by SZEGÖ ([4], p. 239, theorem 9.1.2).

A. Let $f(x)$ be Lebesgue-measurable in $[-1,+1]$ and let the integrals

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}|f(x)|\,dx,\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}|f(x)|\,dx$$

exist.

B. Let $S_n(x)$ denote the n^{th} partial sum of the expansion of $f(x)$ in a Gegenbauer series and $t_n(\cos\vartheta)$ the n^{th} partial sum of the Fourier cosine series of

$$(\sin^2\vartheta)^{\alpha/2}f(\cos\vartheta).$$

C. Conclusion: Then for $-1<x<+1$,

$$\lim_{n\to\infty}\{S_n(x)-(1-x^2)^{-\alpha/2}t_n(x)\}=0$$

uniformly in $-1+\varepsilon\leq x\leq 1-\varepsilon$, for $0<\varepsilon<1$.

By lemmas 1 and 2, conditions A have been satisfied. For condition B, let

$$F(\vartheta)=(\sin^2\vartheta)^{\alpha/2}f(\cos\vartheta). \tag{17}$$

Then $t_n(\cos\vartheta)$ is the n^{th} partial sum of the Fourier series of $F(\vartheta)$, and convergence of this series is sufficient for condition B.

Convergence here will be based on satisfaction of Dirichlet's conditions ([1], pp. 226, 230). First note

$$F(\vartheta)=\begin{cases}0, & g<0,\\ [(x_1-\cos\vartheta)(\cos\vartheta-x_2)]^{\alpha-1}(\sin^2\vartheta)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}, & g>0.\end{cases} \tag{18}$$

Thus $F(\vartheta)$ has a finite number of points of possible infinite discontinuity, namely at $\cos\vartheta=x_1$, $\cos\vartheta=x_2$, and $\vartheta=0$.

Excluding neighborhoods of these points, $F(\vartheta)$ is otherwise bounded. It next must be shown that this excluded interval can be broken into a finite

number of parts in each of which $F(\vartheta)$ is monotonic. But this is easily done by noting that for $g<0$, $F(\vartheta)$ is certainly monotonic, and for $g>0$, the derivative of $F(\vartheta)$ has only a finite number of roots.

The last condition requires that $\int_{-\pi}^{\pi} F(\vartheta)\, d\vartheta$ be absolutely convergent. This follows immediately from the restriction $\alpha>0$.

Thus the Fourier expansion of $F(\vartheta)$ is valid and hence the Fourier and Gegenbauer series are equiconvergent.

References.

[1] CARSLAW, H. S.: Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. 3rd ed., p. 226 and p. 230. 1930. — [2] ERDELYI-MAGNUS-OBERHETTINGER-TRICOMI: Higher Transcendental Functions. Bateman Manuscript Project 1953. — [3] RAU, H.: Über die Entwickelung einer stetigen Funktion nach Jacobischen Polynomen. Arch. Math. **2**, 251—257 (1953). — [4] SZEGÖ, G.: Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **23** (1939). — [5] VINTI, J. P.: Note on a Series of Products of Three Legendre Polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 19—23 (1951). — [6] WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 1944.

Department of Mathematics, Wayne University, Detroit, Mich. (USA.).

(Eingegangen am 28. März 1955.)

SCHIEFERDECKER, E.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 443—468 (1955)

Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen.

Von
EBERHARD SCHIEFERDECKER.

Einleitung.

Wenn eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eingebettet ist, liegt die folgende Frage nahe: Kann man auf $\mathfrak{G}$ eine solche Topologie T einführen, daß $\mathfrak{G}$ zu einer topologischen Gruppe wird und daß T auf dem Teilraum $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ eine Topologie induziert, die mit der auf $\mathfrak{H}$ vorgegebenen äquivalent ist?

Zum Beispiel ist die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen mit der „invarianten" Metrik

$$|a, b| = |\log a - \log b| \qquad a, b \in \mathfrak{Z} \tag{1}$$

eine topologische Halbgruppe, die man in ihre Quotientengruppe, die multiplikative Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ der positiven rationalen Zahlen, einbetten kann. Diese Gruppe läßt sich in einfachster Weise topologisieren, indem man die Metrik (1) „invariant fortsetzt" zu

$$|r, s| = |\log r - \log s| \qquad r, s \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}). \tag{2}$$

Die durch (2) auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ gelieferte Topologie T_1 besitzt auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ die oben von T auf $\mathfrak{G}$ geforderten Eigenschaften.

Im allgemeinen Falle einer beliebigen topologischen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist es wesentlich schwieriger, auf $\mathfrak{G}$ eine geeignete Topologie T zu finden. In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, eine metrische Halbgruppe, deren Metrik gewissen Invarianzforderungen genügt, auch in topologischer Hinsicht einzubetten in ihre (Links-)Quotientengruppe [bzw. in eine (Links-) Quotientenhalbgruppe, falls nur eine solche existieren sollte]. Dieses Verfahren, das sich sinngemäß auch auf metrische Ringe übertragen läßt, führt im obigen Beispiel ebenfalls zu der Metrik (2) auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$.

Eine andere, weniger weitreichende Methode zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientengruppen haben GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT angegeben ([1], Satz 15). Diese Methode ist komplizierter als die zuerst erwähnte, die auf invarianter Fortsetzung der Metrik beruht, und kann zu einer anderen Topologie T' der Quotientengruppe führen:

Geht man etwa wieder von der multiplikativen Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen mit der Metrik (1) aus, so liefert das Verfahren von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ eine Topologie T_2 mittels der Metrik

$$D(r, s) = \left\| \frac{r}{s} \right\| \qquad r, s \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}), \tag{3}$$

wobei für $a, \alpha \in \mathfrak{Z}$

$$\left\| \frac{a}{\alpha} \right\| = \inf_{\alpha' a = a' \alpha} (|\alpha', 1| + |a', 1|) \qquad a, a', \alpha, \alpha' \in \mathfrak{Z} \tag{4}$$

gesetzt wird. Die Metrik (3) ist nicht Fortsetzung von (1), doch ist die durch T_2 auf $\mathfrak{Z}$ induzierte Topologie mit der durch (1) erhaltenen äquivalent. Durch (1) bzw. (3) wird $\mathfrak{Z}$ bzw. $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ diskret topologisiert; dagegen ist die durch (2) auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ gegebene Topologie nicht diskret.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die rein algebraischen Ergebnisse über die Einbettung von Halbgruppen in Quotientenhalbgruppen dargestellt. Dabei ergibt sich unter anderem ein besonders einfacher Zugang zu gewissen Teilen von MURATA [3] (§ 1, § 2). § 3 vermittelt den Übergang zu den Einbettungssätzen für metrische Halbgruppen, die in §§ 4 bis 5 behandelt werden. Die Sätze 1 bis 4 aus § 5 sind die Hauptsätze der Arbeit. Abschließend wird das eben skizzierte Einbettungsverfahren von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT mit dem von mir entwickelten verglichen (§ 6).

Die vorliegende Arbeit stimmt inhaltlich im großen und ganzen mit den Abschnitten I und II meiner Dissertation „Zur Einbettung metrischer Halbgruppen und Ringe in ihre Quotientenstrukturen", München 1954, überein. In den Abschnitten III und IV der Dissertation wird die Einbettung metrischer Ringe in Quotientenringe ausführlich behandelt.

§ 1. Quotientenhalbgruppen.

Eine nicht-leere Menge $\mathfrak{H}$, für deren Elemente $a, b, \ldots$ eine binäre assoziative Verknüpfungsoperation $ab = a \cdot b$ erklärt ist, nennt man eine *Halbgruppe*. ab heißt das Produkt von a und b, a (Links-), b (Rechts-)Faktor von ab. Unter einer *kommutativen* (ABEL*schen*) Halbgruppe versteht man eine solche Halbgruppe, für deren Elemente a, b stets

$$ab = ba$$

gilt.

Definiert man das Produkt endlich vieler Halbgruppenelemente $a_1, \ldots, a_n$ wie bei Gruppen, so zeigt man leicht, daß auch hier für Produkte aus n (≥ 3) Faktoren eine Beklammerung unnötig ist; bei kommutativen Halbgruppen kommt es überdies auf die Reihenfolge der Faktoren nicht an.

Einfache Beispiele lehren, daß eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ nicht notwendig eine *Identität* (ein *Einselement*), d.h. ein Element $\mathbf{1}$ mit

$$\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a \qquad a \text{ beliebig} \in \mathfrak{H},$$

besitzen muß. Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ kann höchstens *ein* Einselement enthalten. Vom abstrakt-algebraischen Standpunkt aus bedeutet es aber keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß eine Halbgruppe ein Einselement enthalte, da man notfalls ein solches Element adjungieren kann.

In Halbgruppen mit Einselement $\mathbf{1}$ kann man den Begriff eines zu einem gegebenen Element $\alpha \in \mathfrak{H}$ *inversen* Elementes α^{-1} wie bei Gruppen einführen, nämlich durch die Forderung

$$\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = \mathbf{1} \qquad \alpha, \alpha^{-1} \in \mathfrak{H}.$$

Zu vorgegebenem $\alpha \in \mathfrak{H}$ gibt es höchstens ein Inverses in $\mathfrak{H}$.

In Gruppen gelten bekanntlich die folgenden (links- bzw. rechtsseitigen) *Kürzungsregeln*

(1) Aus $\alpha a = \alpha b$ folgt $a = b$

bzw.

(2) Aus $a\alpha = b\alpha$ folgt $a = b$.

In Halbgruppen ist das im allgemeinen nicht mehr der Fall. Eine Abschwächung der Regeln (1) und (2) ist für das Folgende von grundlegender Bedeutung. Nach MURATA ([3], Definition 1) heißt ein Element α einer beliebigen, festen Halbgruppe $\mathfrak{H}$, das die beiden vorstehenden Regeln mit beliebigen Elementen $a, b \in \mathfrak{H}$ erfüllt, ein *reguläres Element* von $\mathfrak{H}$. Die regulären Elemente in Halbgruppen entsprechen den Nichtnullteilern in Ringen, sofern man allein deren multiplikative Halbgruppen in Betracht zieht. [Man kann nämlich die Nichtnullteiler eines Ringes mittels der Forderungen (1) und (2) in der multiplikativen Halbgruppe des Ringes charakterisieren.]

Unter einer *regulären Halbgruppe* wird eine Halbgruppe verstanden, die nur aus regulären Elementen besteht.

Reguläre Elemente einer Halbgruppe mit Einselement lassen sich leicht angeben: diejenigen Elemente, die ein Inverses besitzen, insbesondere also die Identität selbst.

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß die betrachteten Halbgruppen reguläre Elemente besitzen. Es ist leicht zu zeigen, daß die Menge aller regulären Elemente einer solchen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eine Unterhalbgruppe[1]) $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{H}$ bilden.

Definition (MURATA [3], Definition 2). $\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit regulären Elementen, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Unter einer *Linksquotientenhalbgruppe von* $\mathfrak{H}$ *bezüglich* $\mathfrak{m}$ versteht man eine Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ mit den folgenden Eigenschaften (i), ..., (iv):

(i) $\mathfrak{H}$ ist Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l$.

(ii) $\mathfrak{Q}_l$ besitzt ein Einselement.

(iii) Zu jedem $\alpha \in \mathfrak{m}$ existiert ein Inverses, α^{-1}, in $\mathfrak{Q}_l$.

(iv) Zu beliebigem $A \in \mathfrak{Q}_l$ gibt es ein $\alpha \in \mathfrak{m}$ mit $\alpha A \in \mathfrak{H}$.

Ist speziell $\mathfrak{m}$ gleich der Menge $\mathfrak{r}$ aller regulären Elemente von $\mathfrak{H}$, so nennt man $\mathfrak{Q}_l$ eine *Linksquotientenhalbgruppe von* $\mathfrak{H}$ schlechthin und schreibt $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{r}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$.

[1]) Eine *Unterhalbgruppe* einer gegebenen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{H}$, die bezüglich der in $\mathfrak{H}$ definierten Verknüpfung selbst eine Halbgruppe darstellt.

Analog läßt sich natürlich eine Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r$ von $\mathfrak{H}$ bezüglich einer Unterhalbgruppe, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht, einführen, und es gelten Sätze, die den unten für $\mathfrak{Q}_l$ zu entwickelnden ganz analog sind.

Der obigen Definition entnimmt man sofort, daß sich jedes $A \in \mathfrak{Q}_l$ als *Linksquotient*, d.h. in der Form $\alpha^{-1}a$ (α geeignet $\in \mathfrak{m}$, a geeignet $\in \mathfrak{H}$) darstellen läßt. Diese Tatsache rechtfertigt zunächst die verwendete Terminologie; die Rechengesetze in $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ können als eine Art verallgemeinerter Bruchrechenregeln aufgefaßt werden, wovon mehrfach Gebrauch gemacht werden wird.

Elemente aus $\mathfrak{H}$ werden im allgemeinen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet; Elemente aus $\mathfrak{m}$ dagegen stets mit kleinen griechischen Buchstaben.

Für den Rest dieses Paragraphen sei $\mathfrak{H}$ eine beliebige, aber fest gewählte Halbgruppe, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Weiterhin werde angenommen, daß eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ existiert. Da jedes $A \in \mathfrak{Q}_l$ als Linksquotient darstellbar ist, ergibt sich sofort

Satz 1. *In* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *ist jeder Rechtsquotient* $a\alpha^{-1}$ (a *beliebig* $\in \mathfrak{H}$, α *beliebig* $\in \mathfrak{m}$) *als Linksquotient* $\alpha'^{-1}a'$ ($\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$) *darstellbar:*

$$a\alpha^{-1} = \alpha'^{-1}a'.$$

Folgerung. Wenn $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ existiert, gibt es zu beliebigen $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ stets Elemente $\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$, so daß

$$\alpha' a = a' \alpha. \tag{3}$$

Um Gl. (3) zu interpretieren, kann man sich einiger gelegentlich in der Literatur vorkommender Begriffsbildungen bedienen, die für die Zwecke der vorliegenden Arbeit besonders geeignet sind. Ein Ausdruck xa ($a, x \in \mathfrak{H}$) ist ein *Linksvielfaches* von a (oder ein *Rechtsvielfaches* von x),

$$z = xa = yb \qquad a, b, x, y \in \mathfrak{H}$$

ist ein *gemeinsames* Linksvielfaches von a und b (oder ein gemeinsames Rechtsvielfaches von x und y). Die Folgerung aus Satz 1 sagt mithin aus: Existiert $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$, so haben zwei beliebige Elemente $a \in \mathfrak{H}$ und $\alpha \in \mathfrak{m}$ stets ein gemeinsames Linksvielfaches in $\mathfrak{H}$. Dabei kann man den Faktor, mit dem $a \in \mathfrak{H}$ von links zu multiplizieren ist, in $\mathfrak{m}$, den links von $\alpha \in \mathfrak{m}$ stehenden Faktor in $\mathfrak{H}$ wählen. Liegen also sowohl a als auch α in $\mathfrak{m}$, so gibt es auch ein Linksvielfaches von a und α in $\mathfrak{H}$, das man in $\mathfrak{m}$ wählen kann.

Satz 2. *In* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *wird das Produkt zweier Elemente* $A = \alpha^{-1}a$ *und* $B = \beta^{-1}b$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b \in \mathfrak{H}$) *gegeben durch*

$$(\alpha^{-1}a) \cdot (\beta^{-1}b) = (\beta'\alpha)^{-1}(a'b),$$

wobei $\beta' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$ *so gewählt sind, daß*

$$\beta' a = a' \beta.$$

Beweis. Man schreibe den Rechtsquotienten $a\beta^{-1}$ als Linksquotienten, etwa als $\beta'^{-1}a'$ ($\beta' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$). Dann gilt neben

$$\beta' a = a' \beta$$

$$(\alpha^{-1} a)(\beta^{-1} b) = \alpha^{-1}(a\beta^{-1}) b = \alpha^{-1}\beta'^{-1} a' b = (\beta'\alpha)^{-1}(a' b).$$

Hat man ferner

$$\beta'' a = a'' \beta \qquad \beta'' \in \mathfrak{m},\ a'' \in \mathfrak{H},$$

so folgt wegen

$$\beta'^{-1} a' = \beta''^{-1} a'' = a\beta^{-1}$$

$$(\beta'\alpha)^{-1}(a' b) = (\beta''\alpha)^{-1}(a'' b).$$

Satz 3. *In* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *gilt, falls* $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b, x, y \in \mathfrak{H}$ und $x\alpha, \beta y \in \mathfrak{m}$

$$\alpha^{-1} a = (x\alpha)^{-1}(x a) \qquad x\alpha \in \mathfrak{m},$$

$$b\beta^{-1} = (b y)(\beta y)^{-1} \qquad y\beta \in \mathfrak{m}.$$

Beweis. Sei $a, x \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$. Dann gilt in $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$

$$x a = x(\alpha\alpha^{-1}) a = (x\alpha)(\alpha^{-1} a).$$

Ist $x\alpha \in \mathfrak{m}$, so schließt man mit Rücksicht auf die Definition von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}\ \mathfrak{m})$, daß

$$(x\alpha)^{-1}(x a) = \alpha^{-1} a.$$

Die andere Gleichung wird entsprechend bewiesen.

Die erste Gleichung des Satzes 3 besagt, daß man einen Linksquotienten $A = \alpha^{-1} a$ unter gewissen Voraussetzungen von links *erweitern* darf, d.h. es dürfen *Linksnenner* α und *Rechtszähler* a durch $x\alpha$ und $x a$ (x ein gewisses Element aus $\mathfrak{H}$) ersetzt werden, ohne daß sich der Wert A des Linksquotienten ändert. Liest man die erwähnte Gleichung von rechts nach links, so erhält man eine Aussage über das linksseitige *Kürzen* von Linksquotienten. Eine analoge Deutung kann auch für die zweite Gleichung des Satzes 3 gegeben werden.

Satz 4. *In* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *gilt dann und nur dann*

$$\alpha^{-1} a = \beta^{-1} b, \tag{4}$$

wenn

$$\text{aus} \quad x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m} \quad \text{folgt} \quad x a = y b. \tag{5}$$

Beweis. 1. Aus (4) folgt (5): Sei

$$x\alpha = y\beta = \gamma \in \mathfrak{m}.$$

(Solche $x, y \in \mathfrak{H}$ gibt es nach der Folgerung zu Satz 1 stets.) Gilt Gl. (4), so kann man wegen Satz 3 den Quotienten $\alpha^{-1} a$ von links mit x, den Quotienten $\beta^{-1} b$ von links mit y erweitern. Die so entstehenden Linksquotienten haben den gleichen Linksnenner γ. Linksmultiplikation mit γ liefert sofort

$$x a = y b.$$

2. Aus (5) folgt (4): Ist (5) erfüllt, so besteht wegen Satz 3 die folgende Gleichung

$$\alpha^{-1}a = (x\alpha)^{-1}(xa) = (y\beta)^{-1}(yb) = \beta^{-1}b.$$

Bemerkung. Gl. (4) ist auch gleichwertig mit der Relation

(6) Zu $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b \in \mathfrak{H}$ gibt es $x_0, y_0 \in \mathfrak{H}$, so daß

$$x_0\alpha = y_0\beta \in \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad x_0 a = y_0 b.$$

Der Beweis dieser Behauptung ist leicht zu erbringen.

In den vorstehenden beinahe trivialen Sätzen sind die wichtigsten Rechengesetze enthalten, die Linksquotientenhalbgruppen zu beherrschen gestatten. An Hand dieser Sätze wird man fast zwanglos zu einem Konstruktionsverfahren einer Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu vorgegebenen Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{H}$ geführt. Doch soll darauf hier nicht eingegangen werden (vgl. [3]).

§ 2. Einbettung von Halbgruppen in Quotientenhalbgruppen.

Gegeben seien eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit regulären Elementen und eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Unter welchen Bedingungen existiert eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$? Aus § 1, Folgerung zu Satz 1 entnimmt man sofort, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ die folgende Eigenschaft haben müssen:

(1) Zu beliebigen $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ gibt es $\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$, so daß $\alpha' a = a'\alpha$.

(Eine andere Formulierung dieser Bedingung: Für beliebige $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ gilt stets $\mathfrak{m}a \cap \mathfrak{H}\alpha \neq 0$.)

Für Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ mit (1) beweist man durch vollständige Induktion leicht den wichtigen, im folgenden häufig anzuwendenden

Hilfssatz (MURATA [3], Lemma 1). *$\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ seien Halbgruppen, für die (1) erfüllt ist. Dann gibt es zu vorgegebenen Elementen $\alpha_i \in \mathfrak{m}$ stets Elemente $a_i \in \mathfrak{H}$ $(i = 1, \ldots, n)$, so daß*

$$a_1\alpha_1 = \cdots = a_n\alpha_n = \alpha \in \mathfrak{m}.$$

In dieser Gleichung lassen sich außerdem die a_i so wählen, daß zu vorgegebenem i_0 $(= 1$ oder $= \cdots$ oder $= n)$ a_{i_0} in $\mathfrak{m}$ liegt.

Der Hilfssatz kann unter anderem zum Beweis eines Satzes von MURATA über die Existenz von Linksquotientenhalbgruppen benutzt werden. Dieser Satz kann in folgender Form ausgesprochen werden:

Satz 1 (MURATA [3], Satz 1). *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit regulären Elementen, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. $\mathfrak{H}$ kann dann und nur dann in eine Linksquotientenhalbgruppe*

$\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *eingebettet*[2]) *werden, wenn zu beliebigen* $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ *stets* $\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$ *existieren, so daß*

$$\alpha' a = a' \alpha .$$

Eine solche Linksquotientenhalbgruppe ist durch $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{m}$ *bis auf Isomorphie bezüglich* $\mathfrak{H}$ *eindeutig bestimmt*[3]).

Satz 1 besagt unter anderem, daß unter den zu Beginn dieses Paragraphen gemachten Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ die Eigenschaft (1) auch hinreicht für die Einbettbarkeit von $\mathfrak{H}$ in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$. Da eine solche bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, kann man von *der* Linksquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$ sprechen. Einen Beweis des Satzes 1 gibt MURATA [3]. In [3] wird $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zunächst für eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement konstruiert und der allgemeine Fall auf diesen Spezialfall zurückgeführt; indessen ist eine solche Fallunterscheidung nicht nötig.

Folgerung 1 („ORE scher Einbettungssatz"). Eine reguläre Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann in eine Gruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ einbettbar, deren Elemente als Linksquotienten $\alpha^{-1} a$ von Elementen α, $a \in \mathfrak{H}$ darstellbar sind, wenn je zwei Elemente aus $\mathfrak{H}$ ein gemeinsames Linksvielfaches besitzen. Die *Linksquotientengruppe* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ ist durch $\mathfrak{H}$ bis auf Isomorphie bezüglich $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. In Satz 1 ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{m}$ zu setzen. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ eine Gruppe ist. Zu diesem Zwecke stelle man das beliebige Element $A \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ als Linksquotient $\alpha^{-1} a$ (α, a geeignet $\in \mathfrak{H}$) dar. Wegen

$$(a^{-1}\alpha)(\alpha^{-1} a) = (\alpha^{-1} a)(a^{-1}\alpha) = \mathbf{1}$$

hat A dasjenige Element A^{-1} als inverses, das die Quotientendarstellung $a^{-1}\alpha$ besitzt.

Bemerkung 1. Folgerung 1 geht im wesentlichen auf ORE ([4], Sätze 1 und 2) zurück, wird aber dort für die Einbettung gewisser Ringe in Quotientenschiefkörper formuliert und bewiesen. — Reguläre Halbgruppen $\mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft, daß je zwei Elemente aus $\mathfrak{H}$ ein gemeinsames Linksvielfaches besitzen, werden in der Literatur bisweilen als *Oresche Halbgruppen* bezeichnet. Die Oreschen Halbgruppen (und diejenigen regulären Halbgruppen, in denen es zu je zwei Elementen ein gemeinsames Rechtsvielfaches gibt) sind nach dem Oreschen Einbettungssatz die allgemeinsten Halbgruppen, die noch durch eine Art Quotientenbildung in Gruppen eingebettet werden können.

[2]) Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ Halbgruppen, so heiße $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{J}$ *einbettbar*, wenn $\mathfrak{J}$ eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe Unterhalbgruppe $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{H}^*$ enthält. Wenn dabei $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$, so sagt man, $\mathfrak{H}$ sei in $\mathfrak{J}$ *eingebettet*. Statt „$\mathfrak{H}$ ist einbettbar (eingebettet) in $\mathfrak{J}$" soll auch gesagt werden „$\mathfrak{H}$ läßt sich in $\mathfrak{J}$ einbetten", „$\mathfrak{H}$ kann in $\mathfrak{J}$ eingebettet werden".

[3]) Das heißt: Ist $\mathfrak{Q}_l'$ eine weitere Linksquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$, so gibt es einen Isomorphismus von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ auf $\mathfrak{Q}_l'$, bei dem jedes Element aus $\mathfrak{H}$ auf sich selbst abgebildet wird.

Durch die Konstruktion von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ wird $\mathfrak{H}$ in eine Halbgruppe eingebettet. Es liegt die Frage nahe, ob $\mathfrak{m}$ durch diesen Einbettungsprozeß in eine Gruppe eingebettet wird, die Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist. Diese Frage ist unter speziellen Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ von VANDIVER ([6], Satz 1) bejahend beantwortet worden. In [6] wird vorausgesetzt, daß die Menge $\mathfrak{r}$ der regulären Elemente von $\mathfrak{H}$ im Zentrum[4]) von $\mathfrak{H}$ liegt und daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}$ ist. Wegen Satz 1 existiert die (Links-)*Quotientenhalbgruppe* $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$. In ihr bildet die Menge aller Elemente A, die in der Form $\beta/\alpha = \alpha^{-1}\beta = \beta\alpha^{-1}$ [5]) $(\alpha, \beta \in \mathfrak{m})$ darstellbar sind, eine im Zentrum von $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ liegende (ABELsche) Gruppe, die $\mathfrak{m}$ umfaßt.

Unter den allgemeineren in Satz 1 gemachten Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ ergibt sich der folgende Satz 2, der als Verallgemeinerung des erwähnten Satzes von VANDIVER aufgefaßt werden kann.

Satz 2. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit regulären Elementen, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Weiterhin lasse sich $\mathfrak{H}$ in die Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbetten. Dann läßt sich $\mathfrak{m}$ in eine Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ einbetten, die Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist und deren Elemente als Potenzprodukte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ darstellbar sind.*

Beweis. Die Menge aller derjenigen Elemente A aus $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$, die sich in der Form

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\varepsilon_i}, \quad \alpha_j \in \mathfrak{m}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

mit $n = 1, 2, \ldots$ darstellen lassen, bildet eine Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$, die $\mathfrak{m}$ umfaßt; $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ ist Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$.

Es sei noch eine andere interessante Formulierung für Satz 2 angegeben.

Folgerung 2. $\mathfrak{m}$ sei eine reguläre Halbgruppe. Läßt sich $\mathfrak{m}$ derart als Unterhalbgruppe einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ auffassen, daß 1. die Elemente von $\mathfrak{m}$ auch reguläre Elemente von $\mathfrak{H}$ sind, 2. zu $\alpha \in \mathfrak{m}$ und $a \in \mathfrak{H}$ stets $a' \in \mathfrak{H}$ und $\alpha' \in \mathfrak{m}$ mit $a'\alpha = \alpha' a$ existieren, so kann $\mathfrak{m}$ in eine Gruppe eingebettet werden. Jede solche Gruppe enthält eine Untergruppe, die isomorph einer gewissen Unterhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist und $\mathfrak{m}$ umfaßt.

Die Elemente A der in Satz 2 genannten Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ können stets in der Form $\alpha^{-1}a$ $(\alpha \in \mathfrak{m}, a \in \mathfrak{H})$ geschrieben werden, da $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist. Dagegen kann man sie im allgemeinen nicht als $\alpha^{-1}\beta$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ schreiben. Vielmehr gilt

Satz 3. *Die Elemente A der in Satz 2 genannten Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ sind dann und nur dann in der Form $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{m}$ darstellbar, wenn zu beliebigen $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ stets $\beta', \alpha' \in \mathfrak{m}$ so existieren, daß*

$$\beta'\alpha = \alpha'\beta.$$

[4]) Zwei Elemente a, b einer Halbgruppe heißen vertauschbar, wenn $ab = ba$. Das *Zentrum* einer Halbgruppe besteht aus genau den Elementen, die mit allen Halbgruppenelementen vertauschbar sind.

[5]) Da die $\alpha \in \mathfrak{m}$ im Zentrum von $\mathfrak{H}$ liegen, entfällt die Unterscheidung von Linksquotienten $\alpha^{-1}a$ und Rechtsquotienten $a\alpha^{-1}$ $(\alpha \in \mathfrak{m}, a \in \mathfrak{H})$.

Beweis. 1. Die Bedingung ist notwendig. Sollen sich die Elemente A in der Form $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ schreiben lassen, so muß offenbar $\beta\alpha^{-1} \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ (α, β beliebig $\in \mathfrak{m}$) auf diese Form gebracht werden können. Es muß also eine Gleichung der Form

$$\beta\alpha^{-1} = \alpha'^{-1}\beta' \qquad \alpha', \beta' \in \mathfrak{m}$$

bestehen, d.h. es muß $\beta', \alpha' \in \mathfrak{m}$ geben mit

$$\beta'\alpha = \alpha'\beta.$$

2. Die genannte Bedingung sei erfüllt. Dann kann man jedes Potenzprodukt aus n Faktoren $\beta_i^{\varepsilon_i}$ ($i = 1, \ldots, n$) auf die Gestalt $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ bringen. Denn für $n = 1$ trifft diese Behauptung offenbar zu wegen

$$\beta_1 = \alpha_1^{-1}(\alpha_1\beta_1), \quad \beta_1^{-1} = (\alpha_2\beta_1)^{-1}\alpha_2;$$

und ist die Behauptung schon für Potenzprodukte von $n \geq 1$ Faktoren bewiesen, so trifft sie auch für Potenzprodukte aus $n+1$ Faktoren $\beta_i^{\varepsilon_i}$ ($i = 1, \ldots, n+1$) zu. Das letztere kann man wie folgt einsehen. In

$$\prod_{i=1}^{n+1} \beta_i^{\varepsilon_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i}\right) \cdot \beta_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}}$$

kann man nach Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i} = \bar{\alpha}_1^{-1}\,\bar{\alpha}_2 \qquad \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in \mathfrak{m}$$

schreiben. Man hat daher

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i}\right)\beta_{n+1} = \bar{\alpha}_1^{-1}\,(\bar{\alpha}_2\beta_{n+1}),$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i}\right)\beta_{n+1}^{-1} = \bar{\alpha}_1^{-1}\,\bar{\alpha}_2\beta_{n+1}^{-1} = (\beta'_{n+1}\bar{\alpha}_1)^{-1}\,\bar{\alpha}'_2 \qquad \beta'_{n+1},\ \bar{\alpha}'_2 \in \mathfrak{m},$$

wobei

$$\beta'_{n+1}\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}'_2\beta_{n+1}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 2. Die Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ ist im allgemeinen echte Unterhalbgruppe der Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$. Auch wenn $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ selbst eine Gruppe ist, braucht nicht notwendig die Relation

$$\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$$

zu gelten.

Beispiel. Man bilde die Quaternionenalgebra $\mathfrak{R}$ über dem Ring $\mathfrak{C}$ der ganzen rationalen Zahlen. $\mathfrak{H}$ sei die multiplikative Halbgruppe der vom Nullelement verschiedenen $r \in \mathfrak{R}$: $\mathfrak{H} = (\mathfrak{R} - \{0\})^\times$; $\mathfrak{m}$ sei entsprechend die multiplikative Halbgruppe der von Null verschiedenen ganzen rationalen Zahlen: $\mathfrak{m} = (\mathfrak{C} - \{0\})^\times$. Dann ist $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ die multiplikative

Gruppe der Quaternionenalgebra über dem Körper der rationalen Zahlen. Dagegen ist $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ dem Typus nach gleich der multiplikativen Gruppe des Körpers der rationalen Zahlen.

§ 3. Topologische und metrische Halbgruppen.

§ 3 enthält die Definition von topologischen und metrischen Halbgruppen. Daneben werden einige für spätere Zwecke wichtige Eigenschaften solcher Strukturen mitgeteilt.

Definition 1. Eine Menge $\mathfrak{H}$ heiße eine *topologische Halbgruppe*, wenn

(i) $\mathfrak{H}$ eine Halbgruppe im Sinne des § 1 („*abstrakte Halbgruppe*") ist.

(ii) $\mathfrak{H}$ ein HAUSDORFF- (T_2-) Raum ist.

(iii) Die Halbgruppenoperation $(a, b) \to ab$ (d.h. die Multiplikation in $\mathfrak{H}$) stetig in beiden Veränderlichen a, b im Sinne der in (ii) geforderten Topologie ist.

Bedingung (iii) besagt dabei: Zu einer beliebigen offenen Umgebung U_{ab} des Punktes $ab \in \mathfrak{H}$ (a, b beliebig $\in \mathfrak{H}$) gibt es stets offene Umgebungen U_a, U_b der Punkte a, b mit

$$U_a U_b \subseteq U_{ab}\ ^{6}).$$

Die obige Definition stammt von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT [1]; HILLE [2] verwendet statt des Terminus „topologische Halbgruppe" den Ausdruck „HAUSDORFFsche Halbgruppe".

Spezielle topologische Halbgruppen sind die topologischen Gruppen und die metrischen Halbgruppen.

Definition 2. Eine Menge $\mathfrak{G}$ heißt eine *topologische Gruppe*, wenn

(i) $\mathfrak{G}$ eine Gruppe („*abstrakte Gruppe*") ist.

(ii) $\mathfrak{G}$ ein HAUSDORFF- (T_2-) oder nur ein FRÉCHET- (T_1-) Raum ist[7]).

(iii) Die Gruppenoperationen, $(a, b) \to ab$ und $a \to a^{-1}$ (d.h. die Multiplikation und die Division in $\mathfrak{G}$), stetig sind im Sinne der in (ii) geforderten Topologie.

Die Stetigkeit der Division bedeutet bekanntlich, daß es zu $a \in \mathfrak{G}$ und zu einer beliebigen offenen Umgebung $U_{(a^{-1})}$ von a^{-1} stets eine offene Umgebung U_a von a gibt mit

$$(U_a)^{-1} \subseteq U_{(a^{-1})}\ ^{6}).$$

Definition 3. Eine *metrische Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ ist eine topologische Halbgruppe, deren Topologie [vgl. Definition 1, (ii)] mittels einer Metrik $|a, b|$ ($a, b \in \mathfrak{H}$) eingeführt wird.

Diese Definition gibt HILLE [2] an.

Bemerkung. Auf Grund der vorstehenden Definition ist also eine (abstrakte) Halbgruppe $\mathfrak{H}$, die eine Metrik $|a, b|$ ($a, b \in \mathfrak{H}$) trägt, nicht

[6]) Sind $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ nichtleere Teilmengen einer Halbgruppe, so bedeutet $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ die Menge aller Produkte h_1h_2 mit $h_1 \in \mathfrak{H}_1$, $h_2 \in \mathfrak{H}_2$. Ist $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Teilmenge einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so versteht man unter $\mathfrak{A}^{-1}$ die Menge aller x aus $\mathfrak{G}$ mit $x^{-1} \in \mathfrak{A}$.

[7]) Falls $\mathfrak{G}$ nur als T_1-Raum vorausgesetzt wird, kann man in Verbindung mit (i) und (iii) zeigen, daß $\mathfrak{G}$ ein regulärer Raum, also ein T_2-Raum ist. (Vgl. hierzu etwa PONTRJAGIN [5], § 16.)

notwendig bereits eine metrische Halbgruppe. Vielmehr muß diese Metrik so beschaffen sein, daß die Multiplikation in $\mathfrak{H}$ stetig ist in beiden Faktoren, daß also

$$\text{Aus } a_n \to a \quad \text{und} \quad b_n \to b \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \text{folgt} \quad a_n b_n \to a b \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

Die Konvergenz (etwa $a_n \to a$) ist dabei im Sinne der Metrik $|a, b|$ zu verstehen.

Die Theorie der topologischen und metrischen Halbgruppen umfaßt offenbar die der abstrakten Halbgruppen, wenn man diese letzteren als diskret topologisierte topologische oder metrische Halbgruppen auffaßt. (Ein topologischer Raum heißt *diskret*, wenn jede Teilmenge offen ist. Die diskrete Topologie eines Raumes erhält man z.B. mittels einer Metrik, indem man

$$|a, a| = 0, \quad |a, b| = 1 \qquad a \neq b$$

setzt.)

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich solche topologische Halbgruppen untersucht, die man als metrische Halbgruppen auffassen kann.

Eine wichtige Klasse von metrischen Halbgruppen sind diejenigen Halbgruppen $\mathfrak{H}$, die eine *invariante Metrik* $|a, b|$, d.h. eine Metrik, für die

$$|\alpha a, \alpha b| = |a, b| = |a\alpha, b\alpha| \qquad a, b, \alpha \in \mathfrak{H},$$

gilt, tragen. Jede Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit invarianter Metrik ist eine metrische Halbgruppe mit Kürzungsregel; Invarianz der Metrik bedeutet demnach eine wesentliche Einschränkung für die zugrunde gelegten Halbgruppen [vgl. a. § 4, Folgerungen 1, 2].

Nach § 1 stellt die Annahme, eine abstrakte Halbgruppe besitze ein Einselement, keine wesentliche Einschränkung dar, da man notfalls eine Halbgruppenidentität adjungieren kann. Bei topologischen Halbgruppen $\mathfrak{H}$ scheinen die Verhältnisse verwickelter zu sein. Enthält $\mathfrak{H}$ nämlich kein Einselement, so handelt es sich nicht nur darum, ein Element zu adjungieren, das in algebraischer Hinsicht die Rolle des Einselements übernehmen kann, sondern es kommen noch topologische Forderungen hinzu, denen man nicht so leicht Genüge leisten kann.

Satz 1. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe ohne Identität; $\mathfrak{H}$ trage eine invariante Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$. Auf der aus $\mathfrak{H}$ durch Adjunktion eines Elementes* **1** *entstehenden Halbgruppe $\mathfrak{H}^*$ mit dem Einselement* **1** *läßt sich dann und nur dann eine invariante Metrik $\|a, b\|$ $(a, b \in \mathfrak{H}^*)$ — und zwar auf genau eine Weise — einführen, daß*

$$\|a, b\| = |a, b| \quad \text{für} \quad a, b \in \mathfrak{H},$$

wenn für beliebige $a, b \in \mathfrak{H}$

$$|a, a b| = |a, b a| . \tag{1}$$

Beweis. 1. Gibt es auf $\mathfrak{H}^*$ eine Metrik $\|a, b\|$ $(a, b \in \mathfrak{H}^*)$ mit den geforderten Eigenschaften, so muß offenbar für alle $a, b \in \mathfrak{H}$

$$|a, b a| = \|a, b a\| = \|\mathbf{1}, b\| = \|a, a b\| = |a, a b|$$

sein.

2. Hat eine Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ die Eigenschaft, daß für alle $a, b \in \mathfrak{H}$

$$|a, ab| = |a, ba|,$$

so gilt für beliebige $b, c, d \in \mathfrak{H}$

$$|c, cb| = |cd, cbd| = |d, bd| = |d, db|.$$

Daher wird durch

$$\|a, b\| = \|b, a\| = \begin{cases} |a, b| & \text{falls} \quad a, b \in \mathfrak{H} \\ |c, cb| & \text{falls} \quad a = \mathbf{1},\ b, c \in \mathfrak{H} \\ |c, c| & \text{falls} \quad a = b = \mathbf{1},\ c \in \mathfrak{H} \end{cases}$$

auf $\mathfrak{H}^* \times \mathfrak{H}^*$ eine eindeutige Funktion definiert. Diese Funktion ist eine invariante Metrik von $\mathfrak{H}^*$, wie man durch einige Rechnungen bestätigen kann. Offenbar ist $\|a, b\|$ $(a, b \in \mathfrak{H}^*)$ *Fortsetzung* von $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$, d.h. es ist

$$\|a, b\| = |a, b| \qquad a, b \in \mathfrak{H}.$$

Daß es keine weitere Metrik von $\mathfrak{H}^*$ gibt, die die auf $\mathfrak{H}$ vorgegebene Metrik in gewünschter Weise fortsetzt, folgt aus 1.

Man beachte, daß (1) nicht die Kommutativität von $\mathfrak{H}$ nach sich zieht. Abschließend sei noch ein Beispiel einer topologischen Halbgruppe behandelt, auf das später mehrfach Bezug genommen werden wird.

Beispiel. Die multiplikative (Halb-)Gruppe der positiven reellen Zahlen wird zu einer topologischen (Halb-)Gruppe mit invarianter Metrik vermöge

$$|a, b| = |\log a - \log b| \qquad a, b \text{ reell}, > 0.$$

Die durch diese Metrik im Raume der positiven reellen Zahlen eingeführte Topologie ist der gewöhnlichen Topologie dieses Raumes[8]) äquivalent, führt also insbesondere zu dem gleichen Offenheitsbegriff. Um das einzusehen, betrachte man die folgenden Mengen

$$U_\varepsilon(a) = \{x : 0 \leq |a - x| < \varepsilon \leq a\},$$
$$V_\eta(a) = \{y : 0 \leq |\log a - \log y| < \eta,\ a, y > 0\}.$$

Eine leichte Rechnung lehrt, daß die Ungleichungen bestehen

$$U_\varepsilon(a) \subseteqq V_\eta(a), \quad 0 < \varepsilon < \operatorname{Min}\{a(e^\eta - 1), a(1 - e^{-\eta})\},$$
$$V_\eta(a) \subseteqq U_\varepsilon(a), \qquad 0 < a \cdot \mathfrak{Sin}\,\eta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man erkennt weiter aus den eben angestellten Überlegungen: Führt man auf einem Unterraum $\mathfrak{R}$ des Raums der positiven reellen Zahlen diejenige Topologie ein, die durch Relativierung aus der gewöhnlichen Topologie des Raumes der positiven reellen Zahlen auf $\mathfrak{R}$ entsteht, so ist diese Topologie äquivalent

[8]) Die gewöhnliche Topologie dieses Raumes hat bekanntlich die Klasse aller offenen Intervalle $(a - c, a + c)$, $0 < c < a$, als eine Basis der offenen Mengen.

der Topologie, die durch die Metrik

$$|a, b| = |\log a - \log b| \qquad a, b \in \mathfrak{R}$$

auf $\mathfrak{R}$ erzeugt wird. Daraus ergibt sich insbesondere, daß die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen bzw. die multiplikative (Halb-)Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ der positiven rationalen Zahlen — beide invariant metrisiert durch $|a, b| = |\log a - \log b|$, wobei $a, b \in \mathfrak{Z}$ bzw. $\in \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ — eine diskrete bzw. eine nichtdiskrete metrische Halbgruppe bildet. Da $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ vom abstrakt-algebraischen Standpunkte die Quotientengruppe von $\mathfrak{Z}$ ist, folgt

Satz 2. *Die Quotienten(halb)gruppe einer diskreten (kommutativen) topologischen Halbgruppe braucht nicht notwendig diskret zu sein.*

§ 4. Invariante Fortsetzung der Metrik von Halbgruppen auf deren Quotientenhalbgruppen.

In §§ 1 bis 3 wurden die wichtigsten Tatsachen über abstrakte und topologische Halbgruppen entwickelt, die zur Behandlung des Hauptproblems der vorliegenden Arbeit benötigt werden. Dieses Hauptproblem ist ein spezielles Einbettungsproblem für metrische Halbgruppen, auf das man durch folgenden Gedankengang geführt wird: Gegeben sei eine metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ (vgl. § 3, Definition 3). $\mathfrak{H}$ als abstrakte Halbgruppe aufgefaßt, möge sich in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbetten lassen [$\mathfrak{m}$ bedeutet wie üblich eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur reguläre Elemente von $\mathfrak{H}$ enthält; vgl. a. § 1, Definition]. Es soll auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eine Metrik definiert werden, so daß

1. $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu einer metrischen Halbgruppe wird[9]);
2. die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in einem noch genauer zu definierenden Sinne (vgl. § 5, Definition) in die metrische Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eingebettet wird.

Diesem keineswegs trivialen *Einbettungsproblem* sind dieser und die folgenden Paragraphen gewidmet. Es wird sich ergeben, daß man unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen über die Metrik von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eine Metrik so finden kann, daß die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt sind. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, zunächst statt der obigen Einbettungsaufgabe das folgende *Fortsetzungsproblem* zu behandeln: Es ist eine auf einer abstrakten Halbgruppe $\mathfrak{H}$ gegebene Metrik auf die Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortzusetzen ($\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ wie oben). *Fortsetzung* einer Metrik $|a_1, b_1|_1$ eines Raumes M_1 auf einen Oberraum M_2 nennt man dabei jede Metrik $|a_2, b_2|_2$ von M_2, für die

$$|a_1, b_1|_1 = |a_1, b_1|_2 \qquad a_1, b_1 \in M_1$$

gilt.

Der Inhalt des § 4 bezieht sich vorwiegend auf das eben aufgeworfene Fortsetzungsproblem. Die hier gewonnenen Resultate werden in § 5 zur Lösung des Einbettungsproblems benutzt.

[9]) Man beachte: eine abstrakte Halbgruppe mit einer Metrik ist im allgemeinen noch keine metrische Halbgruppe.

Es liegt nahe, zuerst die Fortsetzung einer *invarianten* Metrik $|a, b|$ von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu versuchen. Wie schon in § 3 bemerkt, kann es invariante Metriken nur auf regulären Halbgruppen geben. Für nicht notwendig reguläre Halbgruppen empfiehlt es sich, ein Analogon des Begriffs „invariante Metrik" einzuführen.

Definition. $\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit einer Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$. Die Metrik $|a, b|$ heiße *bezüglich* $\mathfrak{m}$ *linksinvariant*, wenn für beliebige $a, b \in \mathfrak{H}$ und für alle $\alpha \in \mathfrak{m}$

$$|\alpha a, \alpha b| = |a, b|$$

gilt. Entsprechend sind die Begriffe *bezüglich* $\mathfrak{m}$ *rechtsinvariant*, *bezüglich* $\mathfrak{m}$ *invariant* zu definieren.

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit einer bezüglich einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$ linksinvarianten Metrik. Dann sind die Elemente von $\mathfrak{m}$ notwendig linksseitig reguläre Elemente von $\mathfrak{H}$*[10]*. Eine analoge Aussage gilt für bezüglich $\mathfrak{m}$ rechtsinvariante und bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Metriken auf $\mathfrak{H}$.*

Beweis. (Nur für den ersten Teil des Hilfssatzes.) Sei

$$\bar{\alpha} a = \bar{\alpha} b \qquad \bar{\alpha} \in \mathfrak{m},\ a, b \in \mathfrak{H}.$$

Dann hat man

$$|a, b| = |\bar{\alpha} a, \bar{\alpha} b| = 0,$$

$$a = b.$$

Folgerung 1. Eine Halbgruppe mit invarianter Metrik ist regulär.

Hilfssatz 2. *Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ trage eine Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$, die bezüglich einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$ invariant ist. Dann gilt:*

a) Aus $\alpha_n \to a$ und $b_n \to \beta$ für $n \to \infty$ folgt $\alpha_n b_n \to a\beta$ für $n \to \infty$.

b) Aus $a_n \to \alpha$ und $\beta_n \to b$ für $n \to \infty$ folgt $a_n \beta_n \to \alpha b$ für $n \to \infty$.

Dabei sind $\alpha_n, \beta_n, \alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a_n, b_n, a, b \in \mathfrak{H}$, und die Konvergenz (z. B. $a_n \to \alpha$) ist im Sinne der vorgegebenen Metrik zu verstehen.

Beweis. Die Richtigkeit der Behauptung a) erkennt man sofort aus

$$|\alpha_n b_n, a\beta| \leq |\alpha_n b_n, \alpha_n \beta| + |\alpha_n \beta, a\beta| = |b_n, \beta| + |\alpha_n, a|.$$

b) wird ganz entsprechend bewiesen.

Folgerung 2. Sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt, so bildet die Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$ eine metrische Halbgruppe mit invarianter Metrik. Speziell ist also jede Halbgruppe mit invarianter Metrik eine metrische Halbgruppe[11]).

Satz 1. *$\mathfrak{H}$ sei eine in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbettbare Halbgruppe (vgl. § 1, Definition, § 2, Satz 1). $\mathfrak{H}$ trage eine bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariante Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$. Diese Metrik läßt sich genau dann*

[10]) Das heißt sie sind solche Elemente $\alpha \in \mathfrak{H}$, die der Kürzungsregel (1) aus § 1 genügen.

[11]) Der zweite Teil von Folgerung 2 findet sich im wesentlichen bei GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT ([1], unmittelbar vor Satz 15).

— und zwar auf eine und nur eine Weise — zu einer Metrik auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H};\mathfrak{m})$ *fortsetzen, die bezüglich* $\mathfrak{m}$ *linksinvariant ist, wenn für jedes* $x^\varkappa \in \mathfrak{H}$ *mit* $x^\varkappa \alpha \in \mathfrak{H}$ (α *ein gewisses Element aus* $\mathfrak{m}$) *die Gleichung*

$$|x^\varkappa a, x^\varkappa b| = |a, b| \qquad a, b \text{ beliebig } \in \mathfrak{H}$$

erfüllt ist. Die bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariante Fortsetzung *von* $|a, b|$ *wird gegeben durch*

$$\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = |\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b| = |xa, yb|, \qquad \text{wobei} \qquad x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}.$$

Beweis. a) Angenommen, die gewünschte Fortsetzung sei möglich. Wählt man zu $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ $x, y \in \mathfrak{H}$ so, daß $x\alpha = y\beta = \bar{\mu} \in \mathfrak{m}$, so gilt offenbar

$$\begin{aligned}\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| &= \|(x\alpha)^{-1}(xa), (y\beta)^{-1}(yb)\| \\ &= \|\bar{\mu}(x\alpha)^{-1}(xa), \bar{\mu}(y\beta)^{-1}(yb)\| = \|xa, yb\| = |xa, yb|.\end{aligned}$$

Es ist demnach höchstens eine solche Fortsetzung möglich. Weiter muß noch

$$\begin{aligned}|a, b| = \|a, b\| &= \|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b\| \\ &= \|(x^\varkappa\alpha)^{-1}(x^\varkappa a), (x^\varkappa\alpha)^{-1}(x^\varkappa b)\| = \|x^\varkappa a, x^\varkappa b\| = \|x^\varkappa a, x^\varkappa b|\end{aligned}$$

bei beliebigen $a, b \in \mathfrak{H}$, beliebigem $\alpha \in \mathfrak{m}$ und $x^\varkappa \in \mathfrak{H}$ mit $x^\varkappa\alpha \in \mathfrak{m}$ gelten. Das liefert die Bedingung

$$|a, b| = |x^\varkappa a, x^\varkappa b| \qquad x^\varkappa\alpha \in \mathfrak{m}.$$

b) Die eben erhaltene (notwendige) Bedingung sei erfüllt. Sie reicht auch hin, die Metrik $|a, b|$ in gewünschter Weise fortzusetzen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Zunächst hat man

$$|xa, yb| = |\bar{x}a, \bar{y}b|,$$

wenn $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathfrak{H}$ und wenn

$$x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}, \qquad \bar{x}\alpha = \bar{y}\beta \in \mathfrak{m}.$$

Man wähle nämlich $\mu \in \mathfrak{m}$, $n \in \mathfrak{H}$ so, daß $\mu(x\alpha) = n(\bar{x}\alpha) \in \mathfrak{m}$. Dann folgt

$$\begin{gathered}\mu x = n\bar{x}, \qquad \mu y = n\bar{y}, \\ |xa, yb| = |\mu xa, \mu yb| = |n\bar{x}a, n\bar{y}b| = |\bar{x}a, \bar{y}b|,\end{gathered}$$

weil ja $n(\bar{x}\alpha) \in \mathfrak{m}$ und $(\bar{x}\alpha) \in \mathfrak{m}$.

Weiterhin ergibt sich: Aus

$$\alpha^{-1}a = \alpha_1^{-1}a_1, \qquad \beta^{-1}b = \beta_1^{-1}b_1, \qquad x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}, \qquad x_1\alpha_1 = y_1\beta_1 \in \mathfrak{m}$$

folgt

$$|xa, yb| = |x_1a_1, y_1b_1|.$$

Beim Beweis beachte man, daß es nach dem eben Bewiesenen genügt, diese Gleichung nur für ein spezielles Quadrupel $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ mit $\tilde{x}\alpha = \tilde{y}\beta \in \mathfrak{m}$, $\tilde{x}_1\alpha_1 = \tilde{y}_1\beta_1 \in \mathfrak{m}$ zu verifizieren. Nach § 2, Hilfssatz, kann man ein solches Quadrupel stets so wählen, daß überdies

$$\tilde{x}\alpha = \tilde{y}\beta = \tilde{x}_1\alpha_1 = \tilde{y}_1\beta_1 \in \mathfrak{m}.$$

Wegen § 1, Satz 4, folgt hieraus und aus den Gleichungen

$$\alpha^{-1}a = \alpha_1^{-1}a_1, \quad \beta^{-1}b = \beta_1^{-1}b_1,$$

daß

$$\tilde{x}a = \tilde{x}_1 a_1, \quad \tilde{y}b = \tilde{y}_1 b_1,$$

also auch

$$|\tilde{x}a, \tilde{y}b| = |\tilde{x}_1 a_1, \tilde{y}_1 b_1|.$$

Aus diesen Überlegungen erkennt man, daß durch

$$(1) \qquad \|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = |xa, yb| \qquad x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$$

eine eindeutige Funktion der Elemente von $\mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$ definiert wird. Die Funktion (1) ist eine Metrik von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$. Man braucht nur nachzuprüfen, daß

(2) aus $\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = 0$ folgt $\alpha^{-1}a = \beta^{-1}b$ (und umgekehrt),

$$(3) \qquad \|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| \leq \|\alpha^{-1}a, \gamma^{-1}c\| + \|\gamma^{-1}c, \beta^{-1}b\|.$$

Die Richtigkeit von (2) entnimmt man sofort aus (1) und aus § 1, Satz 4, während sich (3) auf Grund der Definition der Metrik $\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\|$ in der Form

$$(3') \qquad |xa, yb| \leq |xa, zc| + |zc, yb|$$

schreiben läßt, wenn für $x, y, z \in \mathfrak{H}$ noch

$$x\alpha = y\beta = z\gamma \in \mathfrak{m}$$

gilt, was nach § 2, Hilfssatz, durch geeignete Wahl der x, y, z stets erreicht werden kann. (3') ist offenbar richtig.

Ferner bestehen die Gleichungen

$$(4') \qquad \|\delta A, \delta B\| = \|A, B\| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l, \ \delta \in \mathfrak{m},$$

$$(4'') \qquad \|\gamma^{-1}A, \gamma^{-1}B\| = \|A, B\| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l, \ \gamma \in \mathfrak{m}.$$

Um (4'), (4'') zu verifizieren, stelle man A, B als Linksquotienten mit gleichem Linksnenner dar, $A = \alpha^{-1}a$, $B = \alpha^{-1}b$. (Nach § 2, Hilfssatz und nach § 1, Satz 3 kann man zwei Linksquotienten durch „Erweitern" stets auf gleichen Linksnenner bringen.) Man bestimme zu $\alpha, \delta \in \mathfrak{m}$ $d' \in \mathfrak{H}$ und $\alpha' \in \mathfrak{m}$ mit $d'\alpha = \alpha'\delta$; wegen

$$\delta\alpha^{-1}a = \alpha'^{-1}d'a, \quad \delta\alpha^{-1}b = \alpha'^{-1}d'b$$

hat man dann

$$\|\delta(\alpha^{-1}a), \delta(\alpha^{-1}b)\| = \|\alpha'^{-1}d'a, \alpha'^{-1}d'b\| = |d'a, d'b| = \|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b\|,$$

also auch (4'), während (4'') sofort erhalten wird aus

$$\|\gamma^{-1}(\alpha^{-1}a), \gamma^{-1}(\alpha^{-1}b)\| = \|(\alpha\gamma)^{-1}a, (\alpha\gamma)^{-1}b\| = |a, b| = \|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b\|.$$

Schließlich muß noch die Metrik $\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\|$ als Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ erkannt werden. Um nachzuweisen, daß

$$\|a, b\| = |a, b| \qquad a, b \in \mathfrak{H},$$

braucht man nur auf der linken Seite die Elemente $a, b \in \mathfrak{H}$ als Linksquotienten zu schreiben (die Metrik auf $\mathfrak{Q}_l$ war ja für die „Linksquotientendarstellung" $\alpha^{-1}a$ der Elemente $A \in \mathfrak{Q}_l$ definiert-worden). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man die Darstellungen $\alpha^{-1}(\alpha a), \alpha^{-1}(\alpha b)$ für a, b benutzen. Die Behauptung folgt dann aus

$$\|\alpha^{-1}(\alpha a), \alpha^{-1}(\alpha b)\| = |\alpha a, \alpha b| = |a, b|.$$

Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

Da die in Satz 1 eingeführte Metrik $\|A, B\|$ auf $\mathfrak{Q}_l$ $(A, B \in \mathfrak{Q}_l)$ Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ auf $\mathfrak{H}$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ ist, kann man

$$\|A, B\| = |A, B| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l$$

schreiben. Diese Schreibweise wird im folgenden stets benutzt.

Folgerung 3. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, und $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ lasse sich bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariant auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortsetzen. Dann gilt für diese Fortsetzung $|A, B|$ $\left(A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})\right)$ sogar

$$|AA, AB| = |A, B| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}),\ A \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m}),$$

d.h. $|A, B|$ ist bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ linksinvariant (vgl. zu dieser Bezeichnung § 2, Satz 2).

Beweis. Die Elemente A können als Potenzprodukte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ dargestellt werden. Die Behauptung folgt daher unter Benutzung der Gln. (4′) und (4″).

Für eine bezüglich $\mathfrak{m}$ *invariante* Metrik auf $\mathfrak{H}$ lassen sich die eben gewonnenen Resultate verschärfen:

Satz 2. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe, die in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbettbar ist. Ferner trage $\mathfrak{H}$ eine bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$. Diese Metrik läßt sich genau dann — und zwar auf eine und nur eine Weise — zu einer Metrik von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortsetzen, die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant ist, wenn für jedes $x^{\varkappa} \in \mathfrak{H}$ mit $x^{\varkappa}\alpha \in \mathfrak{m}$ und für jedes $y^{\varkappa} \in \mathfrak{H}$ mit $\beta y^{\varkappa} \in \mathfrak{m}$ $(\alpha, \beta$ gewisse Elemente aus $\mathfrak{m})$ die Gleichung*

$$|x^{\varkappa}a, x^{\varkappa}b| = |a, b| = |a\,y^{\varkappa}, b\,y^{\varkappa}| \qquad a, b \text{ beliebig } \in \mathfrak{H}$$

erfüllt ist. Die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzung *von $|a, b|$ wird wie in Satz 1 gegeben durch*

$$\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = |\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b| = |xa, yb|, \qquad \text{wobei} \qquad xa = y\beta \in \mathfrak{m}.$$

Beweis. a) Ist die Fortsetzung in der gewünschten Weise möglich, so muß wegen

$$b\beta^{-1} = (by^{\varkappa})(\beta y^{\varkappa})^{-1}, \qquad \beta y^{\varkappa} \in \mathfrak{m}$$

(vgl. § 1, Satz 3)

$$|a, b| = |a\beta^{-1}, b\beta^{-1}| = |a\,y^{\varkappa}(\beta y^{\varkappa})^{-1}, b\,y^{\varkappa}(\beta y^{\varkappa})^{-1}| = |a\,y^{\varkappa}, b\,y^{\varkappa}|$$

gelten, wenn a, b beliebig aus $\mathfrak{H}$, β beliebig aus $\mathfrak{m}$ und $\beta y^{\varkappa}$ aus $\mathfrak{m}$. Wegen Satz 1 ist damit die in Satz 2 angegebene Bedingung als notwendig für eine Fortsetzung von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ erkannt, die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant ist.

b) Die eben erwähnte Bedingung sei erfüllt. Nach Satz 1 kann man dann die Metrik $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariant auf $\mathfrak{Q}_l$ fortsetzen, und zwar besteht der oben (Satz 1, Satz 2) angegebene Zusammenhang zwischen den Metriken $|a, b|$ und $|A, B|$ $(a, b \in \mathfrak{H}, A, B \in \mathfrak{Q}_l)$. Es ist nur noch festzustellen, daß

$$(5') \qquad |A, B| = |A\delta, B\delta| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l,\ \delta \in \mathfrak{m}$$

gilt. Diese Gleichung kann man sofort verifizieren, indem man A und B als Linksquotienten darstellt.

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 4. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, und $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ lasse sich bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortsetzen. Dann gilt für die Fortsetzung $|A, B|$ $\left(A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})\right)$ sogar

$$|AA, AB| = |A, B| = |AA, BA| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}),\ A \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m}),$$

d.h. $|A, B|$ ist bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant.

Beweis. Aus (5') folgt noch

$$(5'') \qquad |A, B| = |A\gamma^{-1}, B\gamma^{-1}| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{m}),\ \gamma \in \mathfrak{m},$$

weil nach (5') offenbar

$$|A, B| = |A(\gamma^{-1}\gamma), B(\gamma^{-1}\gamma)| = |A\gamma^{-1}, B\gamma^{-1}|.$$

Da die Elemente A aus $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ als Potenzprodukte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ aufgefaßt werden können, schließt man wegen (5') und (5'') auf die Behauptung.

Satz 3. *Erfüllt eine Metrik $|a, b|$ auf $\mathfrak{H}$ neben den in Satz 2 genannten Bedingungen für eine bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzbarkeit auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ noch die folgenden*

$$|ca, cb| \leq K|a, b|$$

und

$$|ac, bc| \leq K|a, b|$$

(a, b, c beliebige Elemente aus $\mathfrak{H}$, K eine reelle Konstante ≥ 1), so gilt für beliebige $A, B, C \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$

$$|CA, CB| \leq K|A, B|$$

und

$$|AC, BC| \leq K|A, B|.$$

Beweis. Aus den Sätzen 1 und 2 folgt, daß man die beiden letzten Ungleichungen nur für $C = c \in \mathfrak{H}$, $A = \alpha^{-1}a$, $B = \beta^{-1}b$ zu bestätigen braucht. Dabei kann man noch $\alpha = \beta$ voraussetzen (vgl. den Beweis des Satzes 1). Wählt man nun $c' \in \mathfrak{H}$, $\alpha' \in \mathfrak{m}$ mit $c'\alpha = \alpha' c$, so erhält man

$$|c(\alpha^{-1}a), c(\alpha^{-1}b)| = |\alpha'^{-1}(c'a), \alpha'^{-1}(c'b)| = |c'a, c'b| \leq K|a, b| = K|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b|.$$

Damit ist die erste der Ungleichungen verifiziert. Bei der zweiten schließt man ähnlich.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Sätze enthalten wichtige Einbettungsaussagen über metrische Halbgruppen, unter anderem einen Satz von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT über die Einbettung metrischer Halbgruppen in Quotientengruppen ([*1*], Satz 15). In § 5 soll die Bedeutung der obigen Sätze für das Einbettungsproblem herausgearbeitet werden.

§ 5. Deutung der Ergebnisse aus § 4 als Einbettungsaussagen über metrische Halbgruppen.

Die Sätze des § 4, die sich auf die invariante Fortsetzung einer Metrik $|a, b|$ einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ auf eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ beziehen, liefern eine Methode zur Einbettung gewisser metrischer Halbgruppen und können zur Lösung des Einbettungsproblems aus § 4 herangezogen werden. Das soll in § 5 gezeigt werden.

Definition. Eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ heiße in eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{J}$ *einbettbar*, wenn die folgenden Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind:

(i) $\mathfrak{H}$ ist als abstrakte Halbgruppe in $\mathfrak{J}$ einbettbar[12]); $\mathfrak{J}$ enthält also eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{H}^*$ mit

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}^* \qquad \mathfrak{H} \cap \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{H}^*.$$

(ii) Ist σ der von $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}^*$ führende Isomorphismus [vgl. (i)],

$$\mathfrak{H}\sigma = \mathfrak{H}^*,$$

so soll die Abbildung σ zugleich eine Homöomorphie der Räume $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ vermitteln. Dabei ist $\mathfrak{H}^*$ als Relativraum von $\mathfrak{J}$ zu topologisieren.

Speziell heiße eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{J}$ *eingebettet*, wenn in (i), (ii) die abstrakten Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ identisch sind. Die Termini „$\mathfrak{H}$ läßt sich in $\mathfrak{J}$ einbetten", „$\mathfrak{H}$ kann in $\mathfrak{J}$ eingebettet werden" sollen wie bei abstrakten Halbgruppen verwendet werden[12]).

Die Einbettung abstrakter Halbgruppen ordnet sich der obigen Definition unter, wenn man abstrakte Halbgruppen als diskret topologisierte topologische Halbgruppen auffaßt.

Gegeben seien die metrischen Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$. Wenn $\mathfrak{H}$ als abstrakte Halbgruppe Unterhalbgruppe der abstrakten Halbgruppe $\mathfrak{J}$ ist und wenn die Metrik von $\mathfrak{J}$ Fortsetzung der Metrik von $\mathfrak{H}$ ist, so ist die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ im Sinne der vorstehenden Definition in die metrische Halbgruppe $\mathfrak{J}$ eingebettet. Dies läßt sich leicht zeigen.

Hilfssatz 1. *Jede (abstrakte) Gruppe mit invarianter Metrik ist eine topologische Gruppe.*

[12]) Vgl. § 2, Fußnote 2.

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ eine invariante Metrik auf $\mathfrak{G}$, so muß nach § 4, Folgerung 2 die Gruppenmultiplikation stetig sein. Daß auch die Division, $a \to a^{-1}$ $(a \in \mathfrak{G})$, stetig ist, erkennt man sofort aus

$$|a, b| = |a^{-1}, b^{-1}|.$$

Hilfssatz 2. *Wenn eine (abstrakte) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eine Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ trägt, für die*

$$|ca, cb| \leq K|a, b|$$

und

$$|ac, bc| \leq K|a, b|$$

gilt (K eine positive reelle Konstante, a, b, c beliebig $\in \mathfrak{H}$), so ist $\mathfrak{H}$ eine metrische Halbgruppe.

Beweis. Konvergieren die Folgen $\{a_n\}$ bzw. $\{b_n\}$ gegen a bzw. gegen b im Sinne der vorgegebenen Metrik $(a_n, b_n, a, b \in \mathfrak{H})$, so konvergiert die Folge $\{a_n b_n\}$ gegen ab. Wegen der Dreiecksungleichung hat man nämlich

$$|a_n b_n, ab| \leq |a_n b_n, a_n b| + |a_n b, ab| \leq K(|b_n, b| + |a_n, a|).$$

Die Sätze aus § 4 sollen nun als Einbettungsaussagen über metrische Halbgruppen gedeutet werden.

Wenn in § 4, Satz 1 oder § 4, Satz 2 $\mathfrak{H}$ kommutativ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{H}$ sind, so erhält man

Satz 1. *Jede kommutative reguläre topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit einer invarianten Metrik $|a, b|$ läßt sich in die* Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ *derart einbetten, daß $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik wird, wobei diese Metrik $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ die invariante Fortsetzung der Metrik von $\mathfrak{H}$ ist und mit dieser zusammenhängt gemäß*

$$\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right| = |\beta a, \alpha b| \qquad \alpha, \beta, a, b \in \mathfrak{H}.$$

Beweis. Nach § 4, Satz 2 ist die Metrik $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ die bezüglich $\mathfrak{H}$ invariante Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ von $\mathfrak{H}$ auf die Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$. $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ muß nach § 4, Folgerung 4 bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{H})$[13]) invariante Fortsetzung von $|a, b|$ sein. Wegen

$$\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{H}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$$

ist $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ die invariante Fortsetzung von $|a, b|$ auf die Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$. In diese ist offenbar die metrische Halbgruppe eingebettet.

Bemerkung 1. Satz 1 enthält eine Verallgemeinerung der wesentlichsten Teile des in § 4 erwähnten Satzes von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT ([1], Satz 15). Diese Autoren können den Schluß, daß eine metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ von der in Satz 1 genannten Art in ihre Quotientengruppe einbettbar ist,

[13]) Vgl. § 2, Satz 2.

nur unter gewissen Zusatzvoraussetzungen ziehen, die durch das in [1] verwendete Beweisverfahren bedingt zu sein scheinen. Eine Besprechung dieses Satzes von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT sowie seiner Beweisidee erfolgt in § 6.

Satz 1 läßt sich sogleich von kommutativen regulären Halbgruppen auf die allgemeinsten Halbgruppen ausdehnen, die in Linksquotientengruppen (algebraisch) einbettbar sind, nämlich auf die sog. „ORE*schen Halbgruppen*" (vgl. § 2, Bemerkung 1).

Satz 2. *Jede* ORE*sche topologische Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *mit einer invarianten Metrik* $|a, b|$ *läßt sich in die Linksquotientengruppe* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ *derart einbetten, daß* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ *eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik wird, wobei diese Metrik* $|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b|$ *die invariante Fortsetzung der Metrik von* $\mathfrak{H}$ *ist und mit dieser zusammenhängt gemäß*

$$|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b| = |\beta' a, \alpha' b|, \quad \text{wobei} \quad \beta'\alpha = \alpha'\beta$$

und $\alpha, \alpha', \beta, \beta', a, b \in \mathfrak{H}$.

Beweis. Der Beweis des Satzes 1 läßt sich fast wörtlich übertragen.

Satz 3. $\mathfrak{m}$ *sei eine Halbgruppe von der in § 2, Folgerung 2 genau beschriebenen Art. Weiterhin sei* $\mathfrak{m}$ *eine topologische Halbgruppe mit einer invarianten Metrik* $|\alpha, \beta|$. *Unter Benutzung der in § 2, Folgerung 2 verwendeten Bezeichnungen gilt: Wenn die Metrik* $|\alpha, \beta|$ *sich auf* $\mathfrak{H}$ *so fortsetzen läßt, daß diese Fortsetzung bezüglich* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ *invariant ist, so kann man die metrische Halbgruppe* $\mathfrak{m}$ *in* $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ *derart einbetten, daß* $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ *eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik* $|A, B|$ *wird, wobei* $|A, B|$ *invariante Fortsetzung von* $|\alpha, \beta|$ *ist.*

Beweis. Läßt sich die Metrik $|\alpha, \beta|$ von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{H}$ so fortsetzen, daß diese Fortsetzung $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant ist, so sind die in § 4, Satz 2 aufgeführten (notwendigen und) hinreichenden Bedingungen für die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzbarkeit von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ erfüllt; die Elemente $x^\times, y^\times \in \mathfrak{H}$ mit $x^\times\alpha, \beta y^\times \in \mathfrak{m}$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ sind nämlich spezielle Elemente von $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$, da sich $x^\times, y^\times$ auch in der Form

$$x^\times = \mu\alpha^{-1}, \quad y^\times = \beta^{-1}\nu \qquad \mu, \nu \text{ geeignet } \in \mathfrak{m}$$

schreiben lassen. Aus § 4, Folgerung 4 erkennt man, daß die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzung von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ sogar bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant ist. Durch diesen Fortsetzungsprozeß wird insbesondere die invariante Metrik $|\alpha, \beta|$ von der Halbgruppe $\mathfrak{m}$ auf die Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant fortgesetzt. Wegen Hilfssatz 2 wird $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ dadurch zu einer topologischen Gruppe; in diese ist die metrische Halbgruppe $\mathfrak{m}$ eingebettet.

Satz 4. $\mathfrak{H}$ *sei eine Halbgruppe, die in eine Linksquotientenhalbgruppe* $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *einbettbar ist (vgl. § 1, Definition, § 2, Satz 1). Ferner trage* $\mathfrak{H}$ *eine bezüglich* $\mathfrak{m}$ *invariante Metrik* $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ *mit*

$$|ca, cb| \leq K|a, b|, \quad |ac, bc| \leq K|a, b|$$

(a, b, c beliebig $\in \mathfrak{H}$, K eine reelle Konstante ≥ 1). Ist diese Metrik sogar bezüglich $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ (vgl. § 2, Satz 2) invariant, so läßt sie sich bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ so fortsetzen, daß

a) $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu einer metrischen Halbgruppe wird, in die die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$[14]) eingebettet ist;

b) durch den Fortsetzungsprozeß auch die metrische Halbgruppe $\mathfrak{m}$ in die topologische Gruppe mit invarianter Metrik $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ eingebettet wird ($\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ wird so Unterhalbgruppe der metrischen Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$);

c) für die Fortsetzung von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$

$$|CA, CB| \leq K|A, B|, \quad |AC, BC| \leq K|A, B|$$

gilt, wenn A, B, C beliebig $\in \mathfrak{Q}_l$ und K die obige Konstante sind.

Beweis. Wie bereits im Beweis des Satzes 3 festgestellt, sind unter den Voraussetzungen des Satzes 4 die (notwendigen und) hinreichenden Bedingungen für die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzbarkeit der Metrik $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l$ erfüllt (vgl. auch § 4, Satz 2). b) folgt aus Satz 3, c) aus § 4, Satz 3 und schließlich a) aus dem bereits Bewiesenen und aus Hilfssatz 2.

Bemerkung 2. Ist in Satz 4 $\mathfrak{m}$ eine ORESche Halbgruppe (vgl. § 2, Bemerkung 1), so braucht man nicht zu fordern, daß $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant ist. Vielmehr genügt es zu verlangen, daß $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant ist. Die Behauptungen a), b) und c) des Satzes 4 gelten auch dann noch, wie ich in meiner Dissertation, § 6, Satz 4, gezeigt habe (vgl. Einleitung, letzter Absatz).

Die Sätze 1 bis 4 dieses Paragraphen geben Teillösungen des in § 4 formulierten Einbettungsproblems. Man erkennt aus diesen Sätzen, daß das einfache Verfahren, eine Metrik einer Halbgruppe invariant auf eine Quotientenhalbgruppe fortzusetzen zu weitreichenden Resultaten führt. In § 6 soll ein anderes Einbettungsverfahren für metrische Halbgruppen besprochen werden, das auf ganz anderen Gedanken beruht und weniger weit reicht.

§ 6. Ein Satz von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT.

Abschließend soll über ein Verfahren von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT zur Einbettung kommutativer Halbgruppen mit invarianter Metrik in Quotientengruppen referiert und dieses Verfahren mit der Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik (vgl. § 5) verglichen werden. Es wurde bereits erwähnt, daß dem von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT in [1], Satz 15 angegebenen Verfahren ganz andere Gedanken zugrunde liegen als der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Einbettungsmethode.

In [1] werden unter anderem kommutative reguläre Halbgruppen $\mathfrak{H}$ mit Einselement $e = 1$ betrachtet. Diese sind einbettbar in ihre sog. „Quotienten-

[14]) Nach Hilfssatz 2 ist $\mathfrak{H}$ eine metrische Halbgruppe.

strukturen" $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$[15]). Setzt man noch voraus, daß eine solche Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eine invariante Metrik $d(a, b)$ $(a, b\in\mathfrak{H})$ trägt, so stellt $\mathfrak{H}$ nach § 4, Folgerung 2 eine metrische Halbgruppe dar. Es handelt sich darum, auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ eine invariante Metrik so zu definieren, daß $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ zu einer topologischen Gruppe wird, in die die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ einbettbar ist (vgl. § 5, Definition). Die Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik läßt sich offenbar sofort auf den vorliegenden Fall übertragen. GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT gehen anders vor: Sie definieren zunächst eine „Norm" $\|\overline{(\alpha, a)}\|$ in $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$:

$$\|\overline{(\alpha, a)}\| = \inf_{(\alpha', a')\, R\, (\alpha, a)} \big(d(\alpha', e) + d(a', e)\big) \qquad \alpha, \alpha', a, a' \in \mathfrak{H},$$

nutzen dabei also die Voraussetzung $e = \mathbf{1}\in\mathfrak{H}$ wesentlich aus[16]). Weiterhin setzen sie

$$D\big(\overline{(\alpha, a)}, \overline{(\beta, b)}\big) = \|\overline{(\alpha, a)}\cdot\overline{(\beta, b)}^{-1}\| = \|\overline{(\alpha b, a\beta)}\|.$$

$D\big(\overline{(\alpha, a)}, \overline{(\beta, b)}\big)$ erweist sich als invariante Metrik auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$. Läßt sich die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ (Metrik d) in die topologische Gruppe $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ (Metrik D) einbetten? In [*1*] wird diese Frage nur unter einer Zusatzvoraussetzung bejahend beantwortet: $\boldsymbol{\Phi}$ bezeichne die kanonische Abbildung von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$, d.h. es sei

$$\boldsymbol{\Phi}\big((\alpha, a)\big) = \overline{(\alpha, a)} \qquad \alpha, a\in\mathfrak{H}.$$

Dann heißt die Relation R (vgl. Fußnote 15) *offen*, wenn für jede offene Menge U von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ die „Saturation" $\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}(U)$ eine offene Menge in $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ darstellt. Dabei ist $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ als Produktraum topologisiert und $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ ist die zu $\boldsymbol{\Phi}$ inverse Abbildung.

Dann gilt der folgende Satz, der in anderer Formulierung in [*1*], Satz 15 enthalten ist.

---

[15]) Die *Quotientenstruktur* $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ einer kommutativen regulären Halbgruppe $\mathfrak{H}$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation R

$$(\alpha, a)\, R\, (\beta, b) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \alpha b = \beta a \quad (\alpha, \beta, a, b\in\mathfrak{H}).$$

Ist $\overline{(\alpha, a)}$ das Symbol für die (R-) Äquivalenzklasse von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, in der (α, a) liegt, und wird die Multiplikation solcher Äquivalenzklassen definiert durch

$$\overline{(\alpha, a)}\,\overline{(\beta, b)} = \overline{(\alpha\beta, a b)} \qquad \alpha, \beta, a, b\in\mathfrak{H},$$

so wird $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ zu einer Gruppe, die der Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ isomorph ist.

[16]) Nach § 3, Satz 1 kann man bei einer kommutativen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit einer invarianten Metrik stets voraussetzen, daß $\mathfrak{H}$ ein Einselement enthält. Da diese Voraussetzung bei allgemeineren Halbgruppen eine Einschränkung darstellt (s. § 3, Satz 1), ist es durchaus wünschenswert, ein Einbettungsverfahren zu kennen, das von der Existenz eines Einselements in $\mathfrak{H}$ keinen Gebrauch macht. Ein solches Verfahren ist die Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik.

Satz (GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT [1], Satz 15). *Gegeben sei eine kommutative reguläre Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement $e=1$ und mit einer invarianten Metrik $d(a, b)$. Unter Benutzung der obigen Bezeichnungen gilt dann:*

a) Durch

$$D\left(\overline{(\alpha, a)}, \overline{(\beta, b)}\right) = \|\overline{(\alpha, a)} \cdot \overline{(\beta, b)}^{-1}\| = \|\overline{(\alpha b, a\beta)}\|$$

läßt sich auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ eine invariante Metrik D einführen, so daß $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ zu einer topologischen Gruppe wird.

b) $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ (mit der Metrik D) ist genau dann diskret, wenn $\mathfrak{H}$ (mit der Metrik d) diskret ist.

c) Ist R offen, so kann die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ (Metrik d) eingebettet werden in eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik[17]).

Ein entsprechender Satz kann statt für $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ für die zu $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ isomorphe Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ ausgesagt werden, wenn man in dieser

$$\left\|\frac{a}{\alpha}\right\| = \inf_{(\alpha', a')\, R\, (\alpha, a)} \left(d(\alpha', e) + d(a', e)\right) \qquad \alpha, \alpha', a, a' \in \mathfrak{H},$$

$$D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right) = \left\|\left(\frac{a}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{b}{\beta}\right)^{-1}\right\| = \left\|\frac{a\beta}{\alpha b}\right\|$$

setzt. Insbesondere bleibt der Wortlaut der Behauptung c) erhalten, wenn man [17]) durch [18]) ersetzt.

Teil a) des obigen Satzes ist als Hilfssatz zum Beweis der Behauptung c) anzusehen, da man ja auf einfachere Weise eine invariante Metrik D_0 auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ [bzw. auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$] einführen kann als durch die Definition der Metrik D; man setze etwa

$$D_0(A, B) = 1 \quad \text{für} \quad A \neq B \qquad A, B \in (\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R \ \left(\text{bzw. } \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{H})\right),$$

$$D_0(A, A) = 0 \qquad\qquad A \in (\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R \ \left(\text{bzw. } \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{H})\right).$$

b) bezieht sich auf eine Eigenschaft der speziellen Metrik D; darauf wird noch zurückzukommen sein. c) ist die eigentliche Aussage des Satzes. Da c) aus § 5, Satz 1 entnommen werden kann, ist der obige Satz von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT im wesentlichen auch mittels der Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik ableitbar.

Es wäre denkbar, daß das in [1], Satz 15 entwickelte Metrisierungsverfahren — bei Anwendung auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ statt $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ — für kommutative reguläre Halbgruppen $\mathfrak{H}$ mit Einselement, einer invarianten Metrik und offener Relation R zu derselben Topologisierung von $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ führt wie die in §§ 4 bis 5 dargestellte Methode durch invariante Fortsetzung (die bekanntlich auf wesentlich umfassendere Klassen von Halbgruppen anwendbar ist). Speziell könnte sich die Metrik $D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ als die invariante Fortsetzung der Metrik $d(a, b)$ von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ erweisen. Daß dem nicht so ist, lehrt ein einfaches

[17]) $\mathfrak{H}$ (Metrik d) ist einbettbar in $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ $\left(\text{Metrik } D\left(\overline{(\alpha, a)}, \overline{(\beta, b)}\right)\right)$.

[18]) $\mathfrak{H}$ (Metrik d) ist eingebettet in $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ $\left(\text{Metrik } D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)\right)$.

Beispiel. Die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen mit der invarianten Metrik

$$d(a, b) = |\log a - \log b| \qquad a, b \in \mathfrak{Z}$$

ist eine diskrete metrische Halbgruppe (vgl. § 3, Beispiel). Wird die Metrik d auf die Quotientengruppe von $\mathfrak{Z}$, die multiplikative Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ der positiven rationalen Zahlen, invariant fortgesetzt, so erhält man nach § 5, Satz 1 auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ die Metrik

$$D'\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right) = |\log a\beta - \log b\alpha| = \left|\log \frac{a}{\alpha} - \log \frac{b}{\beta}\right|$$

$(\alpha, \beta, a, b \in \mathfrak{Z})$, und $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ wird so zu einer nichtdiskreten topologischen Gruppe mit invarianter Metrik (vgl. § 3, Beispiel). In diese topologische Gruppe ist die metrische Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ eingebettet, wie aus § 5, Satz 1 folgt.

Das Verfahren von Gelbaum, Kalisch und Olmstedt führt ebenfalls zu einer Einbettung der metrischen Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ (wenn es wie oben beschrieben auf Quotientengruppen statt Quotientenstrukturen angewandt wird). Mittels eines Kriteriums[19]) aus [1] bestätigt man nämlich leicht, daß für $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}$ und $d(a, b) = |\log a - \log b|$ $(a, b \in \mathfrak{Z})$ die Relation R offen ist. Daher kann Teil c) des obigen Satzes benutzt werden. Ferner muß nach Teil b) des Satzes von Gelbaum, Kalisch und Olmstedt die Quotientengruppe von $\mathfrak{Z}$ durch das Verfahren aus [1] diskret topologisiert werden.

Die Metriken $D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ und $D'\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ führen also hier zu inäquivalenten Topologisierungen der Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$. Daher kann die Metrik $D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ nicht die invariante Fortsetzung der Metrik $d(a, b)$ auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ sein. Außerdem folgt: Das in § 4 formulierte Einbettungsproblem für metrische Halbgruppen kann mehrere Lösungen haben.

Daß die Metrik D nicht die invariante Fortsetzung der Metrik d von $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ sein kann, läßt sich auch direkt einsehen. Berechnet man nämlich für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{Z}$ ihre Entfernung im Sinne der Metrik D und vergleicht diese mit der Entfernung $d(a, b)$, so ergibt sich zunächst

$$D(a, b) = \log \frac{[a, b]}{(a, b)}\ ^{20}).$$

Demnach ist genau dann

$$d(a, b) = D(a, b) \qquad a, b \in \mathfrak{Z},$$

[19]) Das erwähnte Kriterium ist ein Teil des Satzes 3 aus [1]. Es besagt: Die Relation R ist genau dann offen, wenn zu beliebigen $a, b, c \in \mathfrak{H}$ (kommutative reguläre Halbgruppe mit Einselement) und zu beliebigen (offenen) Umgebungen U_a, U_b der Punkte a, b stets (offene) Umgebungen U_{ac}, U_{bc} von ac, bc derart existieren, daß jeder Punkt aus $U_{ac} \times U_{bc}$ (R-) äquivalent ist einem gewissen Punkt aus $U_a \times U_b$.

[20]) Für natürliche Zahlen a, b bedeutet (a, b) den größten gemeinschaftlichen Teiler, $[a, b]$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

wenn $a|b$ oder $b|a$ ist[21]); in allen anderen Fällen liefert D größere Entfernungen als d. Insbesondere gilt für jede natürliche Zahl n

$$d(10^n + 1, 10^n) = \log(1 + 10^{-n}) < 10^{-n},$$
$$D(10^n + 1, 10^n) = \log(10^{2n} + 10^n) > 2n \cdot \log(10).$$

Aus diesen Ungleichungen kann man eine interessante Folgerung ziehen, aus der man erkennt, daß die beiden Metrisierungsverfahren, das von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT und das in §§ 4 bis 5 entwickelte, von ganz verschiedener Natur sein müssen:

Im vorliegenden Beispiel kann man zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und zu beliebig großem $N > 0$ stets Elemente a_0, b_0 aus $\mathfrak{Z}$ finden mit

$$d(a_0, b_0) < \varepsilon \quad \text{und} \quad D(a_0, b_0) > N.$$

Bemerkung. Die Bezeichnungen in § 6 sind so gewählt, daß sie weitgehend mit den in den vorhergehenden Paragraphen sowie den in meiner Dissertation verwendeten übereinstimmen. Daher treten eine Reihe von (kleineren) Abweichungen gegenüber [1] auf.

Literatur.

[1] GELBAUM, B., G. K. KALISCH and J. M. H. OLMSTEDT: On the embedding of topological semigroups and integral domains. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 807—821 (1951). — [2] HILLE, E.: Functional Analysis and Semi-Groups. New York 1948. — [3] MURATA, K.: On the quotient semi-group of a non commutative semi-group. Osaka Math. J. **2**, 1—5 (1950). — [4] ORE, O.: Linear equations in non-commutative fields. Ann. of Math. (2) **32**, 463—477 (1931). — [5] PONTRJAGIN, L.: Topological Groups. Princeton 1946. — [6] VANDIVER, H. S.: On the embedding of one semigroup in another, with applications to semirings. Amer. J. Math. **62**, 72—78 (1940).

[21]) $a|b$ besagt wie üblich, daß a ein Teiler von b ist.

München, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. April 1955.)

ELTERMANN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 469—501 (1955)

Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von
HEINZ ELTERMANN.

Einleitung. Das Problem der Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

besteht im allgemeinen in der folgenden Fragestellung:

Gegeben ist ein in einem Intervall $x_0 \leq x < x_1$ definiertes System von Funktionen $y_i = Y_i(x)$, welches man als *Näherungslösung* bezeichnet. Für eine noch unbekannte *Lösung* $y_i = y_i(x)$ (System für $i = 1, 2, \ldots, n$) ist in demselben Intervall eine Abschätzung des *Fehlers* $z_i = z_i(x) = y_i(x) - Y_i(x)$ in der Form

$$(2) \qquad \mathfrak{p}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \leq g(x) \quad \text{für} \quad x_0 \leq x < x_1$$

gesucht, wobei $\mathfrak{p}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine stetige positive Funktion der *Fehlerkomponenten* z_i ist, welche nur dann verschwindet, wenn alle $z_i = 0$ sind.

Praktisch wird man hierbei so vorgehen, daß man die Funktion $\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_n)$ vorgibt — etwa

$$(3) \qquad \mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_n) = \sqrt{\sum z_i^2} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{Max}(|z_i|),$$

um nur zwei Beispiele anzugeben —, während man die Funktion $g(x)$ zu bestimmen sucht.

Diesem Zweck dient die in dieser Arbeit beschriebene *Methode der einschließenden Röhrenbereiche*. — Eine Anregung zu den auf diese Methode führenden Gedankengängen gaben die von Herrn PERRON [8] eingeführten *Oberfunktionen* und *Unterfunktionen* einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Nach PERRON hat eine Oberfunktion $y = \bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ stets die Eigenschaft, an jeder Stelle $(x; \bar{y}(x))$ einen größeren Anstieg zu haben als jede diesen Punkt passierende Lösung. Hieraus kann gefolgert werden, daß für jede Lösung $y = y(x)$, welche für $x = x_0$ der Ungleichung $y(x_0) \leq \bar{y}(x_0)$ genügt, dieselbe Ungleichung in der Form $y(x) \leq \bar{y}(x)$ für $x > x_0$ erhalten bleibt, soweit die Oberfunktion definiert ist.

Entsprechend hat eine Unterfunktion $y = \underline{y}(x)$ die Eigenschaft, daß sie an jeder Stelle $(x; \underline{y}(x))$ einen kleineren Anstieg hat als jede diesen Punkt passierende Lösung. Hieraus kann entsprechend gefolgert werden, daß für

jede Lösung $y = y(x)$, welche für $x = x_0$ der Ungleichung $y(x_0) \geq \underline{y}(x_0)$ genügt, dieselbe Ungleichung in der Form $y(x) \geq \underline{y}(x)$ für $x > x_0$ erhalten bleibt, soweit die Unterfunktion definiert ist.

Wenn nun in einem Intervall $a \leq x \leq b$ sowohl eine Oberfunktion $\bar{y}(x)$ als auch eine Unterfunktion $\underline{y}(x)$ zur Verfügung stehen, wobei noch die Bedingung $\underline{y}(a) \leq \bar{y}(a)$ erfüllt sein muß, woraus $\underline{y}(x) \leq \bar{y}(x)$ für $a \leq x \leq b$ folgt, so bildet der durch die Ungleichungen

$$a \leq x \leq b \quad \text{und} \quad \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x) \tag{4}$$

definierte abgeschlossene Bereich der $(x; y)$-Ebene einen einschließenden Röhrenbereich der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$. Er hat die Eigenschaft, daß er, wenn $y = y(x)$ eine Lösung ist, alle Punkte $(x; y)$ mit $y = y(x)$ und $a < x \leq b$ einschließt, sofern er nur den Anfangspunkt $(a; y(a))$ einschließt.

Macht man nun den Ansatz

$$\bar{y}(x) = Y(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \quad \underline{y}(x) = Y(x) - g(x), \tag{5}$$

wobei $Y(x)$ eine Näherungslösung ist, und bestimmt $g(x)$ entsprechend, so gewinnt man die Abschätzung $p(z) \leq g(x)$ mit $p(z) = |z|$.

Dies ist der Grundgedanke, von dem man durch gewisse Verallgemeinerungen auf *Systeme* von Differentialgleichungen zur Methode der einschließenden Röhrenbereiche geführt wird.

Im Ergebnis kommt es etwa darauf hinaus, daß man die Funktion $g(x)$ so zu bestimmen hat, daß sie einer Differential-Ungleichung

$$g'_+ \geq L(x; g) + q(x) \quad (g'_+ \text{ ist die rechtsseitige Ableitung}) \tag{6}$$

genügt. Hierbei bedeutet $q(x)$ im wesentlichen eine Schranke für die *Richtungsfehler*

$$r_i(x) = f_i\big(x; Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)\big) - Y_i'(x), \tag{7}$$

während $L(x; g)$ den Charakter einer LIPSCHITZ-*Schranke* hat. Für den Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ hat sie der LIPSCHITZ-*Bedingung*

$$\operatorname{sign}(y - Y) \cdot \big(f(x; y) - f(x; Y)\big) \leq L(x; |y - Y|) \tag{8}$$

zu genügen. Diese LIPSCHITZ-Bedingung ist milder als die gewöhnlich verwendete

$$|f(x; y) - f(x; Y)| \leq M(x; |y - Y|); \tag{9}$$

denn wenn man eine LIPSCHITZ-Schranke M für (9) gefunden hat, so hat man gleichzeitig eine LIPSCHITZ-Schranke L für (8) gefunden, weil diese Bedingung mit $L = M$ sicher erfüllt ist. Hingegen kann man aber unter Umständen noch eine kleinere Schranke L finden. Bei Systemen von Differentialgleichungen liegen die Verhältnisse ganz entsprechend. Auch hier kommt man auf mildere LIPSCHITZ-Bedingungen als man gewöhnlich ansetzt. Dieser Umstand ist deshalb bemerkenswert, weil jede Verkleinerung der LIPSCHITZ-

Schranke — die nicht notwendig eine Verkleinerung dem Betrage nach sein muß — eine Verschärfung der Fehlerabschätzung bedeutet, was bei Betrachtung von (6) unmittelbar zu erkennen ist.

In der Literatur fehlt es zwar nicht an Beispielen für die Verwendung von derartig gemilderten LIPSCHITZ-Bedingungen zur Herstellung gewisser Abschätzungen und zur Herleitung von Eindeutigkeitskriterien (s. z. B. SANSONE [*10*], GIULIANO [*2*] und MCSHANE [*4*]), doch hat man auf dem Gebiete der praktischen Fehlerabschätzungen bisher wenig Gebrauch davon gemacht. Einen Hinweis auf die Verwendbarkeit milderer LIPSCHITZ-Bedingungen findet man bei COLLATZ [*1*].

§ 1. Grundlegende Sätze und Definitionen.

1. Das Differentialgleichungssystem. Ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung kann in der skalaren Form

$$(S) \qquad y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

oder auch in kürzerer Form als Vektor-Differentialgleichung

$$(V) \qquad \mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$$

geschrieben werden. Hierbei hat der Vektor

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

als orthogonale Komponenten — d. h. Bestimmungszahlen (Koordinaten) bezüglich einer normierten Orthogonalbasis — die n abhängigen Variablen y_i, während die Vektor-Funktion

$$(2) \qquad \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) = \big(f_1(x; \mathfrak{y}), f_2(x; \mathfrak{y}), \ldots, f_n(x; \mathfrak{y})\big)$$

als entsprechende orthogonale Komponenten die n rechten Seiten

$$(3) \qquad f_i(x; \mathfrak{y}) = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

hat.

2. Lösungen und Integralkurven. Ein System von n Funktionen

$$(1) \qquad \big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big) = \mathfrak{y}(x),$$

welches das Differentialgleichungssystem (S) bzw. die Differentialgleichung (V) befriedigt, heißt eine *Lösung*.

Es liegt nahe, jeder Lösung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$, welche durch eine n-dimensionale Vektorfunktion des skalaren Parameters x dargestellt wird, eine in den $(n+1)$-dimensionalen Raum mit dem Ortsvektor

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y}) = (x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

eingebettete *Integralkurve* $\mathfrak{x} = \big(x; \mathfrak{y}(x)\big)$ zuzuordnen. (Hierbei soll die x-Richtung zu allen y-Richtungen orthogonal sein.) Diese wiederum kann auf verschiedene Weisen durch eine Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ mit einem monoton

und stetig *wachsenden* Parameter t beschrieben werden. Zwei spezielle Darstellungen sollen besonders ins Auge gefaßt werden:

$$(3a)\qquad \mathfrak{x} = \big(a + t; \mathfrak{y}(a+t)\big) \quad \text{bzw.} \quad (3b)\qquad \mathfrak{x} = \big(b - t; \mathfrak{y}(b-t)\big),$$

wobei t in beiden Fällen das Intervall $0 \leq t \leq (b-a)$ durchläuft und $\mathfrak{y}(x)$ eine in dem Intervall $a \leq x \leq b$ erklärte Lösung ist. Für den *Tangentenvektor* der Integralkurve erhält man, je nachdem welche Parameterdarstellung zugrunde gelegt wird,

$$(4a)\qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{R}(\mathfrak{x}) \quad \text{bzw.} \quad (4b)\qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = -\mathfrak{R}(\mathfrak{x}),$$

wobei das $(n+1)$-dimensionale Vektorfeld

$$(5)\qquad \mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = \big(1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})\big)$$

durch die rechte Seite $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ der Differentialgleichung (V) für jeden Punkt $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ definiert ist, für den diese rechte Seite erklärt ist. Wir machen die

Voraussetzung: Die Vektorfunktion $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ ist für alle Punkte $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ in einem gewissen offenen Gebiet G des $\mathfrak{x}$-Raumes definiert und stetig. Dann ist also $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ ein in G definiertes und dort stetiges Vektorfeld.

Dieses Vektorfeld ordnet jedem Punkt $\mathfrak{x}$ aus G einen Vektor $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ zu, der als Tangentenvektor einer jeden diesen Punkt passierenden oder von ihm ausgehenden nach wachsenden Werten von x orientierten Integralkurve in diesem Punkte gelten kann. Orientiert man jede solche Integralkurve aber nach fallenden Werten von x, so übernimmt das Feld $-\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ diese Rolle.

Definition. Das durch $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = \big(1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})\big)$ erklärte $(n+1)$-dimensionale Vektorfeld soll das *orientierte Richtungsfeld* der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ heißen.

3. Existenz und Fortsetzbarkeit der Integralkurven. Über die Existenz von Lösungen gibt der folgende Satz Auskunft. (Nach einem Satz von PEANO [7], vgl. auch KAMKE [3], S. 59—66; 126—130.)

Satz 1. *Ist $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ in einem offenen Gebiet G des $(x; \mathfrak{y})$-Raumes stetig, und ist $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ ein Punkt aus G, so gibt es ein Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ und in diesem Intervall mindestens eine stetig differenzierbare Lösung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, für die $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$ ist.*

Nach einem weiteren Satz, den man z. B. bei KAMKE [3] S. 75—77; 135—136 nachlesen kann, läßt sich jede Lösung nach Satz 1 noch über x_1 hinaus fortsetzen, wobei als Fortsetzung dieser Lösung jede Lösung $\mathfrak{y}_1(x)$ gilt, die in einem Intervall $x_0 \leq x < x_2$ mit $x_2 > x_1$ definiert ist und im Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ mit $\mathfrak{y}(x)$ übereinstimmt. Für solche Fortsetzungen gilt der ebenfalls a. a. O. KAMKE [3] in etwas anderer Formulierung stehende

Satz 2. *Ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ eine für $x_0 \leq x \leq x_1$ definierte Lösung der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, deren Integralkurve ganz in G liegt, so gibt es mindestens ein rechts offenes Intervall $x_0 \leq x < b$ mit $b > x_1$ und in diesem mindestens eine Fortsetzung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}^*(x)$, deren Integralkurve mehr Punkte mit G gemeinsam hat*

als mit jeder abgeschlossenen Teilmenge A von G. Die Integralkurve einer jeden solchen Fortsetzung soll eine vollständige rechts-orientierte Integralkurve der Differentialgleichung mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ heißen.

Durch Kombination der ersten beiden Sätze erhält man sofort den

Satz 3. *Ist $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ in dem offenen Gebiet G stetig, und ist A ein abgeschlossener Teilbereich aus G, so geht von jedem Punkt $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ aus A mindestens eine vollständige rechts-orientierte Integralkurve aus, und jede von diesem Punkt ausgehende vollständige rechts-orientierte Integralkurve enthält einen Randpunkt $\mathfrak{x}_1 = (x_1; \mathfrak{y}_1)$ von A mit $x_0 \leq x_1$ (der möglicherweise auch mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0$ zusammenfallen kann), derart daß diese Integralkurve für $x > x_1$ keinen Punkt von A mehr enthält.*

§ 2. Die Eintritts- und Austrittskriterien für Integralkurven.

1. Innen-, Außen- und Randpunkte. Wir betrachten einen abgeschlossenen Teilbereich A des offenen Gebietes G. Alle Punkte der offenen Punktmenge $(G - A)$ sollen *Außenpunkte* heißen. Alle Punkte von A, die in A eine $(n+1)$-dimensionale Umgebung ($(n+1)$-dimensionale Kugel) besitzen, sollen *Innenpunkte* heißen. Alle anderen Punkte von A sollen *Randpunkte* heißen. Die Menge der Innenpunkte ist ebenso wie die Menge der Außenpunkte offen. Die Menge der Randpunkte ist abgeschlossen. Jeder Häufungspunkt von Randpunkten ist also selbst ein Randpunkt.

Wir ordnen nun allen Punkten $\mathfrak{x}$ aus G eine stetige Funktion $u(\mathfrak{x})$ zu, die für Innenpunkte positiv, für Außenpunkte negativ und für Randpunkte gleich Null ist. Dies geschieht folgendermaßen:

Definition. Für den Fall, daß $\mathfrak{x}$ ein Innenpunkt ist, setze man $u(\mathfrak{x})$ gleich der oberen Grenze der Radien aller Umgebungen, die nur aus Innenpunkten bestehen. Für den Fall, daß $\mathfrak{x}$ ein Außenpunkt ist, setze man $u(\mathfrak{x})$ gleich dem Negativen der oberen Grenze der Radien aller Umgebungen, die nur aus Außenpunkten bestehen. Für einen Randpunkt $\mathfrak{x}$ setze man $u(\mathfrak{x})$ gleich Null. — Es gilt der

Satz 4. *Die Funktion $u(\mathfrak{x})$ erfüllt die* Lipschitz*-Bedingung*

$$|u(\mathfrak{x}_1) - u(\mathfrak{x}_2)| \leq |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|, \tag{1}$$

wenn $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ irgendwelche Punkte aus G sind.

Beweis. Wir betrachten die beiden durch die Ungleichungen

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1| \leq |u(\mathfrak{x}_1)| \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2| \leq |u(\mathfrak{x}_2)| \tag{2}$$

definierten Kugeln, die so beschaffen sind, daß sie im Inneren entweder nur Innenpunkte oder nur Außenpunkte enthalten, während auf ihrem Rande jeweils mindestens ein Punkt liegt, der entweder ein Randpunkt von A ist oder nicht mehr zu G gehört. Deshalb kann es nicht vorkommen, daß eine der Kugeln ganz im Inneren der anderen liegt. Sind also $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide Innenpunkte oder beide Außenpunkte, so gelten die Abschätzungen

$$|u(\mathfrak{x}_1)| \leq |u(\mathfrak{x}_2)| + |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|; \quad |u(\mathfrak{x}_2)| \leq |u(\mathfrak{x}_1)| + |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|, \tag{3}$$

aus denen sofort (1) folgt. Ist aber $\mathfrak{x}_1$ Innen- oder Randpunkt und $\mathfrak{x}_2$ Außen- oder Randpunkt, so haben die Kugeln (2) höchstens einen Randpunkt gemeinsam, und es folgt

(4) $$|u(\mathfrak{x}_1)| + |u(\mathfrak{x}_2)| \leq |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2| \quad \text{also erst recht (1).}$$

2. Eintritts-, Austritts- und Gleitrichtungen. $\mathfrak{x}_0$ sei irgendein Randpunkt von A. $\mathfrak{n}$ sei ein $(n+1)$-dimensionaler Einheitsvektor. Dann wird durch die Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}$ für $t \geq 0$ eine Halbgerade definiert. Bei festem $\mathfrak{x}_0$ und festem $\mathfrak{n}$ ist die Funktion

(1) $$q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}, t) = \frac{1}{t} \cdot \big(u(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}_0)\big) = \frac{1}{t} \cdot \big(u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}) - u(\mathfrak{x}_0)\big)$$

eine für $t > 0$ stetige Funktion von t, soweit $\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}$ in G liegt. Wir *definieren* eine Funktion von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{n}$:

(2) $$Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}, t), & \text{wenn dieser Grenzwert positiv} \\ \overline{\lim\limits_{t \to 0}}\, q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}, t), & \text{wenn dieser Grenzwert negativ} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Daß die benötigten Grenzwerte stets existieren, folgt aus Satz 4. Darüber hinaus gilt sogar der

Satz 5. *Die nach* (2) *definierte Funktion* $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})$ *ist dem Betrage nach niemals größer als Eins.*

Mit Hilfe der Funktion $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})$ teilen wir die Richtungen der von einem festen Randpunkt $\mathfrak{x}_0$ ausgehenden Halbgeraden in verschiedene Klassen ein.

Definition. Die Richtung von $\mathfrak{n}$ soll

wenn $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) > 0$ ist, *Eintrittsrichtung*,
wenn $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) < 0$ ist, *Austrittsrichtung* und
wenn $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = 0$ ist, *Gleitrichtung* heißen.

Ferner sollen die folgenden Bezeichnungen verwendet werden:

Menge aller Eintrittsrichtungen = *Innenkegel* von $\mathfrak{x}_0$
Menge aller Austrittsrichtungen = *Außenkegel* von $\mathfrak{x}_0$
Menge aller Gleitrichtungen = *Gleitkegel* von $\mathfrak{x}_0$.

Es gilt nun der folgende

Satz 6. *Ist* $\mathfrak{x}_0$ *ein Randpunkt von* A, *und gehört die Richtung des Einheitsvektors* $\mathfrak{n}$ *dem Innenkegel (Außenkegel) von* $\mathfrak{x}_0$ *an, so gibt es zu jeder positiven Zahl* $c < |Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})|$ *eine positive Zahl* ϱ, *derart daß für alle Einheitsvektoren* $\mathfrak{m}$, *die der Ungleichung* $|\mathfrak{m} - \mathfrak{n}| \leq c$ *genügen, und alle Werte von* t *aus dem Intervall* $0 < t \leq \varrho$ *die Punkte* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{m}$ *Innenpunkte (Außenpunkte) sind.*

Beweis. Auf Grund der Definitionen (2) gilt in beiden Fällen

(3) $$|Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})| = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot |u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n})| \qquad (u(\mathfrak{x}_0) = 0).$$

Dann gibt es aber auf Grund der gemachten Voraussetzung: $c<|Q|$ eine Zahl $\varrho>0$, so daß für $0<t\leq\varrho\,|u(\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{n})|>c\cdot t$ ist. Verbindet man dies mit der über den Vektor $\mathfrak{m}$ gemachten Voraussetzung, so erhält man mit $\mathfrak{x}_1=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}_2=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{m}$ die Abschätzung

$$|\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1|=t\cdot|\mathfrak{m}-\mathfrak{n}|\leq c\cdot t<|u(\mathfrak{x}_1)|. \tag{4}$$

Das bedeutet aber, daß der Punkt $\mathfrak{x}_2=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{m}$ Innenpunkt (Außenpunkt) ist.

3. Ein Beispiel. Es gilt ein für die praktische Berechnung der Funktion $Q(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{n})$ wichtiger

Satz 7. *Definiert man den abgeschlossenen Teilbereich A von G durch die Ungleichung: $U(\mathfrak{x})\geq 0$, wobei $U(\mathfrak{x})$ eine stetig differenzierbare Funktion von $\mathfrak{x}$ ist, deren Gradient für den durch die Gleichung: $U(\mathfrak{x}_0)=0$ definierten Randpunkt $\mathfrak{x}_0$ nicht verschwindet, so berechnet man $Q(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{n})$ nach der Gleichung*

$$Q(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{n})=\frac{1}{\mathfrak{N}}\cdot(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})\quad\text{mit}\quad\mathfrak{N}=\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_0). \tag{1}$$

Der Vektor $\mathfrak{n}$ hat also je nach dem Vorzeichen von $(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})$

$$\begin{cases}\textit{Eintrittsrichtung für } (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})>0\\ \textit{Austrittsrichtung für } (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})<0\\ \textit{Gleitrichtung für } (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})=0.\end{cases} \tag{2}$$

Beweis. Zunächst ist klar, daß die Funktion $u(\mathfrak{x})$ definitionsgemäß stets dasselbe Vorzeichen hat wie die Funktion $U(\mathfrak{x})$. Auf der Halbgeraden: $\mathfrak{x}(t)=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{n}$ strebt wegen der vorausgesetzten Stetigkeit des Gradienten $\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}(t))$ mit gegen Null fallenden Werten von t gegen $\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_0)$. Ferner gibt es zu jedem hinreichend kleinen Wert von t einen Randpunkt $\mathfrak{x}_r(t)$, derart daß

$$|\mathfrak{x}(t)-\mathfrak{x}_r(t)|=|u(\mathfrak{x}(t))| \tag{3}$$

ist. Da die rechte Seite von (3) für $t\to 0$ gegen Null strebt, so strebt auch $\mathfrak{x}_r(t)$ gegen $\mathfrak{x}_0$. Die Funktion $u(\mathfrak{x}(t))$ läßt sich durch Lösen der Extremumsaufgabe

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}(t)|=\text{Minimum für } U(\mathfrak{x})=0 \text{ bei festem } t \tag{4}$$

gewinnen, wobei gleichzeitig ein $\mathfrak{x}_r(t)$ gewonnen wird. Die LAGRANGEsche Methode liefert die Gleichung

$$\mathfrak{x}(t)-\mathfrak{x}_r(t)=\lambda\cdot\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_r(t)), \tag{5}$$

wobei λ das Vorzeichen von $U(\mathfrak{x}(t))$ bzw. von $u(\mathfrak{x}(t))$ hat. Auf Grund von (3) läßt sich λ berechnen, und wir erhalten genauer

$$\mathfrak{x}(t)-\mathfrak{x}_r(t)=u(\mathfrak{x}(t))\cdot\frac{\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_r(t))}{|\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_r(t))|}. \tag{6}$$

Nun erschließt man mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Gleichung

$$(7) \qquad U(\mathfrak{x}(t)) = U(\mathfrak{x}(t)) - U(\mathfrak{x}_r(t)) = (\mathfrak{x}(t) - \mathfrak{x}_r(t)) \cdot \operatorname{grad} U(\tilde{\mathfrak{x}}(t)),$$

wobei $\tilde{\mathfrak{x}}(t)$ auf der Strecke zwischen $\mathfrak{x}(t)$ und $\mathfrak{x}_r(t)$ liegt. Diese Gleichung geht mit Hilfe von (6) über in die Gleichung

$$(8) \qquad U(\mathfrak{x}(t)) = u(\mathfrak{x}(t)) \cdot |\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t))| \cdot \frac{\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t)) \cdot \operatorname{grad} U(\tilde{\mathfrak{x}}(t))}{\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t)) \cdot \operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t))}.$$

Somit erhält man die Gleichung

$$(9) \qquad Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = \lim \frac{1}{t} u(\mathfrak{x}(t)) = \frac{1}{\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_0)} \cdot \lim \frac{1}{t} U(\mathfrak{x}(t)) = \frac{1}{|\mathfrak{R}|} \cdot (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{R}).$$

4. Eintritts- und Austrittskriterium für die Integralkurven.

Definition. Ist $\mathfrak{x}_0$ ein Randpunkt von $A \subset G$, und ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0)$ der Vektor des Richtungsfeldes im Punkte $\mathfrak{x}_0$, so hat der entsprechende Einheitsvektor entweder Eintrittsrichtung, Austrittsrichtung oder Gleitrichtung. Entsprechend soll der Randpunkt $\mathfrak{x}_0$ entweder *Eintrittspunkt*, *Austrittspunkt* oder *Gleitpunkt* heißen. Es gilt nun der

Satz 8. *Ist $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ ein Randpunkt des abgeschlossenen Teilbereiches A von G, und ist $\mathfrak{x}_0$ ein Eintrittspunkt (Austrittspunkt) des Richtungsfeldes der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, so enthält jede von $\mathfrak{x}_0$ ausgehende rechtsorientierte Integralkurve für nicht zu große $x > x_0$ nur Innenpunkte (Außenpunkte) von (zu) A.*

Hieraus folgt sofort der

Satz 9. *Wenn eine von einem Eintrittspunkt oder einem Innenpunkt ausgehende vollständige rechts-orientierte Integralkurve den Bereich A durch einen Randpunkt verläßt, so kann dieser Randpunkt kein Eintrittspunkt des Richtungsfeldes sein.*

Beweis. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ sei diejenige Parameterdarstellung einer von $\mathfrak{x}_0$ ausgehenden Integralkurve, welche der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{R}(\mathfrak{x})$$

genügt und für $t = 0$ den Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0$ liefert. Dann konvergiert für $t \to 0$ nach Definition der Ableitung der Vektor

$$(2) \qquad \mathfrak{d} = \frac{1}{t}(\mathfrak{x}(t) - \mathfrak{x}_0) \quad \text{gegen} \quad \mathfrak{x}'(0) = \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0),$$

also auch der Einheitsvektor der Sehne

$$(3) \qquad \mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{d}}{|\mathfrak{d}|} \quad \text{gegen} \quad \mathfrak{n} = \frac{1}{|\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0)|} \cdot \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0).$$

Für genügend kleines t sind die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt. $\mathfrak{x}(t)$ ist also Innenpunkt (Außenpunkt), wenn $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0)$ Eintrittsrichtung (Austrittsrichtung) hat. Dies war zu beweisen.

§ 3. Die Methode der einschließenden Röhrenbereiche.

1. Definition von Röhrenbereichen. Gegeben sei:

a) eine stetige Kurve durch die Gleichung $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x)$ für $a \leq x \leq b$,

b) eine stetige für $\mathfrak{z} \neq 0$ positive Funktion $p(\mathfrak{z})$ des n-dimensionalen Vektors $\mathfrak{z}$, die für $\mathfrak{z} = 0$ verschwindet und die Eigenschaft hat, daß für positives λ und festes $\mathfrak{z}$ $p(\lambda \mathfrak{z})$ mit wachsendem λ wächst,

c) eine stetige für $a < x < b$ positive Funktion $g(x)$.

Man setze jetzt: $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$. Dann soll der abgeschlossene Bereich, der durch die Ungleichungen

$$(1) \qquad p(\mathfrak{z}) \leq g(x) \quad \text{und} \quad a \leq x \leq b \quad \text{mit} \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)$$

definiert wird, ein Röhrenbereich R heißen.

Will man noch besonders auf die definierenden Elemente des Röhrenbereiches hinweisen, so kann man ausführlicher schreiben:

$$(2) \qquad R = R\big(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b.$$

2. Einschließende Röhrenbereiche. Ein Röhrenbereich hat als Randpunkte:

1. alle die Punkte $(x; \mathfrak{y})$, für die $x = a$ und $p(\mathfrak{z}) < g(a)$ ist,
2. alle die Punkte $(x; \mathfrak{y})$, für die $x = b$ und $p(\mathfrak{z}) \leq g(b)$ ist und
3. alle die Punkte, für die $a \leq x < b$ und $p\big(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)\big) = g(x)$ ist.

Die Mengen der Randpunkte der zweiten und dritten Art existieren stets, während die Menge der Randpunkte der ersten Art auch leer sein kann [nämlich, wenn $g(a) = 0$ ist].

Ist nun $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = \big(1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})\big)$ das Richtungsfeld der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ und liegt der Röhrenbereich R ganz in G, so sind die Randpunkte der ersten Art stets Eintrittspunkte, weil $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ die positive x-Komponente Eins hat. Aus demselben Grunde sind die Randpunkte der zweiten Art stets Austrittspunkte. Die Randpunkte der dritten Art können aber in verschiedene Klassen fallen.

Wenn nun aber auch die Randpunkte der dritten Art sämtlich Eintrittspunkte sind, so soll der Röhrenbereich R ein *einschließender Röhrenbereich* E heißen. Ausführlicher kann man entsprechend (1; 2)

$$(1) \qquad E = E\big(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b$$

schreiben.

Wenn man nun auf einen einschließenden Röhrenbereich den Satz 9 anwendet und gleichzeitig den Satz 3 beachtet, so kommt man leicht zu dem die einschließenden Röhrenbereiche kennzeichnenden:

Satz 10. *Ist* $E = E\big(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\big)$ *im Intervall* $a \leq x \leq b$ *ein einschließender Röhrenbereich für die Differentialgleichung* $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ *und* $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ *eine Lösung, welche der Abschätzung*

$$(2) \qquad p\big(\mathfrak{y}(a) - \mathfrak{Y}(a)\big) \leq g(a)$$

genügt, so genügt sie auch der Abschätzung

$$p\left(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}(x)\right) \leq g(x) \tag{3}$$

für alle Werte von x aus dem Intervall $a \leq x \leq b$.

Dieser Satz läßt sich auf die folgende Weise verallgemeinern:

Satz 11. *Es sei eine Menge von endlich oder unendlich vielen einschließenden Röhrenbereichen*

$$E_\nu = E\left(\mathfrak{Y}_\nu(x); p_\nu(\mathfrak{z}), g_\nu(x)\right) \tag{4}$$

für ein und dasselbe Intervall $a \leq x \leq b$ gegeben. Ist nun $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ eine Lösung, welche allen Abschätzungen

$$p_\nu\left(\mathfrak{y}(a) - \mathfrak{Y}_\nu(a)\right) \leq g_\nu(a) \tag{5}$$

genügt, so genügt sie auch allen Abschätzungen

$$p_\nu\left(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}_\nu(x)\right) \leq g_\nu(x) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b. \tag{6}$$

Sind insbesondere alle Funktionen $\mathfrak{Y}_\nu(x)$ gleich ein und derselben Funktion $\mathfrak{Y}(x)$ und alle $p_\nu(\mathfrak{z})$ gleich ein und derselben Funktion $p(\mathfrak{z})$, und bezeichnet man mit $g(x)$ die untere Grenze aller Funktionen $g_\nu(x)$, so gilt unter den gemachten Voraussetzungen die Abschätzung

$$p\left(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}(x)\right) \leq g(x) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b \tag{7}$$

auch dann, wenn der Durchschnitt der einschließenden Röhrenbereiche selbst kein einschließender Röhrenbereich mehr ist.

3. Einige Anwendungen. Als erstes Beispiel beweisen wir eine einfache Abschätzung:

Satz 12. *Wenn in einem durch die Ungleichungen*

$$x_0 \leq x \leq x_1, \quad |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0| \leq K \tag{1}$$

bestimmten Zylinderbereich die rechte Seite der Differentialgleichung der Abschätzung

$$|\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})| < M \tag{2}$$

genügt, dann gilt für alle Lösungen $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ mit dem Anfangswert $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$ die Abschätzung

$$|\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{y}_0| \leq M \cdot (x - x_0), \tag{3}$$

sofern x dem Intervall

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \operatorname{Min}\left((x_1 - x_0); \frac{K}{M}\right) = x_0 + l \tag{4}$$

angehört.

Beweis. Wir betrachten den Röhrenbereich $R = R\left(\mathfrak{y}_0; |\mathfrak{z}|, M(x - x_0)\right)$, der durch die Ungleichung

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0| \leq M \cdot (x - x_0) \quad \text{für} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + l \tag{5}$$

definiert ist, und speziell dessen Randpunkte dritter Art, welche für $x_0 \leqq x < x_0 + l$ der Gleichung

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0| = M \cdot (x - x_0) \tag{6}$$

genügen und wie wir beweisen wollen sämtlich Eintrittspunkte sind. Wir unterscheiden hierbei zwischen $x = x_0$ und $x > x_0$. Für $x = x_0$ schließt der Richtungsfeld-Vektor $\mathfrak{R} = (1; \mathfrak{F}(x_0; \mathfrak{y}_0))$ mit der x-Richtung einen kleineren Winkel ein als sämtliche Richtungsvektoren der Mantellinien des Hyperkegels (5), die ja alle den Punkt $(x_0; \mathfrak{y}_0)$ treffen. Für $x > x_0$ existiert eine eindeutige innere Normale

$$\mathfrak{N} = \left(M; -\frac{(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0)}{|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|}\right) \quad \text{[Gradient entsprechend Gl. (6)]}. \tag{7}$$

Für das entsprechend Satz 7 zu bildende Skalarprodukt zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ erhält man wegen der Abschätzung

$$(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{N}) = M - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) \cdot \frac{(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0)}{|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|} \geq M - |\mathfrak{F}| > 0 \quad \text{[vgl. (4)]} \tag{8}$$

stets einen positiven Wert. Somit ist nachgewiesen, daß der Röhrenbereich (5) ein einschließender Röhrenbereich ist. Daraus folgt aber auf Grund von Satz 10 die Behauptung (3).

Als zweites Beispiel beweisen wir eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes von NAGUMO [5]. (Eine andere Verallgemeinerung bei PERRON [9], Satz 2. Nach freundlicher Mitteilung von Herrn PERRON läßt sich nach seinem dortigen Verfahren unser Satz ebenfalls beweisen.)

Satz 13. *Es sei* $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ *mit dem Anfangswert* $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$. $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ *sei in einem durch die Ungleichungen*

$$x_0 \leqq x \leqq X, \quad |\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)| \leqq K \tag{9}$$

beschränkten Bereich stetig und genüge mit $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(x)$ *einer* LIPSCHITZ*-Bedingung*

$$\left((\mathfrak{y} - \mathfrak{Y})\,(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}))\right) < L(x) \cdot (\mathfrak{y} - \mathfrak{Y})^2, \tag{10}$$

wobei die LIPSCHITZ*-Schranke* $L(x)$ *jedoch noch der Einschränkung*

$$L(x) \cdot (x - x_0) \leqq 1 \quad \textit{für} \quad x_0 < x \leqq X \tag{11}$$

unterliegt. Dann ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x)$ *für* $x_0 \leqq x \leqq X$ *die einzige Lösung mit* $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$.

Beweis. Es bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wenn wir $x_0 = 0$ setzen. Die Substitution: $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$ führt auf die Differentialgleichung

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z}) = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x)) \tag{12}$$

mit der Anfangsbedingung $\mathfrak{z}(0) = 0$ und der Lösung $\mathfrak{z}(x) = 0$ für $0 \leqq x \leqq X$. Der LIPSCHITZ-Bedingung (10) entspricht die Bedingung

$$(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z})) < L(x) \cdot (\mathfrak{z}^2) \quad \text{für} \quad |\mathfrak{z}| \leqq K \quad \text{und} \quad 0 \leqq x \leqq X \tag{13}$$

mit der Einschränkung

$$L(x) \cdot x \leqq 1. \tag{14}$$

Wir betrachten nun die Röhrenbereiche

$$|\mathfrak{z}| \leq M \cdot x + N \cdot x^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq X \tag{15}$$

mit positiven Zahlen M und N, die nur durch die Ungleichung

$$M \cdot X + N \cdot X^2 \leq K \tag{16}$$

beschränkt aber sonst beliebig sind. Wenn jeder dieser Röhrenbereiche ein E-Bereich ist, so folgt auf Grund von Satz 11 die Abschätzung

$$|\mathfrak{z}(x)| \leq \underline{\text{fin}}\,(M x + N x^2) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq X \tag{17}$$

und damit die Eindeutigkeit der Lösung. Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Randpunkte $(x; \mathfrak{z})$, welche der Gleichung

$$|\mathfrak{z}| = M \cdot x + N \cdot x^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq x < X \tag{18}$$

genügen, Eintrittspunkte des Richtungsfeldes der Differentialgleichung (12)

$$\mathfrak{R}^* = \left(1; \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z})\right) \tag{19}$$

sind. — Da $\mathfrak{F}^*(0; 0) = 0$ ist, so ist der Anfangspunkt $(0; 0)$ wegen $M > 0$ stets Eintrittspunkt. Für $x > 0$ existiert die innere Normale

$$\mathfrak{N} = \left(M + 2N\,x; -\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\right) = \operatorname{grad}\left(M x + N x^2 - |\mathfrak{z}|\right). \tag{20}$$

Für das Skalarprodukt $(\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}^*)$ erhalten wir die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}^*) &= M + 2N\,x - |\mathfrak{z}| \cdot \frac{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z}))}{(\mathfrak{z})^2} \geq M + 2N\,x - (M x + N x^2) \times \\ &\times L(x) = M \cdot \left(1 - x \cdot L(x)\right) + 2N\,x \cdot \left(1 - \frac{x}{2} \cdot L(x)\right) \geq N\,x > 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

[Vgl. (18), (16), (13) und (14).]

Es ist also positiv, und nach Satz 7 sind dann alle Punkte, die für $0 < x < X$ der Gl. (18) genügen, Eintrittspunkte.

Als drittes Beispiel folgt eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes von OSGOOD [6]. (Vgl. auch SANSONE [10], S. 102.)

Satz 14. *Wie bei Satz 13, aber mit der* LIPSCHITZ*-Bedingung*

$$\left((\mathfrak{y} - \mathfrak{Y})\,(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}))\right) < h(x) \cdot w(|\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}|) \cdot |\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}|. \tag{22}$$

Hierbei sei $w(z)$ eine stetige für $z > 0$ positive und für $z = 0$ verschwindende Funktion von z mit der weiteren Eigenschaft:

$$\lim_{c \to 0}\left(\int_c^z \frac{dr}{w(r)}\right) = +\infty. \quad (c > 0) \tag{23}$$

$h(x)$ soll für $x_0 < x \leq X$ stetig sein, und das Integral

$$\int_{x_0}^{X} h(s)\,ds \tag{24}$$

soll existieren.

Beweis. Wie beim Beweis von Satz 13 mit $x_0 = 0$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$, aber entsprechend der neuen LIPSCHITZ-Bedingung (22) mit der Bedingung

$$(25) \qquad (\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x;\mathfrak{z})) < h(x) \cdot w(|\mathfrak{z}|) \cdot |\mathfrak{z}| \quad \text{für} \quad |\mathfrak{z}| \leq K.$$

Wir betrachten die Röhrenbereiche

$$(26) \qquad |\mathfrak{z}| \leq g_c(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq X,$$

wobei $g_c(x)$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(27) \qquad \frac{dg}{dx} = w(g) \cdot h(x) \quad \text{mit} \quad g(0) = c > 0$$

ist. Sie genügt mit $g = g_c(x)$ der Gleichung

$$(28) \qquad \int_c^g \frac{dr}{w(r)} = \int_0^x h(s)\, ds$$

und geht mit $c \to 0$ gleichmäßig für alle x im Intervall $0 \leq x \leq X$ gegen Null; denn die rechte Seite von (28) ist gleichmäßig beschränkt, und da $w(z)$ positiv ist, so gibt es wegen (23) zu jedem hinreichend kleinen c eine Zahl $d = d(c)$, derart daß das Integral

$$(29) \qquad \int_c^d \frac{dr}{w(r)} \geq \int_0^x h(s)\, ds$$

ist und gleichzeitig mit $c \to 0$ auch $d \to 0$ geht. Wegen (28) muß dann $g_c(x) \leq d(c)$ sein, woraus die Behauptung folgt. — Für hinreichend kleines c gilt also für alle Randpunkte $(x;\mathfrak{z})$, welche der Gleichung

$$(30) \qquad |\mathfrak{z}| = g_c(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x < X$$

genügen, die Abschätzung $|\mathfrak{z}| \leq K$, so daß wir die Bedingung (25) verwenden können. Es genügt zu beweisen, daß diese Randpunkte für $x > 0$ Eintrittspunkte sind. Eine Lösung $\mathfrak{z}(x)$ nämlich, welche für $x = 0$ durch den Anfangspunkt $(0;0)$, der ja wegen $g_c(0) > 0$ ein Randpunkt erster Art ist, in den Röhrenbereich (26) eintritt, kann für $x = 0$ nicht gleichzeitig austreten. Wir berechnen

$$(31) \qquad \mathfrak{N} = \operatorname{grad}\left(g_c(x) - |\mathfrak{z}|\right) = \left(g_c'(x); -\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\right)$$

und erhalten unter Verwendung von (27) und (22) die Abschätzung

$$(32) \qquad (\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{N}^*) = g_c'(x) - \frac{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x;\mathfrak{z}))}{|\mathfrak{z}|} = w(|\mathfrak{z}|)\left(h(x) - \frac{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x;\mathfrak{z}))}{w(|\mathfrak{z}|) \cdot |\mathfrak{z}|}\right) > 0.$$

Hieraus folgt ähnlich wie beim Beweis des vorigen Satzes die Eindeutigkeit der Lösung.

Diese Beispiele mögen zunächst genügen, um die Methode der einschließenden Röhrenbereiche zu demonstrieren. Es soll nur noch ein weiterer Eindeutigkeitssatz genannt werden, der sich auf die gleiche einfache Weise beweisen

läßt wie die Sätze 13 und 14. Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes von SCORZA-DRAGONI [11], deren Beweis hier jedoch unterdrückt werden soll.

Satz 15. *Wie bei Satz 13, mit der* LIPSCHITZ*-Bedingung von Satz 14, wobei die Funktion $w(z)$ dieselben Eigenschaften haben soll. Dagegen soll $h(x)$ eine für $x_0 < x \leq X$ positive und stetige Funktion von x sein und zu $w(z)$ in der folgenden Beziehung stehen: Es soll zu jedem $\bar{z} > 0$ ein $\bar{c} > 0$ und ein $z' > 0$ geben, derart, daß für $0 < c < \bar{c}$ die Ungleichung*

$$\int_{x_0+c}^{X} h(s)\,ds \leq \int_{cz'}^{\bar{z}} \frac{dr}{w(r)} \tag{33}$$

erfüllt ist.

§ 4. Eine spezielle Klasse von Röhrenbereichen.

1. Definitionen. Ein spezieller Röhrenbereich

$$R = R\big(\mathfrak{y}(x); \mathfrak{p}(\mathfrak{z}), g(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b \tag{1}$$

soll die folgenden Bedingungen erfüllen.

Erstens gilt für die Funktion $\mathfrak{y}(x)$: $\mathfrak{y}(x)$ ist für $a \leq x < b$ nach rechts differenzierbar und erfüllt eine LIPSCHITZ-Bedingung

$$|\mathfrak{y}(x_1) - \mathfrak{y}(x_2)| \leq K \cdot |x_1 - x_2|. \tag{2}$$

Zweitens gilt für die Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$:

(3) $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ ist positiv für $\mathfrak{z} \neq 0$ und stetig für alle $\mathfrak{z}$,

$$\mathfrak{p}(h \cdot \mathfrak{z}) = h \cdot \mathfrak{p}(\mathfrak{z}) \quad \text{für} \quad h \geq 0, \tag{4}$$

$\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ erfüllt eine LIPSCHITZ-Bedingung

$$|\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_2)| \leq C \cdot |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| \tag{5}$$

oder die in Verbindung mit (3) und (4) schärfere Bedingung

$$|\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_2)| \leq \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) \tag{5a}$$

und ist nach jeder Richtung hin differenzierbar. Das soll heißen: Es existiert für jeden n-dimensionalen Vektor $\mathfrak{v}$ und $t > 0$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(\mathfrak{p}(\mathfrak{z} + t \cdot \mathfrak{v}) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z})\big) = [\mathfrak{v} \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z}). \tag{6}$$

Drittens gilt für die Funktion $g(x)$:

$$g(x) > 0 \quad \text{für} \quad a < x < b, \quad g(a) \geq 0 \quad \text{und} \quad g(b) \geq 0; \tag{7}$$

$g(x)$ erfüllt eine LIPSCHITZ-Bedingung

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq c \cdot |x_1 - x_2| \tag{8}$$

und

$$g(x) \quad \text{ist für} \quad a \leq x < b \tag{9}$$

nach rechts differenzierbar.

Ergänzend wird gezeigt, daß aus der Bedingung (5a) in Verbindung mit den Voraussetzungen (3) und (4) eine LIPSCHITZ-Bedingung (5) folgt. Es gilt nämlich die Abschätzung

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) = |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| \cdot \mathfrak{p}\left(\frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2}{|\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|}\right) \leq |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| \cdot \operatorname{Max}\left(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^0)\right), \tag{10}$$

so daß die LIPSCHITZ-Bedingung (5) erfüllt ist, wenn man für C das wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ sicher existierende Maximum von $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^0)$ für alle Einheitsvektoren $\mathfrak{z}^0$ einsetzt. Durch Verwendung der Bedingung (5a) können also die zur Anwendung kommenden Funktionen $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ weiter spezialisiert werden. Die Bedingung (5a) ist äquivalent mit der Bedingung

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1) + \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_2) \geq \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2) \quad \text{mit beliebigen } \mathfrak{z}_1 \text{ und } \mathfrak{z}_2 \tag{11}$$

oder auch äquivalent der Bedingung

$$\mathfrak{p}\left((1-j)\,\mathfrak{z}_1 + j \cdot \mathfrak{z}_2\right) \leq (1-j) \cdot \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1) + j \cdot \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_2) \quad \text{für} \quad 0 \leq j \leq 1, \tag{12}$$

was bedeutet, daß die Punktmenge $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}) \leq \text{const}$ konvex ist.

Anmerkung. Die $\mathfrak{v}$-Ableitung von $\mathfrak{p}$ an der Stelle $\mathfrak{z}$ stellt gewissermaßen eine Verallgemeinerung der Gradientenbildung dar. Wenn nämlich der Gradient von $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ existiert und stetig ist, so ist

$$[\mathfrak{v} \bigtriangledown \mathfrak{p}](\mathfrak{z}) = \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}). \tag{13}$$

Dieses kann an Hand von (6) unmittelbar eingesehen werden.

2. Folgerungen. Auf Grund der über die Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ gemachten Voraussetzungen können folgende weitere Aussagen gemacht werden.

Satz 16. *Bezeichnet man mit $\mathfrak{z}^0$ den mit $\mathfrak{z}$ gleichgerichteten Einheitsvektor, so gibt es für $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^0)$ ein positives Minimum*

$$\underline{P} = \operatorname{Min} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}^0) \leq \mathfrak{p}(\mathfrak{z}^0) \quad \textit{für alle } \mathfrak{z}^0. \tag{1}$$

Also folgt weiter für zwei gleichgerichtete Vektoren $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ die Abschätzung

$$|\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_2)| \geq \underline{P} \cdot |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|. \tag{2}$$

Beweis. Auf der abgeschlossenen Punktmenge aller $\mathfrak{z}^0$ (Oberfläche einer n-dimensionalen Einheitskugel) nimmt die auf Grund der LIPSCHITZ-Bedingung (1.5) stetige Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ ihr Minimum an. Dies ist wegen (1.3) positiv. So folgt die Behauptung (1). Die Abschätzung (2) folgt dann aber sofort auf Grund der Voraussetzung (1.4).

Ferner gilt für die durch den Grenzwert (1.6) definierte $\mathfrak{v}$-Ableitung von $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ der

Satz 17. *Die $\mathfrak{v}$-Ableitung von $\mathfrak{p}$ an der Stelle $\mathfrak{z}$ erfüllt als Funktion von $\mathfrak{v}$ die* LIPSCHITZ-*Bedingung bzw. Bedingung*:

$$(3)\qquad |[\mathfrak{v}_1 \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z}) - [\mathfrak{v}_2 \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z})| \leq C \cdot |\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2|, \quad \text{bzw.} \quad \leq \mathfrak{p}(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)$$

mit der LIPSCHITZ-*Schranke C nach* (1.5) *und die Relationen*

$$(4)\qquad [(h \cdot \mathfrak{v}) \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z}) = h \cdot [\mathfrak{v} \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z}) \quad \textit{für} \quad h \geq 0$$

und

$$(5)\qquad [\mathfrak{v} \nabla \mathfrak{p}](h \cdot \mathfrak{z}) = [\mathfrak{v} \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z}) \quad \textit{für} \quad h > 0.$$

Beweis. Wegen (1.5), (1.6) gilt die Abschätzung

$$|[\mathfrak{v}_1 \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z}) - [\mathfrak{v}_2 \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z})| = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot |\mathfrak{p}(\mathfrak{z} + t \cdot \mathfrak{v}_1) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z} + t \cdot \mathfrak{v}_2)|$$

$$\leq \lim_{t \to 0} \frac{C}{t} \cdot |t \cdot \mathfrak{v}_1 - t \cdot \mathfrak{v}_2| = C \cdot |\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2|, \quad \text{bzw.} \quad \lim \frac{1}{t} \mathfrak{p}(t(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)) = \mathfrak{p}(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2).$$

Damit ist die Behauptung (3) bewiesen. — Die Relation (4) ist für $h = 0$ trivial. Für $h > 0$ setzen wir $h \cdot t = s$ und erhalten entsprechend (1.6) die Gleichung

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\mathfrak{p}(\mathfrak{z} + t h \cdot \mathfrak{v}) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z})) = h \cdot \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} (\mathfrak{p}(\mathfrak{z} + s \mathfrak{v}) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z})),$$

womit (4) bewiesen ist. Zum Beweis der Relation (5) setzen wir $t = h \cdot s$ und erhalten entsprechend unter Verwendung von (1.4):

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\mathfrak{p}(h \mathfrak{z} + t \mathfrak{v}) - \mathfrak{p}(h \mathfrak{z})) = \lim_{s \to 0} \frac{h}{h s} (\mathfrak{p}(\mathfrak{z} + s \mathfrak{v}) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z})).$$

Damit ist auch die Relation (5) bewiesen.

3. Abschätzungen für $u(\mathfrak{x})$. Es gilt der

Satz 18. *Ist $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ ein Punkt aus G mit $a \leq x < b$, so genügt die unter* § 2.1 *definierte Funktion $u(\mathfrak{x})$ der Abschätzung*

$$(1)\qquad \underline{P} \cdot |u(\mathfrak{x})| \leq |g(x) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x))|.$$

Beweis. Man betrachte bei festem x die Randpunkte $\mathfrak{x}_\nu = (x; \mathfrak{y}_\nu)$, für die definitionsgemäß $g(x) = \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_\nu - \mathfrak{Y}(x))$ ist, und wähle $\mathfrak{y}_\nu$ gerade so, daß die Vektoren $\mathfrak{z}_\nu = \mathfrak{y}_\nu - \mathfrak{Y}(x)$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)$ gleichgerichtet sind. Dann erhält man unter Verwendung von Satz 16 die Abschätzung

$$|g(x) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x))| = |\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_\nu) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z})| \geq \underline{P} \cdot |\mathfrak{z}_\nu - \mathfrak{z}| = \underline{P} \cdot |\mathfrak{x}_\nu - \mathfrak{x}| \geq \underline{P} \cdot |u(\mathfrak{x})|;$$

denn definitionsgemäß enthält die Umgebung von $\mathfrak{x}$ mit dem Radius $|u(\mathfrak{x})|$ niemals einen Randpunkt $\mathfrak{x}_\nu$ im Inneren.

Eine zweite Abschätzung erhalten wir in dem

Satz 19. *Ist* $\mathfrak{x}_0=(x_0;\mathfrak{y}_0)$ *ein Randpunkt mit* $a\leq x_0<b$ *(Randpunkt dritter Art), und ist* $\mathfrak{x}=(x;\mathfrak{y})$ *ein hinreichend nahe an* $\mathfrak{x}_0$ *gelegener Punkt mit* $x_0\leq x<b$, *so gilt die Abschätzung*

$$|u(\mathfrak{x})|\geq \operatorname{Min}\left(x-x_0;\ \frac{1}{W}\cdot|g(x)-p(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))|\right) \tag{2}$$

mit $W=\sqrt{(c+CK)^2+C^2}$, *wobei für* c, C *und* K *die* Lipschitz-*Schranken nach* § 4, 1.(8), (5) *und* (2) *eingesetzt sind.*

Beweis. Da $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt aus G und außerdem $x_0<b$ ist, so gibt es eine abgeschlossene $(n+1)$-dimensionale Kugelumgebung von $\mathfrak{x}_0$ mit einem Radius $r=2s$, welche nur aus Punkten von G besteht, aber keinen Punkt aus der Hyperebene $x=b$ enthält. Man betrachte nun einen Punkt $\mathfrak{x}=(x;\mathfrak{y})$ mit $|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0|\leq s$. Die abgeschlossene Kugel um $\mathfrak{x}$ mit dem Radius $|u(\mathfrak{x})|$ liegt dann ebenfalls ganz in G und enthält keinen Punkt aus der Hyperebene $x=b$, da ja auf jeden Fall $|u(\mathfrak{x})|\leq|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0|\leq s$ ist. Einer der Randpunkte dieser Kugel um $\mathfrak{x}$ muß nach Definition von $u(\mathfrak{x})$ entweder ein Randpunkt des Röhrenbereiches oder ein nicht mehr zu G gehörender Punkt sein. Da die zweite Möglichkeit nicht mehr besteht, so gibt es also einen Randpunkt $\mathfrak{x}_r=(x_r;\mathfrak{y}_r)$ des Röhrenbereiches, welcher der Gleichung $|\mathfrak{x}_r-\mathfrak{x}|=|u(\mathfrak{x})|$ genügt. Dieser Punkt ist entweder ein Randpunkt erster Art mit $x_r=a$, $\mathfrak{y}_r=\mathfrak{y}$ und $p(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(a))<g(a)$ oder ein Randpunkt dritter Art, welcher der Gleichung: $g(x_r)=p(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(x_r))$ genügt.

Im ersten Falle gilt offenbar die Abschätzung

$$|u(\mathfrak{x})|=x-a\geq x-x_0. \tag{3}$$

Im anderen Falle erhält man unter Verwendung der Lipschitz-Schranken nach § 4, 1.(2), (5), (8) und der Schwarz*schen Ungleichung* die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(4)\quad |g(x)-p(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))| &= |(g(x)-g(x_r))-(p(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))-p(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(x_r)))|\\ &\leq |g(x)-g(x_r)|+|p(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))-p(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(x_r))|\\ &\leq c\cdot|x-x_r|+C\cdot(|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_r|+|\mathfrak{Y}(x)-\mathfrak{Y}(x_r)|)\\ &\leq c\cdot|x-x_r|+C\cdot|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_r|+C\cdot K\cdot|x-x_r|\\ &\leq \sqrt{(c+CK)^2+C^2}\cdot\sqrt{(x-x_r)^2+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_r)^2}=W\cdot|u(\mathfrak{x})|.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also die Abschätzung (2).

4. Eintritts-, Austritts- und Gleitrichtungen. Für die Röhrenbereiche der speziellen Klasse gelten die folgenden Kriterien:

Satz 20. *Der* $(n+1)$*-dimensionale Vektor* $\mathfrak{w}=(1;\mathfrak{v})$ *hat im Randpunkte* $\mathfrak{x}_0=(x_0;\mathfrak{y}_0)$ *mit* $a\leq x_0<b$ *und* $g(x_0)=p(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{Y}(x_0))$ *genau dann Eintrittsrichtung, wenn die Ungleichung*

$$g'_+(x_0)>[(\mathfrak{v}-\mathfrak{Y}'_+(x_0))\nabla p](\mathfrak{y}_0-\mathfrak{Y}(x_0)) \tag{1}$$

gilt, genau dann Austrittsrichtung, wenn die Ungleichung

$$g'_+(x_0) < [(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0)) \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)) \tag{2}$$

gilt und genau dann Gleitrichtung, wenn die Gleichung

$$g'_+(x_0) = [(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0)) \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)) \tag{3}$$

gilt, wobei $g'_+(x_0)$ bzw. $\mathfrak{Y}'_+(x_0)$ die rechtsseitigen Ableitungen von $g(x)$ bzw. $\mathfrak{Y}(x)$ an der Stelle $x = x_0$ bedeuten.

Beweis. Zunächst läßt sich zeigen, daß die rechten Seiten der Ungleichungen (1) und (2) bzw. der Gl. (3) gleich dem Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\mathfrak{p}(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0))) = [(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0)) \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)) \tag{4}$$

mit $x = x_0 + t$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v}$ ist. Dieser ist nämlich gleich

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0) + t(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0))) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0))), \tag{5}$$

weil der Unterschied zwischen den Grenzwerten (4) und (5):

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(|\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t)) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0) - t\cdot\mathfrak{Y}'_+(x_0))|) \\ \qquad \leq C \cdot \lim\limits_{t\to 0} \left| \frac{1}{t}\,(\mathfrak{Y}(x_0 + t) - \mathfrak{Y}(x_0)) - \mathfrak{Y}'_+(x_0) \right| = 0 \end{cases} \tag{6}$$

auf Grund der LIPSCHITZ-Bedingung (§ 4, 1.(5)) und nach Definition der Ableitung verschwindet. Ferner ist die linke Seite von (1), (2) oder (3) gleich dem Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(g(x_0 + t) - g(x_0)) = g'_+(x_0). \tag{7}$$

Berücksichtigt man nun noch die vorausgesetzte Gleichung:

$$g(x_0) = \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)),$$

so erkennt man sofort, daß das Bestehen der Ungleichungen (1) bzw. (2) bzw. der Gl. (3) damit gleichbedeutend ist, daß der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(g(x_0 + t) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))) > 0, \quad (< 0) \quad \text{bzw.} \quad (= 0) \tag{8}$$

positiv bzw. negativ bzw. gleich Null ist. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall. Der Grenzwert (8) ist positiv. Dann sind die Punkte $\mathfrak{x}(t) = (x_0 + t;\ \mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v})$ für hinreichend kleine Werte von $t > 0$ sämtlich Innenpunkte, weil nur in diesem Falle $g(x_0 + t) > \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\,\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))$ sein kann. Dann kann aber der Vektor $\mathfrak{w} = (1;\mathfrak{v})$, bzw. der gleichgerichtete Einheitsvektor $\mathfrak{w}^0$, auf keinen Fall Austrittsrichtung haben. (Vgl. Satz 6 mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \mathfrak{w}^0$.) Er hat also Eintritts- oder Gleitrichtung.

Zweiter Fall. Der Grenzwert (8) ist negativ. Dann folgt in entsprechender Weise, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ nur Austritts- oder Gleitrichtung haben kann.

Dritter Fall. Der Grenzwert (8) ist gleich Null. Dann folgt mit Hilfe von Satz 18, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ Gleitrichtung haben muß. Wenn man nämlich die unter Satz 18 stehende Ungleichung (1) beiderseits durch den positiven Wert t dividiert und $\mathfrak{x} = (x_0 + t; \mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v})$ einsetzt, so erhält man nach dem Grenzübergang die Abschätzung

$$(9) \qquad \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x})| \right) \leq \frac{1}{P} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(|g(x_0 + t) - p(\mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))| \right) = 0.$$

Dieses ist aber nach § 2, 2.(2) gleichbedeutend damit, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ bzw. $\mathfrak{n} = \mathfrak{w}^0$ Gleitrichtung hat.

Schließlich kann man unter Verwendung von Satz 19 auch noch zeigen, daß in den ersten beiden Fällen der Vektor $\mathfrak{w}$ in Wirklichkeit niemals Gleitrichtung haben kann, womit dann der Satz 20 endlich bewiesen ist. Hat der Vektor $\mathfrak{w}$ bzw. der gleichgerichtete Einheitsvektor $\mathfrak{w}^0$ Gleitrichtung, so gilt nach Definition der Gleitrichtungen [§ 2, 2.(2)] mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{w}^0$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}$ die Ungleichung

$$(10) \qquad \underline{\lim} \frac{1}{t} \left(u(\mathfrak{x}) \right) \leq 0 \leq \overline{\lim} \frac{1}{t} \left(u(\mathfrak{x}) \right) \qquad \left(u(\mathfrak{x}_0) = 0 \right)!$$

Da nun $u(\mathfrak{x})$ als Funktion von t stetig ist, so folgt daraus sofort die Gleichung

$$(11) \qquad \underline{\lim} \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{w}^0)| \right) = \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \cdot \underline{\lim} \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{w})| \right) = 0.$$

Nach Satz 19 gilt nun aber, wenn man auf der rechten Seite der dort stehenden Ungleichung (2) $x = x_0 + t$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v}$ einsetzt und anschließend beide Seiten durch t dividiert, die Abschätzung

$$(12) \qquad \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{w})| \right) \geq \operatorname{Min} \left(1; \frac{1}{W \cdot t} \left(|g(x_0 + t) - p(\mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))| \right) \right).$$

Wäre nun der sicher existierende Grenzwert der rechten Seite dieser Ungleichung positiv, so wäre auch jeder Häufungswert der linken Seite positiv, was aber der Gl. (11) widersprechen würde. Der Grenzwert der rechten Seite ist also gleich Null und damit auch der Grenzwert (8). Dieser Sachverhalt widerspricht jedoch den Voraussetzungen zu den ersten beiden Fällen. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

5. Einschließende Röhrenbereiche. Notwendig und hinreichend dafür, daß der Röhrenbereich $R\left(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\right)$ für $a \leq x \leq b$ ein einschließender Röhrenbereich für die Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ ist, ist, daß das Richtungsfeld $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = \left(1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})\right)$ für alle Randpunkte dritter Art, die für $a \leq x < b$ der Gleichung $g(x) = p\left(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)\right)$ genügen, Eintrittsrichtung hat. Unter Verwendung des Satzes 20 [Ungleichung (1)] erhält man dann mit $\mathfrak{w} = \mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ und $x_0 = x$ sofort den

Satz 21. *Der spezielle Röhrenbereich $R\left(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\right)$ ist für $a \leq x \leq b$ genau dann ein einschließender Röhrenbereich für die Differentialgleichung*

$\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, *wenn für alle Randpunkte* $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ *mit* $a \leq x < b$ *und* $g(x) = p(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x))$ *die Ungleichung*

$$(1) \qquad g'_+(x) > \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{Y}'_+(x)\right) \triangledown p\right](\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x))$$

erfüllt ist.

6. Hüllfunktion und LIPSCHITZ-Grenze. Wenn wir in Satz 21 $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$ setzen, so erhalten wir die Aussage, daß ein spezieller Röhrenbereich $R(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x))$ genau dann ein einschließender Röhrenbereich ist, wenn für jedes feste x im Intervall $a \leq x < b$ und alle n-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{z}$, die der Gleichung: $p(\mathfrak{z}) = g(x)$ genügen, die Ungleichung:

$$(1) \qquad g'_+(x) > \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}) - \mathfrak{Y}'_+(x)\right) \triangledown p\right](\mathfrak{z})$$

erfüllt ist. Wenn wir die Funktionen $\mathfrak{Y}(x)$ und $p(\mathfrak{z})$ als gegeben betrachten, so stellt diese Ungleichung eine Bedingung für die noch zu bestimmende Funktion $g(x)$ dar. Bei festem x steht auf der linken Seite die rechtsseitige Ableitung von $g(x)$, also eine Konstante, während auf der rechten Seite eine Funktion des Vektors $\mathfrak{z}$ steht, der allerdings noch durch die Bedingung: $p(\mathfrak{z}) = g(x)$ eingeschränkt ist. Somit steht rechts eine $(n-1)$-parametrige Schar von Zahlen, auf deren obere Grenze es offenbar ankommt. Diese hängt dann nur noch von dem Wert der Funktion $g(x)$ ab. Von der Existenz dieser oberen Grenze hängt es nun wesentlich ab, ob es eine der Bedingung (1) genügende Funktion $g(x)$ überhaupt gibt. Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz:

Satz 22. *Für jeden festen Punkt* $\mathfrak{x}_1 = (x; \mathfrak{Y})$ *aus* G *ist die obere Grenze* $\bar{g}(x; \mathfrak{Y})$ *all der Zahlen* g, *für die unter der Nebenbedingung:* $p(\mathfrak{z}) \leq g$ *sämtliche Punkte* $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y}) = (x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z})$ *auch noch in* G *liegen, entweder eine positive Zahl, oder die Zahlen* g *können beliebig groß sein. Dann setzen wir* $\bar{g}(x; \mathfrak{Y}) = +\infty$. *Für* $g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y})$ *liegen dann auch alle oben bezeichneten Punkte* $\mathfrak{x}$ *in* G.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem Punkt $\mathfrak{x}_1 = (x; \mathfrak{Y})$ positive Zahlen g gibt, so daß mit $p(\mathfrak{z}) \leq g$ sämtliche Punkte $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z})$ zu G gehören. Nach Satz 16 mit $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_2 = 0$ ist aber wegen $p(\mathfrak{z}) \leq g$ für hinreichend kleines g auch $|\mathfrak{z}|$ so klein, daß die oben bezeichneten Punkte $\mathfrak{x}$ in der offenen Menge G enthalten sein müssen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Alsdann *definieren* wir die Punktmengen:

$$(2) \qquad J(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g) \quad \text{bzw.} \quad \bar{J}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$$

im $(2n+2)$-dimensionalen Raum der Punkte $S = (x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ wie folgt: Die Punkte $(x; \mathfrak{Y})$ liegen in G. $\mathfrak{Y}'$ ist ein beliebiger n-dimensionaler Vektor mit derselben Orthogonalbasis wie $\mathfrak{Y}$. Die Zahl g genügt den Ungleichungen:

$$(3) \qquad 0 < g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y}) \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y}).$$

Schließlich betrachten wir die Ausdrücke

$$(4) \qquad D(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; \mathfrak{z}) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown p\right](\mathfrak{z})$$

und wollen ihre obere Grenze bei festem $(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}')$ und variablem $\mathfrak{z}$ unter der Nebenbedingung: $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}) = g$:

$$H(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g) = \overline{\text{fin}}\, D(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; \mathfrak{z}) \tag{5}$$

die *Hüllfunktion* der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ bezüglich der Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ nennen. Daneben betrachten wir die Ausdrücke

$$\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g, \mathfrak{z}^*) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}^*) \tag{6}$$

und wollen deren obere Grenze bei festem $(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ und variablem $\mathfrak{z}^*$ unter der Nebenbedingung: $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^*) = 1$:

$$\overline{H}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g) = \overline{\text{fin}}\, \overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g, \mathfrak{z}^*) \tag{7}$$

die *ergänzte Hüllfunktion* nennen. Es gilt nun der

Satz 23. *Die Hüllfunktion $H(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ ist in der ganzen Punktmenge J stetig. Die ergänzte Hüllfunktion ist in der ganzen Punktmenge $\bar{J}$ stetig. Für $g > 0$, also in der Punktmenge J, ist $H = \overline{H}$. Für $g = 0$ ist $H \leq \overline{H}$. Ist aber $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ konvex (vgl. § 4, 1.(5a)), dann ist auch für $g = 0$ $H = \overline{H}$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß die Hüllfunktion für $g > 0$ mit der ergänzten Hüllfunktion übereinstimmt. Hierzu setzen wir $\mathfrak{z} = g \cdot \mathfrak{z}^*$. Dann ist die Nebenbedingung: $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{p}(g \cdot \mathfrak{z}^*) = g \cdot \mathfrak{p}(\mathfrak{z}^*) = g$ zu (5) gleichbedeutend mit der Nebenbedingung zu (7). Ebenso stimmen die Ausdrücke (4) und (6) überein für $\mathfrak{z} = g \cdot \mathfrak{z}^*$; denn es ist

$$\left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](g \cdot \mathfrak{z}^*) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}^*) \tag{8}$$

auf Grund von Satz 17 (5). Dann müssen aber auch ihre oberen Grenzen übereinstimmen. Alsdann zeigen wir, daß für $g = 0$ die Ungleichung $H \leq \overline{H}$ gilt. Wir erhalten nämlich für $g = 0$ die Gleichung

$$H(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0) = D(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](0) = \mathfrak{p}\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right). \tag{9}$$

Diesen Wert nimmt aber der Ausdruck $\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0, \mathfrak{z}^*)$ für denjenigen Vektor $\mathfrak{z}^*$, der dem Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'$ gleichgerichtet ist, auch an. Daraus folgt unmittelbar die behauptete Ungleichung; denn der Ausdruck $\overline{D}$ kann nicht größer sein als seine obere Grenze $\overline{H}$. Wenn nun aber die Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ *konvex* ist, so erhalten wir mit Hilfe des Satzes 17, indem wir dort $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{v}_2 = 0$ setzen, die Abschätzung

$$\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0, \mathfrak{z}^*) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}^*) \leq \mathfrak{p}\left(\mathfrak{F}(x, \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right). \tag{10}$$

Da diese Abschätzung für alle $\mathfrak{z}^*$ mit $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^*) = 1$ gleichmäßig gilt, ist sie auch für die obere Grenze $\overline{H}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0)$ richtig. Durch Vergleich mit (9) erhält man sofort die Ungleichung: $H \geq \overline{H}$. Dies ergibt im Verein mit der oben bewiesenen Ungleichung: $H \leq \overline{H}$ die Behauptung. — Hiernach ist nur noch zu zeigen, daß die ergänzte Hüllfunktion in der ganzen Punktmenge $\bar{J}$ als stetige Funktion von $S = (x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ existiert. — Man kann leicht zeigen, daß die Ausdrücke $\overline{D}(S, \mathfrak{z}^*)$ für jeden festen Punkt S in $\bar{J}$ als Funktion von

$\mathfrak{z}^*$ eine obere Schranke besitzen, woraus die *Existenz* ihrer oberen Grenze $\overline{H}(S)$ unmittelbar folgt. Nach Satz 17 ist nämlich mit $\mathfrak{v}_2 = 0$ und $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'$:

$$|\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g, \mathfrak{z}^*)| \leq C \cdot |\mathfrak{F}(x; + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'|. \tag{11}$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung bei festem S als stetige Funktion des Vektors $\mathfrak{z}^*$ [vgl. (3)] auf der abgeschlossenen Menge aller $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ einen *Maximalwert* annimmt, ist damit die Existenz einer von $\mathfrak{z}^*$ unabhängigen Schranke für die Ausdrücke $\overline{D}(S, \mathfrak{z}^*)$ nachgewiesen. — Somit ist nur noch nachzuweisen, daß $\overline{H}(S)$ *stetig* ist. Wir zeigen es wie folgt: Die Ausdrücke $\overline{D}(S, \mathfrak{z}^*)$, deren obere Grenze die Funktion $\overline{H}(S)$ ist, sind für jedes feste $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ stetige Funktionen von S; und zwar sind sie in jedem Punkte S für alle $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ *gleichgradig stetig*. Hierzu betrachten wir einen festen Punkt $S_1 = (x_1; \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_1'; g_1)$ und einen hinreichend nahe an S_1 gelegenen Punkt $S_2 = (x_2; \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_2'; g_2)$, wobei beide Punkte in $\bar{J}$ liegen sollen. Dann gilt mit $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{F}(x_1; \mathfrak{Y}_1 + g_1 \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}_1'$ und $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{F}(x_2; \mathfrak{Y}_2 + g_2 \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}_2'$ nach Satz 17 (3) die Abschätzung:

$$\begin{cases} |\overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*)| \leq C \cdot |\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1| \\ \qquad\qquad \leq C \cdot |\mathfrak{F}(x_2; \mathfrak{Y}_2 + g_2 \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{F}(x_1; \mathfrak{Y}_1 + g_1 \cdot \mathfrak{z}^*)| + C \cdot |\mathfrak{Y}_2' - \mathfrak{Y}_1'|. \end{cases} \tag{12}$$

Diese Abschätzung gilt für jedes feste $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$. Wir erklären nun in der Punktmenge $\bar{J}$ eine Metrik durch die Gleichung:

$$|S_2 - S_1| = |x_2 - x_1| + |\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1| + \frac{1}{\underline{P}} \cdot |g_2 - g_1| + |\mathfrak{Y}_2' - \mathfrak{Y}_1'| \tag{13}$$

mit der Zahl $\underline{P}$ von Satz 16. Man erkennt sofort, daß der Reziprokwert dieser Zahl gleich dem Maximalwert des Betrages von $\mathfrak{z}^*$ unter der Nebenbedingung $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ ist. Liegt also S_2 hinreichend nahe an S_1, so daß $|S_2 - S_1| \leq \delta$ ist, so liegen auch die Punkte $\mathfrak{x}_2 = (x_2, \mathfrak{y}_2)$ mit $\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{Y}_2 + g_2 \cdot \mathfrak{z}^*$ gleichmäßig für alle $\mathfrak{z}^*$ mit jeweils demselben $\mathfrak{z}^*$ so nahe an den Punkten $\mathfrak{x}_1 = (x_1; \mathfrak{y}_1)$ mit $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{Y}_1 + g_1 \cdot \mathfrak{z}^*$, daß $|\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1| \leq \delta$ ist. Ist δ hinreichend klein, so gehören die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ alle einer abgeschlossenen Teilmenge von G an, in der auf Grund der vorausgesetzten Stetigkeit von $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ diese Funktion gleichmäßig stetig ist. Es gibt also zu jedem vorgegebenen ε eine Zahl $\delta(\varepsilon)$, derart, daß der erste Term der Schranke unter (12) gleichmäßig für alle $\mathfrak{z}^*$ nicht größer als $\varepsilon/2$ ist. Hierbei kann man gleichzeitig erreichen, daß auch der zweite Term unter (12) unter derselben Schranke liegt. Man braucht ja nur δ so klein zu wählen, daß $2C \cdot \delta \leq \varepsilon$ ist. Es gibt also unabhängig von $\mathfrak{z}^*$ zu jedem ε ein $\delta(\varepsilon)$, so daß

$$|\overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*)| \leq \varepsilon \tag{14}$$

ist, wenn nur $|S_2 - S_1| \leq \delta(\varepsilon)$ ist, wobei die Zahl $\delta(\varepsilon)$ außerdem noch von S_1 abhängen wird. Wir halten nun die Punkte S_1 und S_2 beide fest und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{cases} \overline{H}(S_1) = \overline{\text{fin}}\, \overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*) = \overline{\text{fin}}\, (\overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) + (\overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*))) \\ \qquad \leq \overline{\text{fin}}\, \overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) + \overline{\text{fin}}\, (\overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*)) \leq \overline{H}(S_2) + \varepsilon. \end{cases} \tag{15}$$

Eine entsprechende Abschätzung gilt nach Vertauschung der Punkte S_1 mit S_2. Wir erhalten danach die Abschätzung: $|\overline{H}(S_2)-\overline{H}(S_1)\leq\varepsilon$ für festen Punkt S_1 und alle Punkte S_2 mit $|S_2-S_1|\leq\delta(\varepsilon)$. Damit ist der Satz 23 vollständig bewiesen.

Eine besondere Beachtung verdient die Hüllfunktion $H(x;\mathfrak{y},\mathfrak{y}';g)$ für den Fall, daß $\mathfrak{y}'=\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y})$ gesetzt wird. Man erkennt sofort, daß dann die Hüllfunktion $H(x;\mathfrak{y},\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y});g)$ mit der ergänzten Hüllfunktion

$$\overline{H}(x;\mathfrak{y},\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y});g)$$

vollständig übereinstimmt, da beide Funktionen für $g=0$ den Wert Null haben. Man erkennt dies sofort, wenn man die entsprechenden Ausdrücke D und $\overline{D}$ betrachtet, die beide ($\overline{D}$ unabhängig von $\mathfrak{z}^*$) den Wert Null haben. Der Ausdruck

$$D(x;\mathfrak{y},\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y});\mathfrak{z})=[(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(\dot{x};\mathfrak{y}))\triangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z}) \tag{16}$$

hat die typische Form eines LIPSCHITZ-Ausdruckes. Setzt man etwa speziell $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})=|\mathfrak{z}|$, so ist nämlich

$$[(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}))\triangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z})=(\mathfrak{z}^0\cdot(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}))), \tag{17}$$

wobei $\mathfrak{z}^0$ der dem Vektor $\mathfrak{z}$ gleichgerichtete Einheitsvektor ist. Wir wollen deshalb den Ausdruck (16) den zur Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ gehörenden LIPSCHITZ-*Ausdruck* nennen. Entsprechend wollen wir die obere Grenze dieses Ausdruckes unter der Nebenbedingung $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})=g$:

$$L(x;\mathfrak{y},g)=\overline{\text{fin}}\,[(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}))\triangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z}) \tag{18}$$

die zur Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ gehörende LIPSCHITZ-*Grenze* nennen. Sie ist für alle Punkte $(x;\mathfrak{y})$ aus G und alle Werte von g mit der Einschränkung: $0\leq g<\bar{g}(x;\mathfrak{y})$ (vgl. Satz 22) definiert und stetig. Aus ihrer Eigenschaft als obere Grenze des LIPSCHITZ-Ausdruckes (16) für $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})=g$ folgt unmittelbar die LIPSCHITZ-*Bedingung*:

$$[(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}))\triangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z})\leq L(x;\mathfrak{y},\mathfrak{p}(\mathfrak{z})), \tag{19}$$

die für $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})<\bar{g}(x;\mathfrak{y})$ stets erfüllt ist. Daß $L(x;\mathfrak{y},\mathfrak{p}(\mathfrak{z}))$ gleichzeitig die kleinstmögliche LIPSCHITZ-*Schranke* von der Form $M(x;\mathfrak{y},\mathfrak{p}(\mathfrak{z}))$ für $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})<\bar{g}(x;\mathfrak{y})$ ist, folgt auch aus ihrer Eigenschaft als obere Grenze. Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der LIPSCHITZ-Grenze ergibt sich aus dem folgenden

Satz 24. *Die Hüllfunktion $H(x;\mathfrak{y},\mathfrak{y}';g)$ genügt der Abschätzung*

$$H(x;\mathfrak{y},\mathfrak{y}';g)\leq L(x;\mathfrak{y},g)+C\cdot|\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}))-\mathfrak{y}'|, \tag{20}$$

und wenn $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ konvex ist, sogar der Abschätzung

$$H(x;\mathfrak{y},\mathfrak{y}';g)\leq L(x;\mathfrak{y},g)+\mathfrak{p}(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}))-\mathfrak{y}'). \tag{21}$$

Beweis. Aus Satz 17 folgt mit beliebigen Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die Abschätzung:

$$[\mathfrak{v}_1\triangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z})\leq[\mathfrak{v}_2\triangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z})+C\cdot|\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_2|$$

bzw. die Abschätzung:

$$[\mathfrak{v}_1 \triangledown p](\mathfrak{z}) \leq [\mathfrak{v}_2 \triangledown p](\mathfrak{z}) + p(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2).$$

Daraus ergibt sich sofort die Abschätzung:

$$D(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'; \mathfrak{z}) \leq D(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}); \mathfrak{z}) + C \cdot |\mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'| \tag{22}$$

bzw. die Abschätzung:

$$D(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'; \mathfrak{z}) \leq D(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}); \mathfrak{z}) + p(\mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'). \tag{22a}$$

Beim Übergang zu den oberen Grenzen $H = \overline{\text{fin}}\, D(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'; \mathfrak{z})$ und $L = \overline{\text{fin}}\, D(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}); \mathfrak{z})$ erhält man schließlich die Abschätzungen von Satz 24.

Als Folge des Satzes 21 gilt nun der

Satz 25. *Hinreichend dafür, daß der spezielle Röhrenbereich* $R(\mathfrak{y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x))$ *für* $a \leq x \leq b$ *ein einschließender Röhrenbereich ist, ist das Bestehen der Ungleichung*:

$$g'_+(x) > H(x; \mathfrak{y}(x), \mathfrak{y}'_+(x); g(x)) \quad \text{für} \quad a \leq x < b. \tag{23}$$

Notwendig dafür ist aber das Bestehen der Ungleichung:

$$g'_+(x) \geq H(x; \mathfrak{y}(x), \mathfrak{y}'_+(x); g(x)) \quad \text{für} \quad a \leq x < b. \tag{24}$$

7. Existenz von einschließenden Röhrenbereichen. Wir betrachten die Differentialungleichung:

$$g'_+ > L^*(x; g) + r(x) \tag{1}$$

mit $L^*(x; g) = L(x; \mathfrak{y}(x), g)$ und $r(x) = C \cdot |\mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}(x)) - \mathfrak{y}'_+(x)|$ bzw. mit $r(x) = p(\mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}(x)) - \mathfrak{y}'_+(x))$ in dem Bereich G^* der $(x; g)$-Ebene, der durch die Ungleichungen $a \leq x \leq b$ und $0 \leq g < \bar{g}(x; \mathfrak{y}(x))$ bestimmt ist. In diesem Bereich ist $L^*(x; g)$ stetig und $r(x)$ gleichmäßig beschränkt. Die gleichmäßige Beschränktheit von $r(x)$ folgt insbesondere aus der Stetigkeit von $\mathfrak{f}(x; \mathfrak{y}(x))$ und der LIPSCHITZ-Bedingung für $\mathfrak{y}(x)$ [§ 4, 1.(2)], welche die gleichmäßige Beschränktheit von $\mathfrak{y}'_+(x)$ bedingt. Somit existiert sicher eine für $a \leq x \leq b$ stetige Funktion $\bar{r}(x)$, so daß durchweg die Abschätzung: $r(x) < \bar{r}(x)$ gilt. Dann betrachten wir die Differentialgleichung:

$$g' = L^*(x; g) + \bar{r}(x). \tag{2}$$

Diese besitzt als Differentialgleichung mit stetiger rechter Seite (vgl. Satz 1) zu jedem Anfangswert $g(a)$, welcher der Ungleichung: $0 \leq g(a) < \bar{g}(a; \mathfrak{y}(a))$ genügt, mindestens eine Lösung $g(x)$, die mindestens in einem gewissen Intervall: $a \leq x \leq b'$ mit $a < b' \leq b$ existiert, wobei allerdings noch zu beachten ist, daß die Intervallgrenze b' von dem Anfangswert $g(a)$ abhängen kann. Diese Funktion $g(x)$ erfüllt im Intervall $a \leq x < b'$ die Differentialungleichung (1) und genügt im Intervall $a \leq x \leq b'$ auch einer LIPSCHITZ-Bedingung [§ 4, 1.(8)], da die rechte Seite der Differentialgleichung (2) mit $g = g(x)$ in diesem Intervall auch gleichmäßig beschränkt ist. Wir erhalten somit unter Beachtung der Sätze 24 und 25 den

Satz 26. *Genügen die Funktionen $\mathfrak{Y}(x)$ und $p(\mathfrak{z})$ den Bedingungen unter § 4, 1, wobei $\mathfrak{Y}(x)$ in einem Intervall $a \leq x \leq b$ definiert sein möge, so gibt es zu jedem Anfangswert $g(a)$ mit $0 \leq g(a) < \bar{g}(a; \mathfrak{Y}(a))$ in einem eventuell kleineren Intervall $a \leq x \leq b'$ eine ebenfalls den Bedingungen unter § 4, 1 genügende Funktion $g(x)$, derart, daß der spezielle Röhrenbereich $R(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x))$ für $a \leq x \leq b'$ ein einschließender Röhrenbereich ist.*

Weitere Aussagen können gemacht werden, falls vorausgesetzt werden darf, daß die Funktion $r(x)$ von (1) selber stetig ist. Wir machen die

Zusatzvoraussetzung: Die Funktion $\mathfrak{Y}(x)$ ist im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig differenzierbar.

Wir betrachten jetzt für beliebige Werte von $\varepsilon > 0$ die Differentialgleichungen

$$g' = L^*(x; g) + r(x) + \varepsilon. \tag{3}$$

Jede Lösung einer der Differentialgleichungen (3) mit ein und demselben Anfangswert $g(a) > \bar{g}(a; \mathfrak{Y}(a))$ genügt, soweit sie existiert, der Differentialungleichung (1). Die untere Grenze all dieser Lösungen $g(x, \varepsilon)$ ist (s. KAMKE [3], S. 78–86) die sog. *Maximallösung* der Differentialgleichung: $g' = L^*(x; g) + r(x)$ mit dem Anfangswert $g(a)$. Existiert diese Maximallösung $g^*(x)$ in einem rechts offenen Intervall: $a \leq x < b'$, und ist das Intervall: $a \leq x \leq b''$ ein abgeschlossenes Teilintervall, so existieren für hinreichend kleine Werte von ε auch die Lösungen $g(x, \varepsilon)$ in diesem Intervall $a \leq x \leq b''$. Wir betrachten jetzt die Menge von einschließenden Röhrenbereichen: $E(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x, \varepsilon))$ für $a \leq x \leq b''$. Der Durchschnitt dieser Menge von einschließenden Röhrenbereichen ist offenbar der Röhrenbereich $R(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g^*(x))$ für $a \leq x \leq b''$. Wir haben also einen Sachverhalt, welcher den Voraussetzungen des Satzes 11 entspricht. Es kann also schließlich der folgende Satz ausgesprochen werden:

Satz 27. *Es sei $\mathfrak{Y}(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion in dem Intervall $a \leq x \leq b$, so daß die Kurve $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{Y}(x))$ ganz in G liegt. $p(\mathfrak{z})$ genüge den Bedingungen von § 4, 1. Ferner sei $g^*(x)$ die Maximallösung der Differentialgleichung $g' = L(x; \mathfrak{Y}(x), g) + r(x)$ mit $r(x) = C \cdot |\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x)) - \mathfrak{Y}'(x)|$ bzw. $r(x) = p(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x)) - \mathfrak{Y}'(x))$ und dem Anfangswert $g^*(a) = g(a) < \bar{g}(a; \mathfrak{Y}(a))$, welche in einem Intervall $a \leq x < b'$ mit $b' \leq b$ existieren möge. (Die Funktion $L(x; \mathfrak{Y}(x) g)$, ist durch die Gleichung [§ 4, 6.(18)] definiert.) Ist nun $\mathfrak{y}(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ mit dem Anfangswert $\mathfrak{y}(a)$, welcher der Abschätzung $p(\mathfrak{y}(a) - \mathfrak{Y}(a)) \leq g(a)$ genügt, so genügt $\mathfrak{y}(x)$ für $a \leq x < b'$ der Abschätzung: $p(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}(x)) \leq g^*(x)$.*

Hiermit ist der theoretische Teil dieser Arbeit abgeschlossen. Die Aussage des Satzes 27 bleibt natürlich auch dann richtig, wenn man an Stelle der Maximallösung der Differentialgleichung $g' = L(x; \mathfrak{Y}(x), g) + r(x)$ eine Majorante $g(x) \geq g^*(x)$ einsetzt. Diese kann wiederum dadurch gewonnen werden, daß man an Stelle der LIPSCHITZ-Grenze $L(x; \mathfrak{Y}, g)$ eine leichter zu bestimmende LIPSCHITZ-Schranke $M(x; \mathfrak{Y}, g) \geq L(x; \mathfrak{Y}, g)$ verwendet. Ebenso darf man auch für die Funktion $r(x)$ eine Majorante $\bar{r}(x) \geq r(x)$ einsetzen. Durch

Abschätzung der Lösungen der Differentialgleichung $g' = M(x; \mathfrak{Y}(x), g) + \bar{r}$ kommt man dann auch zu einer Majorante $g(x) \geq g^*(x)$. Somit ist eine Fehlerabschätzung für eine Näherungslösung $\mathfrak{Y}(x)$ der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ mit gewissen Einschränkungen immer möglich. Diese Einschränkungen sind jedoch ausschließlich auf die notwendig zu machende Einschränkung: $g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y})$ zurückzuführen, die z. B. ganz entfällt, wenn $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ im ganzen $(x; \mathfrak{y})$-Raum stetig ist.

§ 5. Anwendungen.

1. Beispiele für Funktionen $p(\mathfrak{z})$. Wir betrachten zwei Beispiele.

Erstes Beispiel. Die Funktion $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}|$ erfüllt die Bedingungen von § 4, 1. Sie ist positiv für $\mathfrak{z} \neq 0$ und stetig für alle Vektoren $\mathfrak{z}$, erfüllt also die dortige Bedingung (3). Mit $h \geq 0$ ist $|h \cdot \mathfrak{z}| = h \cdot |\mathfrak{z}|$; es gilt also auch (4). Es gilt ferner die Dreiecksungleichung: $||\mathfrak{z}_1| - |\mathfrak{z}_2|| \leq |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|$. Damit erfüllt diese Funktion sowohl die LIPSCHITZ-Bedingung (5) mit $C = 1$ als auch die Bedingung (5a). $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}|$ ist also auch konvex in dem dort geschilderten Sinne. Für die $\mathfrak{v}$-Ableitung erhalten wir, im Falle daß $\mathfrak{z} \neq 0$ ist, den Ausdruck:

$$(1) \qquad [\mathfrak{v} \triangledown p](\mathfrak{z}) = \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} |\mathfrak{z}| = (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{z}^0) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{z}^0 = \frac{1}{|\mathfrak{z}|} \cdot \mathfrak{z},$$

und im Falle daß $\mathfrak{z} = 0$ ist, den Ausdruck:

$$(2) \qquad [\mathfrak{v} \triangledown p](0) = p(\mathfrak{v}) = |\mathfrak{v}|.$$

Zweites Beispiel. Die Funktion $p(\mathfrak{z}) = \operatorname{Max}_{(i)} |z_i|$ erfüllt auch die Bedingungen von § 4, 1. Sie ist positiv, wenn nicht alle z_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ verschwinden. Ferner ist für $h \geq 0$:

$$(3) \qquad \operatorname{Max}_{(i)} |h \cdot z_i| = \operatorname{Max}_{(i)} h \cdot |z_i| = h \cdot \operatorname{Max}_{(i)} |z_i|.$$

Damit sind die Bedingungen (3) und (4) von § 4, 1 bis auf die Stetigkeit von $p(\mathfrak{z})$ erfüllt. Die Stetigkeit folgt aber aus der LIPSCHITZ-Bedingung (5), deren Gültigkeit wir jetzt beweisen wollen. Sind $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ zwei Vektoren mit den Komponenten

$$\mathfrak{z}_1 = (z_{11}, z_{21}, z_{31}, \ldots, z_{n1}) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{z}_2 = (z_{12}, z_{22}, z_{32}, \ldots, z_{n2}),$$

so gilt stets die Abschätzung:

$$(4) \qquad \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i2}| \leq \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i1}| + \operatorname{Max}_{(i)} (|z_{i2}| - |z_{i1}|) \leq \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i1}| + \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i2} - z_{i1}|.$$

Hieraus folgt sofort die Bedingung (5a) und gleichzeitig wegen der auch stets geltenden Abschätzung: $\operatorname{Max} |z_{i2} - z_{i1}| \leq |\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1|$ die LIPSCHITZ-Bedingung (5). Wir brauchen nun nur noch die Ableitung der Funktion $p(\mathfrak{z})$ entsprechend der Definition (6) zu berechnen. Es handelt sich hier um den Grenzwert:

$$(5) \qquad [\mathfrak{v} \triangledown p](\mathfrak{z}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\operatorname{Max}_{(i)} |z_i + t \cdot v_i| - \operatorname{Max}_{(i)} |z_i| \right).$$

Hierbei sind die Vektoren $\mathfrak{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ und $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ fest und t geht mit positiven Werten nach Null. Wir wollen zunächst annehmen, daß

nicht alle z_i verschwinden. Nun wollen wir unterscheiden zwischen den Indizes $i=i'$, für die der Betrag von $z_{i'}$ gleich dem Maximum der Beträge aller z_i ist, und den übrigen Indizes $i=i''$, für die die Beträge von $z_{i''}$ kleiner als dieses Maximum sind. Da die Zahlen: $z_i+t\,v_i$ mit fallenden Werten von t gegen die entsprechenden Zahlen z_i konvergieren, so sind für hinreichend kleine Werte von t die Beträge der Zahlen: $z_{i'}+t\,v_{i'}$ sämtlich größer als die Zahlen: $|z_{i''}+tv_{i''}|$. Es ist dann also:

$$(6)\quad \operatorname*{Max}_{(i)}|z_i+tv_i| = \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i+tv_i| \quad \text{entsprechend} \quad \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i| = \operatorname*{Max}_{(i)}|z_i|.$$

Dann sind aber auch die Vorzeichen der Zahlen: $z_{i'}+tv_{i'}$ gleich den Vorzeichen der entsprechenden Zahlen $z_{i'}$. Daraus folgt:

$$(7)\quad |z_{i'}+tv_{i'}| = (z_{i'}+tv_{i'})\cdot \operatorname{sgn}(z_{i'}) = |z_{i'}| + t\cdot v_{i'}\cdot \operatorname{sgn}(z_{i'}).$$

Wir bekommen damit die Gleichung:

$$(8)\quad \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i+tv_i| = \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i| + t\cdot \operatorname*{Max}_{(i')}\left(v_i\cdot \operatorname{sgn}(z_i)\right),$$

da ja in Wirklichkeit alle $z_{i'}$ dem Betrage nach gleich sind. Entsprechend der Gl. (5) ist bei Berücksichtigung von (6)

$$(9)\quad [\mathfrak{v}\triangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z}) = \operatorname*{Max}_{(i')}\left(v_i\cdot\operatorname{sgn}(z_i)\right) \quad \text{für} \quad \mathfrak{z}\neq 0.$$

Für $\mathfrak{z}=0$ ist analog zu (2):

$$[\mathfrak{v}\triangledown\mathfrak{p}](0) = \mathfrak{p}(\mathfrak{v}) = \operatorname*{Max}_{(i)}|v_i|.$$

2. Lipschitzbedingungen. Für die Abschätzung der LIPSCHITZ-Grenze

$$(1)\quad L^*(x;g) = L\big(x;\mathfrak{Y}(x),g\big) = \overline{\operatorname{fin}}\left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x)+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x))\right)\triangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{z})$$

für $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})=g$ ist notwendig eine LIPSCHITZ-Schranke $M(x;g)=M^*\big(x;\mathfrak{Y}(x),g\big)$ zu bestimmen, so daß die LIPSCHITZ-Bedingung

$$(2)\quad \left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x)+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x))\right)\triangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}) \leq M^*\big(x;\mathfrak{p}(\mathfrak{z})\big)$$

erfüllt ist. Da bei dieser Bedingung eine spezielle Funktion $\mathfrak{Y}(x)$ verwendet wird, soll sie eine *spezielle* LIPSCHITZ-*Bedingung* genannt werden. Entsprechend soll die Funktion $M^*(x;g)$ eine *spezielle* LIPSCHITZ-*Schranke* heißen. Betrachtet man daneben die *allgemeine* LIPSCHITZ-*Bedingung*:

$$(3)\quad \left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y})\right)\triangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}) \leq M\big(x;\mathfrak{Y},\mathfrak{p}(\mathfrak{z})\big)$$

mit einer *allgemeinen* LIPSCHITZ-*Schranke* $M(x;\mathfrak{Y},g)$, so ist offenbar $M\big(x;\mathfrak{Y}(x)\big) = M^*(x;g)$ eine spezielle LIPSCHITZ-Schranke. Soweit $g<\bar{g}(x;\mathfrak{Y})$ bzw. $g<\bar{g}\big(x;\mathfrak{Y}(x)\big)$ bleibt, sind die LIPSCHITZ-Grenzen $L(x;\mathfrak{Y},g)$ bzw. $L^*(x;g) = L\big(x;\mathfrak{Y}(x),g\big)$ die kleinstmöglichen LIPSCHITZ-Schranken, was aus ihrer Eigenschaft als obere Grenzen folgt. — Eine andere Möglichkeit, spezielle LIPSCHITZ-Schranken zu bestimmen, ist die folgende: Es sei B ein zusammenhängender Teilbereich von G. Wir bestimmen eine Funktion $\overline{M}(x;g)$ so, daß die LIPSCHITZ-Bedingung:

$$(4)\quad \left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{v}_1)-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{v}_2)\right)\triangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_2) \leq \overline{M}\left(x;\mathfrak{p}(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_2)\right)$$

für alle Punkte $\mathfrak{x}_1=(x;\mathfrak{y}_1)$ und $\mathfrak{x}_2=(x;\mathfrak{y}_2)$ bei jeweils festem x erfüllt ist, sofern die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide in B liegen. Mit $\mathfrak{x}_1=(x;\mathfrak{Y}(x)+\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{x}_2=(x;\mathfrak{Y}(x))$ gilt dann auch die LIPSCHITZ-Bedingung

$$[(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x)+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x)))\triangledown p](\mathfrak{z})\leq M(x;p(\mathfrak{z})), \tag{5}$$

falls $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide in B liegen. Es ist also $M(x;g)=M^*(x;g)$ eine spezielle LIPSCHITZ-Schranke, wenn für festes x also auch festes $\mathfrak{Y}(x)$ alle Punkte $\mathfrak{x}_1$ in B liegen, für die $p(\mathfrak{z})=g$ ist. Ist dies für $g<\bar{\beta}(x;\mathfrak{Y}(x))$ der Fall, so kann die Funktion $M(x;g)$, die wir eine *gleichmäßige* LIPSCHITZ-*Schranke* für den Bereich B nennen wollen, für $g<\bar{\beta}(x;\mathfrak{Y}(x))$ für jede ganz in B verlaufende Kurve $\mathfrak{x}=(x;\mathfrak{Y}(x))$ als spezielle LIPSCHITZ-Schranke verwendet werden.

3. Spezielle Beispiele.

a) Bestimmung der LIPSCHITZ-*Grenze mit* $p(\mathfrak{z})=\operatorname{Max}|z_i|$. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem:

$$y_i'=f_i(x;y_1,y_2,\ldots,y_n) \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Zu berechnen ist die LIPSCHITZ-Grenze:

$$L(x;\mathfrak{Y},g)=\overline{\operatorname{fin}}\,[(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}))\triangledown p](\mathfrak{z}) \tag{2}$$

unter der Nebenbedingung: $p(\mathfrak{z})=\operatorname{Max}_{(i)}|z_i|=g$. Unter dieser Bedingung bilden die Punkte

$$(x;Y_1+z_1,Y_2+z_2,\ldots,Y_n+z_n)=(x;\mathfrak{Y}+\mathfrak{z}) \tag{3}$$

bei festem x und festen Werten Y_i den vollen Rand eines n-dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge $2g$. Der Rand dieses Würfels setzt sich aus $2n$ $(n-1)$-dimensionalen Würfeln zusammen, welche durch die Bedingungen

$$\begin{cases} z_i=g, & z_j\leq g \quad \text{für} \quad j\neq i \\ z_i=-g, & z_j\leq g \quad \text{für} \quad j\neq i \end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

bestimmt sind. Hierbei kommen die Punkte, bei denen mindestens zwei $\mathfrak{z}$-Komponenten den gleichen Betrag haben, mehrfach vor. Wir setzen nun $\mathfrak{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ mit

$$v_i=f_i(x;Y_1+z_1,Y_2+z_2,\ldots,Y_n+z_n)-f_i(x;Y_1,Y_2,\ldots,Y_n) \tag{5}$$

und bilden für jeweils eine der Punktmengen, welche durch die Bedingungen:

$$z_i=g, \quad z_j<g \quad \text{für} \quad j\neq i \quad \text{bzw.} \quad z_i=-g, \quad z_j<g \quad \text{für} \quad j\neq i \tag{6}$$

bestimmt sind, die $\mathfrak{v}$-Ableitung nach § 5, 1.(9):

$$[\mathfrak{v}\triangledown p](\mathfrak{z})=\operatorname{sgn}(z_i)\cdot v_i=V_i^+ \quad \text{bzw.} \quad =V_i^- \tag{7}$$

mit

$$\begin{cases} V_i^+=+(f_i(x;Y_1+z_1,\ldots,Y_i+g,\ldots,Y_n+z_n)-f_i(x;Y_1,\ldots,Y_n)) & \text{bzw.} \\ V_i^-=-(f_i(x;Y_1+z_1,\ldots,Y_i-g,\ldots,Y_n+z_n)-f_i(x;Y_1,\ldots,Y_n)). \end{cases} \tag{8}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist in der ihm entsprechenden Punktmenge der abgeschlossenen Würfel (4) eine stetige Funktion der noch beweglichen $\mathfrak{z}$-Kom-

ponenten. Jeder dieser Ausdrücke besitzt also in dem ihm entsprechenden abgeschlossenen Würfel ein Maximum:

$$\overline{V}_i^+ = \operatorname{Max} V_i^+ \quad \text{bzw.} \quad \overline{V}_i^- = \operatorname{Max} V_i^- \tag{9}$$

unter der Nebenbedingung: $|z_j| \leq g$ für $j \neq i$, das dann auch gleich der oberen Grenze in dem offenen Würfel (6) unter derselben Bedingung ist. Gleichzeitig werden damit aber auch die $\mathfrak{v}$-Ableitungen an den Stellen mit erfaßt, die durch die Bedingungen (6) ausgeschlossen werden. An jeder von diesen Stellen ist nämlich nach § 5, 1.(9) die $\mathfrak{v}$-Ableitung gleich mindestens einem der $2n$ Ausdrücke V_i^+ bzw. V_i^-. Somit erhalten wir für die zu bestimmende LIPSCHITZ-Grenze (2) das Ergebnis:

$$L(x; \mathfrak{Y}, g) = \operatorname{Max}(\overline{V}_1^+, \overline{V}_2^+, \ldots, \overline{V}_n^+; \overline{V}_1^-, \overline{V}_2^-, \ldots, \overline{V}_n^-). \tag{10}$$

Beispiel. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem:

$$y_1' = -x \cdot y_1 + y_2, \quad y_2' = -x^2 \cdot y_2 + y_1.$$

Für den Vektor $\mathfrak{v} = (v_1, v_2)$ erhalten wir die Komponenten:

$$v_1 = -x \cdot (Y_1 + z_1) + Y_2 + z_2 + x \cdot Y_1 - Y_2 = -x \cdot z_1 + z_2$$
$$v_2 = -x^2 (Y_2 + z_2) + Y_1 + z_1 + x^2 \cdot Y_2 - Y_1 = -x^2 \cdot z^2 + z_1.$$

Für die Ausdrücke V_i^+ bzw. V_i^- erhalten wir entsprechend:

$$V_1^+ = -x \cdot g + z_2, \quad V_1^- = -x \cdot g - z_2$$
$$V_2^+ = -x^2 \cdot g + z_1, \quad V_2^- = -x^2 \cdot g - z_1.$$

Für die Maxima dieser Ausdrücke erhalten wir die Ausdrücke:

$$\overline{V}_1^+ = g \cdot (1 - x), \quad \overline{V}_1^- = g \cdot (1 - x), \quad \overline{V}_2^+ = g \cdot (1 - x^2), \quad \overline{V}_2^- = g \cdot (1 - x^2).$$

Damit bestimmt sich die LIPSCHITZ-Grenze zu:

$$L(x; g) = g \cdot \operatorname{Max}\left((1 - x); (1 - x^2)\right)$$

oder ausführlicher:

$$L = g \cdot (1 - x) \quad \text{für} \quad x \leq 0,$$
$$L = g \cdot (1 - x^2) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1,$$
$$L = g \cdot (1 - x) \quad \text{für} \quad x \geq 1.$$

Man erkennt, daß die LIPSCHITZ-Grenze für $x > 1$ negativ ist.

b) Bestimmung einer gleichmäßigen LIPSCHITZ-*Schranke mit* $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}|$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem:

$$y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

in einem abgeschlossenen Bereich B, der so beschaffen sein soll, daß für festes x der jeweilige Durchschnitt von B mit der Hyperebene $x = \text{const}$ eine konvexe Punktmenge ist. Wir wollen weiter voraussetzen, daß die rechten Seiten der

Differentialgleichungen (1) stetige partielle Ableitungen

$$f_{ik}(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{2}$$

besitzen, wobei jedoch nicht erforderlich ist, daß die f_{ik} auch stetig von x abhängen. Die zu $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}| = |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|$ gehörende gleichmäßige LIPSCHITZ-Bedingung nach § 5, 2.(4) lautet dann:

$$\left((\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2)^0 \cdot (\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}_1) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}_2))\right) \leq \overline{M}(x; |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|) \tag{3}$$

für alle $(x; \mathfrak{y}_1)$ und $(x; \mathfrak{y}_2)$ aus B. Mit den Bezeichnungen $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{z}$ und nach Multiplikation mit $|\mathfrak{z}|$ lautet sie ausführlicher:

$$\sum z_i \cdot \left(f_i(x; Y_1 + z_1, \ldots, Y_n + z_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)\right) \leq \overline{M}(x; |\mathfrak{z}|). \tag{4}$$

Wir betrachten nun die Funktion von t:

$$Q(t) = \sum z_i \cdot \left(f_i(x; Y_1 + t z_1, \ldots, Y_n + t z_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)\right). \tag{5}$$

Diese hat für $t = 0$ den Wert Null und für $t = 1$ den Wert der linken Seite von (4). Nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es dann einen Wert von t aus dem Intervall: $0 < t < 1$, derart daß $Q(1) = Q'(t)$ ist. Unter Verwendung der partiellen Ableitungen (2) und mit der Abkürzung $\mathfrak{Y} + t\,\mathfrak{z} = \bar{\mathfrak{y}}$ erhalten wir demnach die Gleichung:

$$\sum z_i \cdot \left(f_i(x; y_1, \ldots, y_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)\right) = \sum \sum z_i \cdot f_{ik}(x; \bar{\mathfrak{y}}) \cdot z_k. \tag{6}$$

Die Zwischenstelle $(x; \bar{\mathfrak{y}})$, an der die f_{ik} zu nehmen sind, liegt sicher in B, da B für jedes feste x als konvex vorausgesetzt war. Nach einem bekannten Satz über quadratische Formen gilt nun stets die Abschätzung:

$$\sum \sum z_i \cdot f_{ik} \cdot z_k \leq \bar{\lambda}(x; \bar{\mathfrak{y}}) \cdot \sum (z_i)^2 = \bar{\lambda}(x; \bar{\mathfrak{y}}) \cdot (\mathfrak{z})^2, \tag{7}$$

wobei $\bar{\lambda}(x; \bar{\mathfrak{y}})$ der größte Eigenwert der Matrix

$$A = (a_{ik}) \quad \text{mit} \quad a_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(f_{ik}(x; \bar{\mathfrak{y}}) + f_{ik}(x; \bar{\mathfrak{y}})\right) \tag{8}$$

ist. Da die Elemente der Matrix A als Funktionen von $\bar{\mathfrak{y}}$ bei festem x in B gleichmäßig stetig sind, so existiert für jedes feste x sicher ein Maximum von $\bar{\lambda}(x; \bar{\mathfrak{y}})$, das wir mit $M(x)$ bezeichnen. Damit ist, wie man durch Vergleich mit (4) leicht feststellen kann,

$$\overline{M}(x; |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|) = M(x) \cdot |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2| \tag{9}$$

eine gleichmäßige LIPSCHITZ-Schranke für den Bereich B.

Hiermit kann unter den obigen Voraussetzungen die Bestimmung einer LIPSCHITZ-Schranke auf die Bestimmung einer oberen Schranke für die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A zurückgeführt werden, wobei aber bemerkt werden muß, daß diese obere Schranke keineswegs auch eine obere Schranke für die Absolutbeträge der Eigenwerte sein muß. Für eine negativ-definite Matrix A darf man z. B. stets die Zahl Null als obere Eigenwert-

schranke benutzen. Bekannte Absolutwertabschätzungen sind:

$$(10) \qquad |\lambda| \leq \sqrt{\sum\sum (a_{ik})^2} \quad \text{und} \quad |\lambda| \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \sum_{(k)} |a_{ik}|,$$

aus denen natürlich die Abschätzungen:

$$(11) \qquad \lambda \leq \sqrt{\sum\sum (a_{ik})^2} \quad \text{und} \quad \lambda \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \sum_{(k)} |a_{ik}|$$

unmittelbar folgen. Beide Abschätzungen (11) lassen sich noch verschärfen. Für die Zweite soll hier die einfache Herleitung der verschärften Abschätzung:

$$(12) \qquad \lambda \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \left(a_{ii} + \sum_{(k)}' |a_{ik}|\right) \quad \text{mit} \quad \sum' \text{ für } k \neq i$$

angegeben werden. — Es sei λ der größte Eigenwert der Matrix $A = (a_{ik})$ und $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Die i-te Komponente z_i habe den größten Betrag unter den Komponenten $z_1, \ldots, z_n$. Wir dürfen annehmen, daß $z_i = 1$ und $|z_k| \leq 1$ für $k \neq i$ ist. Dann gilt speziell die Gleichung bzw. Abschätzung:

$$(13) \qquad \lambda = a_{ii} + \sum' a_{ik} \cdot z_k \leq a_{ii} + \sum' |a_{ik}| \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \left(a_{ii} + \sum' |a_{ik}|\right),$$

die zu beweisen war.

c) Bestimmung einer speziellen LIPSCHITZ*-Grenze und Abschätzung von Lösungen.* Wir betrachten als spezielles Beispiel das Differentialgleichungssystem:

$$(1) \qquad y_1' = 1 - y_1 \cdot y_2, \quad y_2' = y_1 - y_2^2.$$

Man erkennt leicht, daß $Y_1(x) = 1$, $Y_2(x) = 1$ eine Lösung ist. Wir wollen die Nachbarlösungen abschätzen und verwenden hierzu die Funktion $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Dann gilt nach Satz 27 für jede Lösung: $y_1(x), y_2(x)$ die Abschätzung:

$$(2) \qquad \sqrt{(y_1(x) - Y_1(x))^2 + (y_2(x) - Y_2(x))^2} \leq g(x) \quad \text{für} \quad x \geq 0,$$

wenn $g(x)$ die Maximallösung der Differentialgleichung:

$$(3) \qquad g' = L^*(x; g) + r(x)$$

mit

$$L^*(x; g) = \overline{\text{fin}}\, \frac{1}{|\mathfrak{z}|} \cdot \left(\mathfrak{z} \cdot \left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})(x) + \mathfrak{z}\right) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}(x))\right)$$

unter der Nebenbedingung: $|\mathfrak{z}| = g$, $r(x) = |\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})(x)) - \mathfrak{y}'(x)|$ und dem Anfangswert: $g(0) = |\mathfrak{y}(0) - \mathfrak{y}(0)|$ ist. Nach Einsetzen der speziellen Werte erhalten wir ausführlicher:

$$(4) \qquad g(0) = \sqrt{(y_1(0) - 1)^2 + (y_2(0) - 1)^2}, \qquad r(x) = 0 \quad (\mathfrak{y}(x) \text{ ist Lösung!})$$

und für die LIPSCHITZ-Grenze das Maximum:

$$(5) \qquad L^*(x; g) = \frac{1}{g} \cdot \operatorname{Max}\left(z_1(-z_1 - z_2 - z_1 z_2) + z_2(z_1 - 2z_2 - z_2^2)\right)$$

unter der Nebenbedingung: $z_1^2+z_2^2=g^2=\text{const}$. Mit Hilfe dieser Bedingung vereinfachen wir zunächst:

$$L^*(x;g)=\frac{1}{g}\cdot\text{Max}\,(-g^2-z_2^2-z_2\,g^2), \tag{6}$$

setzen die Parameterdarstellungen: $z_1=g\cdot\sin(t)$ und $z_2=g\cdot\cos(t)$ ein und lösen die Extremumsaufgabe:

$$L^*(x;g)=\text{Max}\left(-g(1+\cos^2 t+g\cdot\cos t)\right). \tag{7}$$

Durch Nullsetzen der Ableitung erhalten wir die Gleichung:

$$g\cdot\sin(t)+2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)=0. \tag{8}$$

Es ist also notwendig entweder: $\sin(t)=0$ mit $\cos(t)=\pm 1$ oder: $2\cdot\cos(t)=-g$, wobei die letzte Gleichung allerdings nur für $g\leq 2$ in Frage kommt. Für $g\leq 2$ haben wir danach zu entscheiden zwischen den drei Extremwerten:

$$L^*(x;g)=\text{Max}\,(-2g-g^2;-2g+g^2;-g+\tfrac{1}{4}g^3)=-g+\tfrac{1}{4}g^3, \tag{9}$$

wobei die Entscheidung stets zugunsten des letzten ausfällt. Für $g>2$ kommt dieser Ausdruck aber gerade nicht in Frage, so daß wir uns dann für den zweiten entscheiden müssen. Wir erhalten zusammen

$$L^*(x;g)=-g+\tfrac{1}{4}g^3 \text{ für } g\leq 2 \text{ und } L^*(x;g)=-2g+g^2 \text{ für } g\geq 2. \tag{10}$$

Wir lösen jetzt die Differentialgleichung (3) mit $g(0)=g_0$, wobei wir die drei Fälle: $g_0<2$, $g_0>2$ und $g_0=2$ gesondert rechnen. Für $g_0<2$ lautet die Differentialgleichung:

$$g'=-g+\tfrac{1}{4}g^3, \text{ solange } g<2 \text{ ist.} \tag{11}$$

Sie hat die eindeutige Lösung:

$$g(x)=\frac{2g_0}{\sqrt{(4-g_0^2)\cdot e^{2x}+g_0^2}}, \tag{12}$$

welche für $x\geq 0$ stets kleiner als 2 bleibt.

Für $g_0>2$ lautet die Differentialgleichung.

$$g'=-2g+g^2, \text{ solange } g>2 \text{ ist.} \tag{13}$$

Sie hat die eindeutige Lösung:

$$g(x)=\frac{2g_0}{g_0-(g_0-2)\cdot e^{2x}}, \tag{14}$$

welche für $x\geq 0$ stets größer als 2 bleibt und für $x<\frac{1}{2}\ln\frac{g_0}{g_0-2}$ existiert.

Für $g_0=2$ lautet die Lösung: $g(x)=2$, da dann die Lösung (12) und die Lösung (14) mit dieser Lösung zusammenfallen.

Besonders interessant ist der Fall: $g_0<2$. In diesem Falle konvergiert $g(x)$ nach (12) mit wachsendem x monoton gegen Null. Dieses hat für alle Nachbarlösungen: $y_1(x)$, $y_2(x)$ der Lösung: $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ des Differential-

gleichungssystems (1), welche für $x=0$ der Abschätzung:

$$(y_1(0)-1)^2+(y_2(x)-1)^2<2^2=4$$

genügen, zur Folge, daß sie sämtlich mit wachsendem x asymptotisch gegen die Lösung: $Y_1(x)=1$, $Y_2(x)=1$ streben.

Das letzte Beispiel wurde dem Verfasser zur Untersuchung nach seinen Methoden von HERMANN SCHMIDT vorgelegt. Die Darstellung der Lösungen in der Form: $y_i=u_i\cdot\frac{1}{u_0}$ für $i=1,2$, wo u_k für $k=0,1,2$ dem zyklischen linearen Differentialgleichungssystem mit festen Koeffizienten: $u_k'=u_{k-1}$ (Indizes mod 3) genügt, zeigt unter anderem, daß der Kreisradius 2 bei der letzten Abschätzung nicht durch einen größeren als $\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}=2{,}12\ldots$ ersetzt werden kann, da jede für $x=0$ auf der Ebene: $y_1+y_2+1=0$ beginnende Lösung stets in dieser Ebene verbleibt, also nicht die Asymptote: $Y_1=Y_2=1$ haben kann. Die Abschätzung ist also als sehr gut zu bezeichnen.

Literatur.

[1] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin 1951. — [2] GIULIANO, L.: Su un notevole teorema di unicità per systemi di equazioni differentiali ordinarie. Atti accad. Italia VII.1, 330—336 (1940). — [3] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [4] MCSHANE, E. I.: On the uniqueness of the solutions of differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 755—757 (1939). — [5] NAGUMO, M.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Jap. J. Math. **3**, 107—112 (1926). — [6] OSGOOD, W. F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $y'=f(x;y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung. Mh. Math. Phys. **9** (1898). — [7] PEANO, G.: Math. Ann. **37**, 482 (1890). — [8] PERRON, O.: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y'=f(x;y)$. Math. Ann. **76**, 471 (1915). — [9] PERRON, O.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **28**, 216—219 (1928). — [10] SANSONE, G.: Equazioni differenziali nel campo reale, Parte sec. 2. ed., Cap. VIII. Bologna 1949. — [11] SCORZA-DRAGONI, G.: Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equatione differenziale. Rend. Circ. Mat. Palermo **54**, 444 (1930). — [12] TAMARKINE, J.: Sur le theorème d'unicité des solutions des equations differentielles ordinaires. Math. Z. **16**, 207—213 (1923).

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 28. März 1955.)

HORNFECK, B.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 502 (1955)

Berichtigung zur Arbeit:

Ein Satz über die Primzahlmenge.

Von

BERNHARD HORNFECK.

Die Behauptung, daß die Primzahlmenge total irreduzibel sei, wurde in meiner Arbeit (diese Zeitschrift Bd. **60**, S. 271—273) durch den Nachweis, daß eine Zerlegung in einen endlichen und einen unendlichen Summanden unmöglich ist, reduziert auf die Behauptung, daß eine Zerlegung in zwei unendliche Summanden nicht existiert. Um letzteres zu beweisen, wurde die Abschätzung

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k) = c_7 \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^i}\right)^{k-v_i} \right\}^{-1} \tag{9}$$

benutzt. Beim genauen Studium des Beweises für (9) zeigt sich jedoch, daß c_7 noch von k abhängen kann [KNÖDEL, W.: Sätze über Primzahlen. Mh. Math. **55**, 62—75 (1951)]. Nur unter der Annahme der Hypothese, daß (9) schon gleichmäßig in k gilt, ist also der Satz bewiesen. Ich danke Herrn ERDÖS dafür, daß er so liebenswürdig war, mich auf diese Lücke aufmerksam zu machen.

Berlin, Mathematisches Institut der Freien Universität.

(Eingegangen am 28. Februar 1955.)

gleichungssystems (1), welche für $x=0$ der Abschätzung:

$$(y_1(0)-1)^2+(y_2(x)-1)^2<2^2=4$$

genügen, zur Folge, daß sie sämtlich mit wachsendem x asymptotisch gegen die Lösung: $Y_1(x)=1$, $Y_2(x)=1$ streben.

Das letzte Beispiel wurde dem Verfasser zur Untersuchung nach seinen Methoden von HERMANN SCHMIDT vorgelegt. Die Darstellung der Lösungen in der Form: $y_i=u_i\cdot\frac{1}{u_0}$ für $i=1,2$, wo u_k für $k=0,1,2$ dem zyklischen linearen Differentialgleichungssystem mit festen Koeffizienten: $u_k'=u_{k-1}$ (Indizes mod 3) genügt, zeigt unter anderem, daß der Kreisradius 2 bei der letzten Abschätzung nicht durch einen größeren als $\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}=2{,}12\ldots$ ersetzt werden kann, da jede für $x=0$ auf der Ebene: $y_1+y_2+1=0$ beginnende Lösung stets in dieser Ebene verbleibt, also nicht die Asymptote: $Y_1=Y_2=1$ haben kann. Die Abschätzung ist also als sehr gut zu bezeichnen.

Literatur.

[1] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin 1951. — [2] GIULIANO, L.: Su un notevole teorema di unicità per systemi di equazioni differentiali ordinarie. Atti accad. Italia VII.1, 330—336 (1940). — [3] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [4] MCSHANE, E. I.: On the uniqueness of the solutions of differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 755—757 (1939). — [5] NAGUMO, M.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Jap. J. Math. **3**, 107—112 (1926). — [6] OSGOOD, W. F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $y'=f(x;y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung. Mh. Math. Phys. **9** (1898). — [7] PEANO, G.: Math. Ann. **37**, 482 (1890). — [8] PERRON, O.: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y'=f(x;y)$. Math. Ann. **76**, 471 (1915). — [9] PERRON, O.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **28**, 216—219 (1928). — [10] SANSONE, G.: Equazioni differenziali nel campo reale, Parte sec. 2. ed., Cap. VIII. Bologna 1949. — [11] SCORZA-DRAGONI, G.: Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equatione differenziale. Rend. Circ. Mat. Palermo **54**, 444 (1930). — [12] TAMARKINE, J.: Sur le theorème d'unicité des solutions des equations differentielles ordinaires. Math. Z. **16**, 207—213 (1923).

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 28. März 1955.)

HORNFECK, B.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 502 (1955)

Berichtigung zur Arbeit:

Ein Satz über die Primzahlmenge.

Von

BERNHARD HORNFECK.

Die Behauptung, daß die Primzahlmenge total irreduzibel sei, wurde in meiner Arbeit (diese Zeitschrift Bd. **60**, S. 271—273) durch den Nachweis, daß eine Zerlegung in einen endlichen und einen unendlichen Summanden unmöglich ist, reduziert auf die Behauptung, daß eine Zerlegung in zwei unendliche Summanden nicht existiert. Um letzteres zu beweisen, wurde die Abschätzung

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k) = c_7 \left\{ \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{k-v_s} \right\}^{-1} \tag{9}$$

benutzt. Beim genauen Studium des Beweises für (9) zeigt sich jedoch, daß c_7 noch von k abhängen kann [KNÖDEL, W.: Sätze über Primzahlen. Mh. Math. **55**, 62—75 (1951)]. Nur unter der Annahme der Hypothese, daß (9) schon gleichmäßig in k gilt, ist also der Satz bewiesen. Ich danke Herrn ERDÖS dafür, daß er so liebenswürdig war, mich auf diese Lücke aufmerksam zu machen.

Berlin, Mathematisches Institut der Freien Universität.

(Eingegangen am 28. Februar 1955.)